

©Беляев В. А., Шапеев В. П., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-629-648

УДК 519.632.4, 519.635.1

Варианты метода коллокации и наименьших невязок для решения задач математической физики в выпуклых четырехугольных областях

Беляев В. А., Шапеев В. П.

получена 18 апреля 2017

Аннотация. Предложены и реализованы новые варианты метода коллокации и наименьших невязок (КНН) для численного решения краевых задач для уравнений с частными производными в выпуклых четырехугольных областях. Их реализация и численные эксперименты выполнены на примерах решения уравнений Пуассона и бигармонического. Решение второго уравнения использовано для моделирования напряженно-деформированного состояния изотропной пластины, находящейся под действием поперечной нагрузки. Дифференциальные задачи методом КНН проектировались в пространство полиномов четвертой степени. Граничные условия для приближенного решения задач выписывались точно на границе расчетной области. Реализованы варианты метода КНН на сетках, построенных двумя различными способами. В первом варианте в области строится некоторая “квазирегулярная” сетка, крайние линии которой совпадают с границами области. Во втором — область сначала покрывается регулярной сеткой с прямоугольными ячейками. При этом в граничных ячейках, которые пересекала граница, для аппроксимации дифференциальных уравнений использованы “законтурные” (расположенные вне расчетной области) точки коллокации и точки согласования решения задачи. Кроме этого, “малые” нерегулярные треугольные ячейки, отсеченные границей области от прямоугольных ячеек начальной регулярной сетки, присоединялись к соседним четырехугольным ячейкам. Этот прием позволил существенно уменьшить обусловленность системы линейных алгебраических уравнений приближенной задачи по сравнению со случаем, когда малые ячейки наряду с другими ячейками использовались как самостоятельные для построения приближенного решения задачи. В численных экспериментах по сходимости приближенного решения различных задач на последовательности сеток установлено, что оно сходится с повышенным порядком и с высокой точностью совпадает с аналитическим решением задачи в случае, когда оно известно.

Ключевые слова: метод коллокации и наименьших невязок, краевая задача, неканоническая область, нерегулярная сетка, повышенный порядок аппроксимации, уравнение Пуассона, бигармоническое уравнение

Для цитирования: Беляев В. А., Шапеев В. П., "Варианты метода коллокации и наименьших невязок для решения задач математической физики в выпуклых четырехугольных областях", *Моделирование и анализ информационных систем*, 24:5 (2017), 629–648.

Об авторах: Беляев Василий Алексеевич, orcid.org/0000-0001-5901-2880, старший лаборант, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, 4/1, г. Новосибирск, 630090 Россия, e-mail: belyaevasily@mail.ru

Шапеев Василий Павлович, orcid.org/0000-0001-6761-7273, доктор физ.-мат. наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, 4/1, г. Новосибирск, 630090 Россия, Новосибирский национальный исследовательский университет, ул. Пирогова, 2, г. Новосибирск, 630090, Россия, e-mail: vshapeev@ngs.ru

Введение

Многие численные методы, дающие высокую точность решения краевых задач для уравнений с частными производными (PDE) в прямоугольных областях, не имеют своих аналогов в случае областей иной формы. Однако многие явления в реальном мире, которые моделируются с помощью численных методов, происходят в областях, отличных от прямоугольных. Отсюда настоятельная потребность иметь возможность моделировать эти явления в областях с формой, соответствующей действительности, чтобы на практике получать в расчетах моделируемых изделий, физических процессов и других объектов достоверные результаты.

В данной работе краевые задачи для PDE решаются с повышенной точностью проекционным, сеточным методом КНН (коллокации и наименьших невязок — вариантом метода коллокации и наименьших квадратов) [1, 2] в выпуклых четырехугольных областях. В методе КНН путем проектирования задачи для PDE в конечномерное линейное функциональное пространство ставится в соответствие приближенная задача, решение которой сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Решение последней определяет приближенное решение дифференциальной задачи. Поскольку в методе КНН приближенное решение кусочно-аналитическое (в данной работе кусочно-полиномиальное), в нем относительно просто реализуются варианты метода в областях различной формы и на сетках с различной формой ячеек, в том числе варианты повышенной точности и на адаптивных сетках [1, 3, 4].

Здесь реализованы два разных варианта построения расчетной сетки в выпуклых четырехугольных областях. Их возможности были проверены на решении краевых задач для уравнения Пуассона и для бигармонического уравнения, которое описывает напряженно-деформированное состояние (НДС) под различными нагрузками изотропной пластины в форме выпуклого четырехугольника. Задача о НДС прямоугольной пластины методом КНН с повышенной точностью решена в [5]. В данной работе на решении тестовой задачи для четырехугольной пластины показана высокая точность предложенных вариантов метода КНН.

Описание, характеристика, история возникновения, некоторые возможности метода КНН и библиография по нему приведены в [1, 4–11]. Здесь коротко отметим, что в методе КНН для нахождения решения приближенной задачи в каждой ячейке выписывается переопределенная система уравнений, после подстановки в которую искомого приближенного решения из нее получается переопределенная СЛАУ для определения коэффициентов представления в линейном функциональном пространстве решения приближенной задачи. Решение переопределенной СЛАУ ищется из требования минимизации функционала невязки, составленного из невязок всех ее уравнений. В качестве функционала обычно берется сумма квадратов невязок. Его минимум может отыскиваться разными способами. В случае переопределенной СЛАУ он достигается на ее псевдорешении, построенном методом наименьших квадратов или ортогональным методом [4, 5, 9]. Детальное описание алгоритма метода КНН применительно к рассмотренным здесь задачам дано ниже в ходе изложения работы.

1. Задача Дирихле для уравнения Пуассона

1.1. Постановка задачи и описание метода

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \Delta v = f(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \Omega, \\ v|_{\delta\Omega} = g(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1)$$

в области Ω , имеющей форму произвольного выпуклого четырехугольника, с границей $\delta\Omega$ (рис. 1), где $v(x_1, x_2)$ — искомая функция, $f(x_1, x_2)$ и $g(x_1, x_2)$ — заданные функции. Реализация рассматриваемых вариантов метода КНН решения других краевых задач для уравнения Пуассона осуществляется по аналогичным алгоритмам, описанным далее.

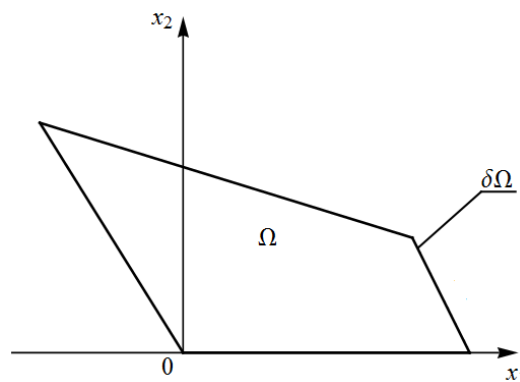


Рис. 1. Область решения задачи
Fig. 1. The domain of problem solution

Вариант I. Пронумеруем последовательно стороны четырехугольника от 1 до 4 при непрерывном обходе его границы. Пусть l_1 и l_3 — длины первой и третьей противоположных сторон четырехугольника, l_2 и l_4 — длины второй и четвертой его сторон. Чтобы покрыть Ω сеткой с четырехугольными ячейками, разобьем точками каждую сторону с номерами 1 и 3 на m_1 равных частей, а стороны с номерами 2 и 4 на m_2 равных частей. Числа m_1 и m_2 выбираются такими, чтобы величины сумм длин противоположных сторон ячеек сетки по возможности меньше различались между собой, если из каких-либо определенных соображений нет необходимости ее адаптировать к решению задачи. Пронумеруем точки, расставленные на сторонах четырехугольника, однозначными последовательностями номеров, одинаковыми для противоположных его сторон. При этом на противоположных сторонах четырехугольника отсчет точек начнем от вершин ее углов, имеющих общую сторону. Соединим отрезками прямых точки с одинаковыми номерами, расположенные на противоположных сторонах. Таковую сетку в выпуклом четырехугольнике для краткости назовем “квазирегулярной”. Полученные четырехугольные ячейки, которые полностью расположены внутри области, назовем внутренними. Ячейки, стороны которых расположены около границы области $\delta\Omega$, назовем граничными. Две ячейки называются соседними, если они имеют общую сторону. Для удобства реализации

метода в каждой ячейке области введем локальные координаты

$$y_1 = \frac{(x_1 - x_{1j})}{h_1}, \quad y_2 = \frac{(x_2 - x_{2j})}{h_2}, \quad (2)$$

где (x_{1j}, x_{2j}) — центр j -й ячейки, $j = 1, \dots, N$, $N = m_1 \times m_2$ — количество ячеек, $v(x_1, x_2) = u(y_1, y_2)$. Координаты центра j -й ячейки в данном случае определяются как средние арифметические величины от соответствующих координат вершин четырехугольника. В данной работе при реализации варианта I построения сетки было положено $h_1 = h_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(l_1+l_3)}{2m_1} \cdot \frac{(l_2+l_4)}{2m_2}}$. Опять-таки, если есть веские причины, величины h_1 и h_2 в этом варианте алгоритма можно брать различными. Задача (1) после замены (2) в локальных переменных в ячейке Ω_j примет вид

$$\begin{cases} \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = f(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)), & (y_1, y_2) \in \Omega_j \subset \Omega, \\ u = g(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)), & (y_1, y_2) \in \delta\Omega \cap \delta\Omega_j, \quad j = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (3)$$

где $\delta\Omega_j$ — сторона граничной ячейки, расположенная на границе области.

В каждой j -й ячейке сетки приближенное решение u_{hj} задачи (3) ищем в виде линейной комбинации с неопределенными коэффициентами базисных элементов пространства полиномов четвертой степени от двух переменных. Здесь в качестве базисных элементов ϕ_i ($i = 1, \dots, 15$) взяты мономы:

$$\begin{aligned} u_{hj}(y_1, y_2) = \sum_{i=1}^{15} b_{ij} \phi_i = & b_{1j} + b_{2j}y_1 + b_{3j}y_2 + b_{4j}y_1^2 + b_{5j}y_2^2 + \\ & b_{6j}y_1y_2 + b_{7j}y_1^2y_2 + b_{8j}y_1y_2^2 + b_{9j}y_1^2y_2^2 + b_{10j}y_1^3 + b_{11j}y_2^3 + b_{12j}y_1^3y_2 + \\ & b_{13j}y_1y_2^3 + b_{14j}y_1^4 + b_{15j}y_2^4. \end{aligned} \quad (4)$$

Неизвестные коэффициенты b_{ij} в методе КНН находятся из переопределенной системы уравнений, состоящей в каждой ячейке из уравнений коллокации, условий согласования (глобального решения задачи, искомого в виде кусков, связанных с центром соответствующей им ячейки) на общих сторонах, принадлежащих двум соседним ячейкам, и краевых условий на $\delta\Omega$, если ячейка является граничной [1, 4, 8, 10].

Определим по следующему алгоритму расстановку точек коллокации, записи условий согласования в любой ячейке или краевых условий для граничной ячейки. Поделим ее каждую сторону на четыре равных (“частичных”) отрезка. В середине каждого частичного отрезка запишем условия согласования или, соответственно, краевые условия, если взятая сторона принадлежит внешней границе.

Для расстановки точек коллокации в любой ячейке соединим отрезками прямых расположенные на ее левой стороне точки записи условий согласования (или краевых условий в случае граничной ячейки) с соответствующими точками на ее правой стороне. Затем каждый такой полученный отрезок поделим на четыре равных частичных отрезка. В середине каждого частичного отрезка запишем уравнения коллокации. Сформулированный алгоритм однозначно определяет в каждой ячейке координаты y_1, y_2 точек коллокации, записи условий согласования и краевых условий.

На рисунке 2 изображен фрагмент расчетной области, покрытой квазирегулярной сеткой с четырехугольными ячейками, в которых по описанному выше правилу расставлены точки записи уравнений коллокации, условий согласования и краевых условий. Для краткости изложения этот алгоритм построения сетки и расстановки точек, в которых записываются уравнения приближенной задачи, назовем вариантом I.

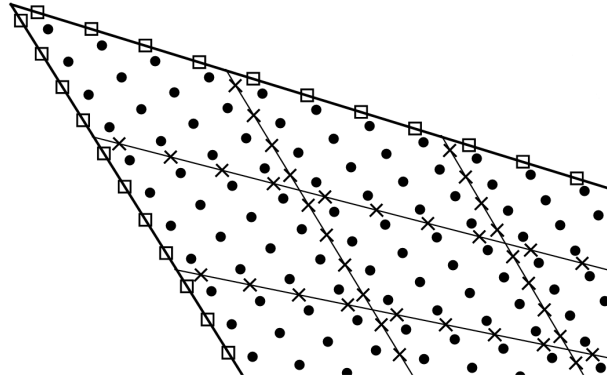


Рис. 2. Фрагмент расчетной области. Здесь • обозначает точки записи уравнений коллокации; × — точки записи условий согласования; □ — точки записи краевых условий

Fig. 2. The fragment of the numerical domain. The symbol • denotes the collocation points; × — the matching points; □ — the points for record of the boundary conditions

Уравнения коллокации в каждой ячейке выписываются в 16 точках коллокации и имеют вид:

$$\frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 u(y_{1c}, y_{2c})}{\partial y_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 u(y_{1c}, y_{2c})}{\partial y_2^2} = f(x_1(y_{1c}, y_{2c}), x_2(y_{1c}, y_{2c})), \quad (5)$$

где (y_{1c}, y_{2c}) , $(c = 1, \dots, 16)$ — точки коллокации.

В качестве условия согласования решения в четырех указанных выше точках согласования на каждой общей стороне между соседними ячейками требуем непрерывность линейной комбинации с весами функции u и ее производной по нормали

$$k_1 \frac{\partial u^+}{\partial n_j} + k_2 u^+ = k_1 \frac{\partial u^-}{\partial n_j} + k_2 u^-. \quad (6)$$

Здесь n_j — внешняя нормаль к границе j -й ячейки, u^+ и u^- — пределы значений функции в точке при ее стремлении изнутри и извне к границе j -й ячейки, соответственно; k_1, k_2 — весовые параметры.

Если сторона ячейки совпадает с некоторым куском границы области, в четырех указанных выше точках на ней выпишем краевые условия

$$k_3 u = k_3 g(x_1, x_2), \quad (7)$$

где k_3 — весовой параметр краевого условия в переопределенной системе уравнений.

В каждой ячейке, объединяя уравнения коллокации, условия согласования и краевые условия (в случае граничных ячеек), относительно неизвестных коэффициентов b_{ij} получим переопределенную СЛАУ вида

$$\sum_{i=1}^{15} B_{li} b_{ij} = F_l, \quad l = 1, \dots, 32, \quad j = 1, \dots, N, \quad (8)$$

которую для краткости назовем “локальной”, поскольку она определяет локальное решение в окрестности начала системы координат в ячейке. Для того, чтобы определить, что понимается под решением этой системы, рассмотрим функционал

$$\Phi = \sum_{l=1}^{32} \left(\sum_{i=1}^{15} B_{li} b_{ij} - F_l \right)^2. \quad (9)$$

Он представляет собой сумму квадратов невязок всех уравнений в ячейке на приближенном решении задачи. Решение системы (8) на каждой итерации находится из условия минимума функционала Φ по коэффициентам b_{ij} , $i = 1, \dots, 15$ [1,8,9,11]. Система уравнений, полученная объединением уравнений во всех ячейках расчетной области (глобальная СЛАУ), решается в итерационном процессе Гаусса–Зейделя. В ней одна “глобальная итерация” состоит из последовательного решения локальных СЛАУ (8) во всех ячейках области. Здесь и далее в условиях согласования значения решения в соседних ячейках брались с предыдущей итерации, если они не были сосчитаны на текущей итерации, или в противном случае их значения с текущей итерации. При построении решения в каждой ячейке матрица системы из 32 уравнений приводится к верхнетреугольному виду ортогональным методом Гивенса [4,9].

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится условие

$$\max_{ij} |b_{ij}^{n+1} - b_{ij}^n| < \epsilon, \quad (10)$$

b_{ij}^n — i -й ($i = 1, \dots, 15$) коэффициент полинома, аппроксимирующего решение в ячейке с номером j на n -й итерации. Величина ϵ — заданная константа, называемая псевдопогрешностью решения. Ее значение выбирается таким, чтобы погрешность решения глобальной СЛАУ была существенно меньше погрешности аппроксимации исходной задачи.

Вариант II. Как уже было отмечено в [4], в случае наличия на границе области точек ее излома желательно изначально построить сетку так, чтобы они оказались на координатных линиях сетки. При решении задачи на последовательности сеток с кратным измельчением ячеек точки излома границы останутся на координатных линиях сетки. Иначе изначально и при дальнейшем измельчении ячеек будут присутствовать маленькие четырехугольные ячейки сетки. Из дальнейшего изложения будет ясно, что наличие таких ячеек зачастую уменьшает точность приближенного решения задачи, а также усложняет алгоритм построения сетки. Сначала одну из сторон четырехугольника расположим на оси x_1 . Впишем заданную область в прямоугольник, чтобы после покрытия его регулярной сеткой с прямоугольными ячейками размера $2h_1 \times 2h_2$, все вершины четырехугольника оказались на координатных линиях сетки. Для этого две противоположные стороны прямоугольника возьмем равными высоте, опущенной на ось x_1 из вершины четырехугольника с

максимальной координатой по оси x_2 . В результате три вершины четырехугольника будут располагаться на горизонтальных координатных линиях сетки. Чтобы поместить оставшуюся четвертую вершину на вертикальную координатную линию, распорядимся величинами шага сетки $2h_1$ и длиной стороны прямоугольника, лежащей на оси x_1 (рис. 3). В данной работе при численном решении задачи применялся многосеточный комплекс, в котором самая грубая сетка бралась размера 5×5 .

Прямоугольные ячейки, которые полностью расположены внутри области назовем внутренними (рис. 3, ячейки 2, 3, 7, 8, 11, 12). Ячейки, пересеченные границей области, для краткости здесь назовем граничными (рис. 3, ячейки 1, 4, 5, 6, 9, 10, 13-20). Стоит отметить, что у внутренней прямоугольной ячейки одна из сторон может полностью совпадать с границей области $\delta\Omega$ (рис. 3, ячейки 2, 3). Часть граничной ячейки, отсеченную границей и лежащую внутри области, назовем нерегулярной ячейкой (далее, н-ячейка). Н-ячейка может быть либо треугольного вида (далее треугольная ячейка (рис. 3, ячейки 5, 14, 18, 20)), либо четырехугольного вида (далее четырехугольная ячейка (рис. 3, ячейки 1, 4, 6, 9, 10, 13, 15-17, 19)). При этом часть граничной ячейки, лежащую вне области, назовем законтурной. Прямоугольную ячейку сетки, от которой границей области отсечена н-ячейка, назовем коротко материнской. Назовем внешней стороной н-ячейки часть границы $\delta\Omega$ области Ω , которая оказалась внутри граничной ячейки. Стороны и отсеченные границей части сторон граничной ячейки, расположенные внутри области, назовем внутренними сторонами н-ячейки. Решение в прямоугольных ячейках, которые не содержат какую-либо часть области Ω , естественно, не строим.

Для удобства реализации метода, как и выше, по формулам (2) введем локальные координаты в каждой ячейке области. Координаты центра ячейки в данном случае определяются как средние арифметические величины от соответствующих координат вершин прямоугольной ячейки (для граничных ячеек — вершин материнской ячейки).

Если в расчетной сетке имеется или появилась после измельчения шагов сетки маленькая треугольная н-ячейка, то глобальная СЛАУ задачи, как правило, становится хуже обусловленной. Такие ячейки могут быть причиной низкой точности приближенного решения задачи на содержащей их сетке. Чтобы избежать эту неприятность, здесь используется идея присоединения таких треугольных н-ячеек к соседним четырехугольным ячейкам (рис. 3). Предлагается треугольную н-ячейку всегда присоединять к той соседней четырехугольной ячейке, с которой она имеет наибольшей длины сторону среди ее сторон, общих с другими соседними четырехугольными ячейками. Если треугольная н-ячейка имеет одинаковую длину с двумя общими сторонами соседних с ней ячеек, то ее присоединяем к ячейке с наименьшим индексом j . Через эту сторону в присоединенную треугольную(ые) н-ячейку(ки) продолжается решение из ячейки, к которой ее (их) присоединили. При этом согласно сформулированному правилу к ячейке могут быть присоединены одна, две или три малые треугольные н-ячейки. В этом случае внешняя сторона объединенной ячейки состоит из внешних сторон всех объединенных в ней ячеек. На этой внешней стороне расставляются столько точек для записи краевых условий, чтобы в сумме число точек записи уравнений коллокации, условий согласования и краевых условий в объединенной ячейке было равно 32. Эти краевые условия включаются в переопределенную систему уравнений этой ячейки. Для простоты реализации ва-

рианта II, считаем, что центр объединенной ячейки совпадает с центром исходной ячейки, к которой присоединяли ячейку(ки). Объединенную ячейку также считаем н-ячейкой.

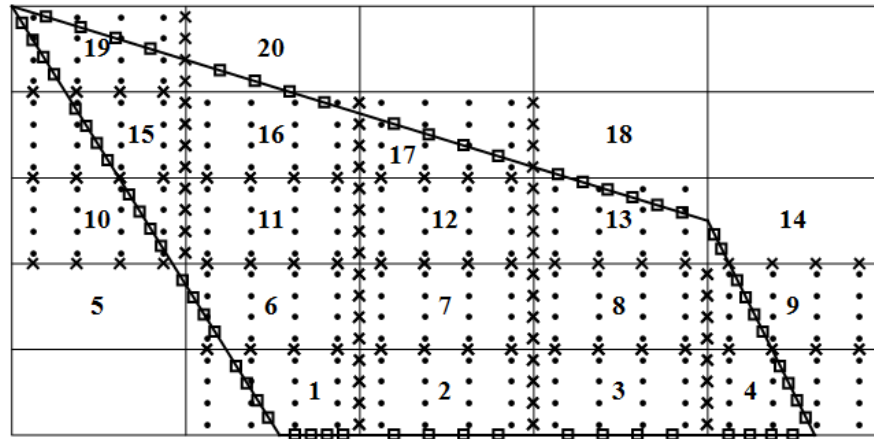


Рис. 3. Расчетная область (размер сетки 5×5). Здесь • обозначает точки записи уравнений коллокации; $\times$ — точки записи условий согласования; $\square$ — точки записи краевых условий. Треугольная н-ячейка 5 присоединяется к ячейке 6, ячейки 14 и 18 к ячейке 13, ячейка 20 к ячейке 16

Fig. 3. The numerical domain (the size of grid 5×5). The symbol • denotes the collocation points; $\times$ — the matching points; $\square$ — the points for record of the boundary conditions. The triangle irregular cell number 5 joins to cell number 6, the cells with numbers 14 and 18 join to cell number 13, the cell number 20 joins to cell number 16

Левую и правую стороны всех прямоугольных ячеек (в случае граничных ячеек — левую и правую стороны материнской ячейки (для объединенной н-ячейки — левую и правую стороны исходной ячейки, к которой присоединяли н-ячейку(ки))) поделим на четыре равных отрезка. Каждый отрезок прямой, соединяющий соответствующие середины этих отрезков, поделим на четыре равных частичных отрезка. Середину каждого такого частичного отрезка возьмем в качестве точки коллокации (всего 16 точек коллокации в каждой ячейке, рис. 3), в которой запишем уравнение коллокации.

Если у ячейки есть соседняя ячейка, то их общую сторону (в случае граничных ячеек — общую сторону материнской ячейки) поделим на четыре равных отрезка. В середине каждого отрезка запишем условия согласования (рис. 3). Очевидно, что в некоторых граничных н-ячейках точки для записи уравнений коллокации или условий согласования могут быть вне области Ω . Чтобы такой подход был применим, как и в случае других численных методов, предполагается, что решаемое уравнение справедливо не только в расчетной области, но и в малой окрестности ее границы.

Если н-ячейка или прямоугольная внутренняя ячейка имеет три соседние ячейки, то ее внешнюю сторону разобьем на пять равных отрезков. В концах второго и четвертого отрезков запишем краевые условия (равномерная расстановка четырех точек на отрезке), (рис. 3, прямоугольные внутренние ячейки 2, 3; н-ячейки 6, 9, 10, 15, 16, 17). Если внешняя сторона состоит из двух частей, то на каждой ее части равномерно расставим по две точки для записи краевых условий. Если одна из

этих частей имеет линейный размер меньше, чем $\sqrt{h_1 h_2}$, тогда в середине этой части внешней стороны записываем одно краевое условие, а на другой части внешней стороны аналогично равномерно расставим три точки для записи краевых условий.

Если n -ячейка имеет две соседние ячейки, являясь при этом треугольной (это, согласно изложенному выше, возможно только в том случае, если она объединенная), то на внешней стороне этой ячейки равномерно расставим восемь точек для записи краевых условий. Также возможен случай, когда n -ячейка является четырехугольной. Тогда внешняя сторона этой n -ячейки состоит из двух частей, поэтому на каждой такой части равномерно расставим по четыре точки для записи краевых условий (рис. 3, n -ячейки 1, 4, 19). Если одна из этих частей имеет линейный размер меньше, чем $\sqrt{h_1 h_2}$, тогда на этой части внешней стороны равномерно расставим две точки для записи краевых условий, а на другой шесть (рис. 3, n -ячейка 13).

Если треугольная n -ячейка имеет только одну соседнюю ячейку, то на каждой части ее внешней стороны (состоящей из двух частей), равномерно расставим по шесть точек для записи краевых условий. Если четырехугольная n -ячейка имеет только одну соседнюю ячейку, то на каждой части ее внешней стороны (состоящей из трех частей), равномерно расставим по четыре точки для записи краевых условий. Если одна из этих частей имеет линейный размер меньше, чем $\sqrt{h_1 h_2}$, тогда на этой части внешней стороны равномерно расставим две точки для записи краевых условий, а на других двух по пять.

На рисунке 3 изображена расчетная область, покрытая сеткой с прямоугольными ячейками. В получившихся расчетных ячейках по сформулированным правилам расставлены точки записи уравнений коллокации, условий согласования и краевых условий.

1.2. Численные эксперименты и результаты расчетов

В численных экспериментах на сходимость приближенного решения на последовательности сеток при измельчении шагов сетки вдвое рассматривалась задача (1) в четырехугольных областях. В качестве тестовых решений здесь брались аналитические функции, подстановкой которых в уравнения подбирались их правая часть (в том числе в пункте 2) для того, чтобы эти функции удовлетворяли рассматриваемым дифференциальным уравнениям. Краевые условия брались из значений тестовых функций и их производных на $\delta\Omega$. Во всех представленных ниже таблицах в этом пункте приведены значения погрешности приближенного решения в равномерной норме

$$\|u - u_h\|_c = \max_{j=1, \dots, N} \max_{s=1, \dots, L_j} |u(x_{1s}, x_{2s}) - u_{hj}(x_{1s}, x_{2s})|, \quad (11)$$

где N — количество расчетных ячеек в области, L_j — количество равномерно распределенных точек (x_{1s}, x_{2s}) , взятых в j -й ячейке для подсчета в них погрешности, u — точное решение задачи (1), u_h — приближенное решение в области Ω , u_{hj} — приближенное решение в j -й ячейке. Порядок сходимости численного решения определяется следующим образом:

$$\log_2 \frac{E_{N_1/2, N_2/2}}{E_{N_1, N_2}}, \quad (12)$$

где E_{N_1, N_2} — значение ее абсолютной погрешности на сетке размера $N = N_1 \times N_2$, $E_{N_1/2, N_2/2}$ — значение ее абсолютной погрешности на сетке $N_1/2 \times N_2/2$. В случае варианта II порядок сходимости численного решения вычислялся по формуле (12) формально. Так как в случае нерегулярной сетки, строго говоря, определение порядка сходимости отсутствует. Тем не менее величина (12) показывает порядок малости погрешности решения относительно малой величины шага сетки. В численных экспериментах в одном случае были взяты следующие значения параметров: $L_j = 100$, $\epsilon = 10^{-14}$, $k_1 = 1$, $k_2 = 5h$ в случае варианта I и $k_2 = 5(|\cos(\alpha)|h_1 + |\sin(\alpha)|h_2)$, где $n_j = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ — вектор внешней нормали к стороне j -й ячейки в случае варианта II, $k_3 = 1.5$. Во всех численных экспериментах здесь в начальном приближении решения взяты $b_{ij} = 0.4$, где $i = 1, \dots, 15$, $j = 1, \dots, N$. Обозначим через N_{iter} — количество итераций. В расчетах использовано комбинированное применение операции продолжения на многосеточном комплексе в методе Федоренко и на промежуточных сетках комплекса метода ускорения сходимости итерационного процесса, основанного на подпространствах Крылова [11–13].

Из приведенных таблиц 1 – 3 видно, что численное решение имеет порядок сходимости не хуже четвертого. В рамках численного эксперимента с тестовым решением $u(x_1, x_2) = \sin(x_1) + \sin(x_2)$ в области с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0.8, 0.5)$, $(0.2, 0.8)$, на сетке 80×80 была достигнута точность решения $1.77 \cdot 10^{-12}$ за 729 итераций в случае применения варианта I. Решение в случае применения варианта II на сетке 80×80 получено с точностью $2.90 \cdot 10^{-13}$, для ее достижения потребовалось 613 итераций. Следует отметить, что приближенная задача Дирихле для уравнения Пуассона в методе КНН достаточно хорошо обусловлена [14]. В результате многих численных экспериментов с вариантом I установлено, что в случае хорошо обусловленной приближенной задачи наблюдается сходимость численного решения даже при появлении таких вытянутых ячеек, наличие которых в случае плохо обусловленной задачи приводит к расходимости численного решения. Однако в последнем случае в численных экспериментах по варианту II метода КНН нередко эффективно строилось решение приближенной задачи. Здесь в качестве плохо обусловленных рассматривались приближенные задачи для бигармонического уравнения. Некоторые характерные сравнительные результаты численных экспериментов приведены далее.

Таблица 1. Результаты численного эксперимента с тестовым решением $u(x_1, x_2) = e^{x_1} + e^{x_2}$ в четырехугольной области с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0.8, 0.3)$, $(-0.3, 0.9)$

Table 1. The results of the numerical experiment with the test solution $u(x_1, x_2) = e^{x_1} + e^{x_2}$ in the quadrangular domain with the following vertices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0.8, 0.3)$, $(-0.3, 0.9)$

$N_1 \times N_2$	Version I			Version II		
	E_{N_1, N_2}	N_{iter}	$\log_2 \frac{E_{N_1/2, N_2/2}}{E_{N_1, N_2}}$	E_{N_1, N_2}	N_{iter}	$\log_2 \frac{E_{N_1/2, N_2/2}}{E_{N_1, N_2}}$
10×10	$8.19 \cdot 10^{-9}$	63	—	$4.93 \cdot 10^{-8}$	160	—
20×20	$3.41 \cdot 10^{-10}$	120	4.58	$3.95 \cdot 10^{-9}$	162	3.64
40×40	$1.75 \cdot 10^{-11}$	321	4.28	$1.47 \cdot 10^{-10}$	239	4.74
80×80	$3.92 \cdot 10^{-13}$	729	5.48	$5.61 \cdot 10^{-12}$	908	4.71

Таблица 2. Результаты численного эксперимента с тестовым решением $u(x_1, x_2) = e^{10x_1} + e^{10x_2} + e^{5x_1+5x_2}$, имеющим большие градиенты в четырехугольной области с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1.2, 0.3)$, $(0.9, 0.7)$. Здесь применялся вариант I при $\epsilon = 0.5 \cdot 10^{-10}$

Table 2. The results of the numerical experiment with the test solution $u(x_1, x_2) = e^{10x_1} + e^{10x_2} + e^{5x_1+5x_2}$, that has large gradients in the quadrangular domain with the following vertices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1.2, 0.3)$, $(0.9, 0.7)$. The I version was used here at $\epsilon = 0.5 \cdot 10^{-10}$

$N_1 \times N_2$	E_{N_1, N_2}	N_{iter}	$\log_2 \frac{E_{N_1/2, N_2/2}}{E_{N_1, N_2}}$
10×10	$1.55 \cdot 10^1$	68	—
20×20	$8.65 \cdot 10^{-2}$	123	4.16
40×40	$5.03 \cdot 10^{-3}$	354	4.10
80×80	$3.14 \cdot 10^{-4}$	747	4.00

Таблица 3. Результаты численного эксперимента с тестовым решением $u(x_1, x_2) = \cos(x_1) + \cos(x_2)$ в четырехугольной области с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0.8, 8.0)$, $(-0.3, 10.0)$ при применении варианта I

Table 3. The results of the numerical experiment with the test solution $u(x_1, x_2) = \cos(x_1) + \cos(x_2)$ in the quadrangular domain with the following vertices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0.8, 8.0)$, $(-0.3, 10.0)$ with the use of I version

$N_1 \times N_2$	E_{N_1, N_2}	N_{iter}	$\log_2 \frac{E_{N_1/2, N_2/2}}{E_{N_1, N_2}}$
5×25	$4.04 \cdot 10^{-6}$	81	—
10×50	$1.63 \cdot 10^{-7}$	89	4.63
20×100	$7.32 \cdot 10^{-9}$	226	4.47

2. Бигармоническое уравнение

2.1. Постановка задачи и описание метода

Пусть требуется определить напряженно-деформированное состояние (НДС) упругой, изотропной выпуклой четырехугольной пластины, закрепленной на краях и находящейся под действием поперечных нагрузок произвольного вида. При этом нагрузки такие, что материал деформированной пластины остается упругим. Пластина предполагается тонкой, что позволяет свести трехмерную задачу теории упругости к двумерной задаче теории тонких пластин. Следуя Тимошенко [15], разрешающую систему уравнений запишем в перемещениях, определив которые можно будет полностью восстановить НДС пластины. В этом случае величины прогибов пластины определяются из решения бигармонического уравнения

$$\frac{\partial^4 w(x_1, x_2)}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x_1, x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w(x_1, x_2)}{\partial x_2^4} = \frac{q(x_1, x_2)}{D}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (13)$$

В (13) $w(x_1, x_2)$ — прогиб срединной поверхности пластины, $q(x_1, x_2)$ — поперечная нагрузка, $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ — жесткость пластины при изгибе, h — толщина пластины, E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона изотропного материала пластины, четырехугольная область Ω — проекция срединной поверхности пластины

ны на плоскость (x_1, x_2) . На каждом куске границы (края) пластины может быть задано одно из следующих условий закрепления:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{— защемленный край;} \quad (14)$$

$$w = 0, \quad M_n w = 0 \quad \text{— шарнирно закрепленный край;} \quad (15)$$

$$M_n w = 0, \quad V_n w = 0 \quad \text{— свободный край.} \quad (16)$$

Здесь и далее n — внешняя нормаль к границе области $\partial\Omega$, M_n — дифференциальный оператор второго порядка, V_n — дифференциальный оператор третьего порядка. Здесь дифференциальные операторы M_n , V_n взяты из [15]. Условие (16) может быть задано только на некоторой части границы, а на оставшейся ее части должны быть заданы другие условия, иначе задача некорректна.

Область Ω покрывается расчетной сеткой с прямоугольными ячейками Ω_j ($j=1, \dots, N$, N — число расчетных ячеек сетки). Далее для численного решения задачи применим алгоритмы, аналогичные описанным выше вариантам I и II с использованием пространства полиномов 4 степени. Алгоритмы, примененные к задаче (13) – (16), будут отличаться от них в записи уравнений дискретной задачи.

В каждой ячейке Ω_j делается переход к локальным переменным (y_1, y_2) . Для определения решения w_j в Ω_j на k -й итерации выписываются:

уравнения коллокации

$$\frac{h_2^2}{h_1^2} \frac{\partial^4 w_j^k}{\partial y_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w_j^k}{\partial y_1^2 \partial y_2^2} + \frac{h_1^2}{h_2^2} \frac{\partial^4 w_j^k}{\partial y_2^4} = h_1^2 h_2^2 \frac{q(y_1, y_2)}{D}, \quad (y_1, y_2) \in \Omega_j \quad (17)$$

— требования удовлетворения приближенным решением уравнению (17) в заданных точках коллокации;

условия согласования

$$w_j^k + p_1 \frac{1}{h_n} \frac{\partial w_j^k}{\partial n} = w_{adj} + p_1 \frac{1}{h_n} \frac{\partial w_{adj}}{\partial n}, \quad (y_1, y_2) \in \partial\Omega_j \setminus \partial\Omega, \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 w_j^k}{\partial n^2} + p_2 \frac{1}{h_n} \frac{\partial^3 w_j^k}{\partial n^3} = \frac{\partial^2 w_{adj}}{\partial n^2} + p_2 \frac{1}{h_n} \frac{\partial^3 w_{adj}}{\partial n^3}, \quad (y_1, y_2) \in \partial\Omega_j \setminus \partial\Omega \quad (19)$$

— условия склейки решения w_j с решением в соседней ячейке w_{adj} в точках согласования на общей с соседней ячейкой стороне, где $h_n = h_1$, если направление n совпадает с направлением оси y_1 , и $h_n = h_2$, если направление n совпадает с направлением оси y_2 ;

краевые условия в указанных выше точках записи краевых условий.

В данном случае в каждой ячейке выписывается переопределенная система из 48 уравнений: 16 уравнений коллокации и по два уравнения в каждой точке для записи условий согласования или краевых условий.

2.2. Численные эксперименты

2.2.1. Пластина под специальной нагрузкой

Рассмотрим шарнирно закрепленную на краях прямоугольную пластину размера $d_1 \times d_2$, находящуюся под действием нагрузки q (Па) вида

$$q = 10^5 \sin\left(\frac{\pi x_1}{d_1}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{d_2}\right). \quad (20)$$

В этом случае задача имеет точное аналитическое решение [15]

$$w(x_1, x_2) = \frac{q d_1^4 d_2^4}{\pi^4 D (d_1^2 + d_2^2)^2}. \quad (21)$$

Пусть проекция срединной поверхности пластины на плоскость (x_1, x_2) имеет форму четырехугольной области Ω с вершинами: $(0, 0)$, $(10, 0)$, $(8, 3)$, $(-3, 9)$. Для того, чтобы воспользоваться приведенным аналитическим решением в качестве теста, в численном эксперименте зададим на границе $\delta\Omega$ точные значения функции w (21) и изгибающего момента $M_n w$. Ранее в [5] методом КНН была решена задача для прямоугольной пластины. В расчетах использовались следующие параметры: $d_1 = 13$, $d_2 = 9$ м, $h = 0.1$ м, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0.28$, $\epsilon = 10^{-10}$. Здесь значения параметров p_1 и p_2 в условиях согласования взяты из работы [5]. Для определения порядка сходимости проведены численные эксперименты на последовательности сеток с уменьшением шага сетки вдвое. Для расчета погрешности в каждой расчетной ячейке равномерно распределялись 100 точек. Относительная погрешность численного решения во всей области вычислялась в этих точках по формуле

$$E_{N_1, N_2} = \frac{\max_{x_1, x_2} |w(x_1, x_2) - w_h(x_1, x_2)|}{\max_{x_1, x_2} |w(x_1, x_2)|}, \quad (22)$$

где $w_h(x_1, x_2)$ — приближенное решение, полученное методом КНН, $N = N_1 \times N_2$ — размер сетки. Порядок сходимости решения в данной работе вычислялся по формуле (12). В расчетах, как и выше, использовано комбинированное применение операции продолжения на многосеточном комплексе в методе Федоренко и метода Крылова [11–13].

В таблице 4 приведены результаты численных экспериментов, полученные применением вариантов I и II метода КНН. При измельчении шагов сетки в случае варианта I появляются сильно вытянутые ячейки, из-за чего ухудшается обусловленность глобальной СЛАУ. В итоге уменьшается точность построенного решения. В этих случаях целесообразно использовать для решения задач вариант II.

Вычислим на каждой сетке N_c — количество ячеек, в которых числа обусловленности локальных переопределенных СЛАУ имеют соответственно порядки 10^2 , 10^3 и 10^4 . В таблице 5 приведены значения N_c на последовательности сеток для вариантов I и II. Как ранее было установлено в работе [14], обусловленность глобальной СЛАУ жестко коррелирует с обусловленностью локальных СЛАУ. Поэтому плохой обусловленности локальных СЛАУ соответствует плохая обусловленность глобальной СЛАУ. Из этой таблицы видно, что в случае применения варианта I обусловленность локальных СЛАУ (следовательно, и глобальной СЛАУ) хуже, чем в случае применения варианта II.

Таблица 4. Результаты численного эксперимента при применении вариантов I и II

Table 4. The results of the numerical experiment with the use of I and II versions

$N_1 \times N_2$	Version I			Version II		
	E_{N_1, N_2}	N_{iter}	$\log_2 \frac{E_{N_1/2, N_2/2}}{E_{N_1, N_2}}$	E_{N_1, N_2}	N_{iter}	$\log_2 \frac{E_{N_1/2, N_2/2}}{E_{N_1, N_2}}$
10×10	$1.52 \cdot 10^{-3}$	121	—	$1.78 \cdot 10^{-3}$	253	—
20×20	$5.05 \cdot 10^{-4}$	281	1.58	$1.48 \cdot 10^{-4}$	508	3.58
40×40	$1.45 \cdot 10^{-4}$	721	1.80	$6.81 \cdot 10^{-6}$	996	4.44
80×80	—	—	—	$6.98 \cdot 10^{-7}$	1888	3.28

Таблица 5. Количество ячеек N_c в вариантах I и II метода КНН, локальные СЛАУ в которых имеют числа обусловленности порядка $10^2, 10^3, 10^4$ Table 5. The amount of cells N_c in the I and II versions of CLR method in which local SLAE have the condition numbers of order $10^2, 10^3, 10^4$

$N_1 \times N_2$	N_c with conditionality of order		
	10^2	10^3	10^4
Version I			
10×10	74	26	0
20×20	324	56	20
40×40	548	909	143
80×80	0	6084	316
Version II			
10×10	51	0	0
20×20	188	2	0
40×40	686	52	0
80×80	2718	169	22

Хотя, как это следует из приведенных выше примеров, нередко могут иметь место задачи, для решения которых вариант I может быть эффективен. При этом, когда область близка к прямоугольной, результаты численных экспериментов в вариантах I и II близки друг к другу. Пусть теперь проекция срединной поверхности пластины на плоскость (x_1, x_2) имеет форму четырехугольной области Ω с вершинами: $(0, 0)$, $(10, 0)$, $(9, 10)$, $(1, 10)$. На сетке 80×80 была достигнута точность решения $5.16 \cdot 10^{-5}$ за 1321 итераций в случае применения варианта I. В свою очередь, в случае применения варианта II, на сетке 80×80 была достигнута точность решения $1.02 \cdot 10^{-5}$ за 1452 итераций. Естественно, что могут быть предложены какие-то другие варианты метода КНН, в которых, например, вытянутые четырехугольные ячейки присоединяются к соседним с целью уменьшения обусловленности приближенной задачи [4]. Скорее всего алгоритмы построения расчетной сетки в таких вариантах окажутся сложнее по сравнению с рассмотренными в данной работе. Из полученных результатов видно, что сходимость решения начинается уже на достаточно грубых сетках.

2.2.2. Пластина, защемленная по трем краям, вариант II

Рассмотрим задачу, аналитическое решение которой не известно. Пусть изотропная пластина находится под действием равномерной поперечной нагрузки $q = \text{const}$. Вершины четырехугольника в точках $(0, 0)$, $(10, 0)$, $(8, 8)$, $(3, 8)$, т.е. в данном случае четырехугольник — трапеция. Три края пластины защемлены, а оставшийся край свободен.

Для иллюстрации напряженного состояния пластины используем поведение в области решения задачи величины интенсивности напряжений

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 6\sigma_{xy}^2},$$

$$\sigma_x = -\bar{E}(w_{xx} + \nu w_{yy}), \quad \sigma_y = -\bar{E}(w_{yy} + \nu w_{xx}), \quad \sigma_{xy} = -\bar{E}(w_{xy}), \quad \bar{E} = \frac{E}{1 - \nu^2}. \quad (23)$$

Отметим, что одним из важных преимуществ предложенного варианта метода КНН является то, что легко можно вычислить любые производные полученного численного решения, так как это решение кусочно-полиномиальное.

На рис. 4 показана форма прогиба w и интенсивность напряжений I при параметрах задачи $h = 0.1$ м, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0.28$, $q = 0.1$ МПа, $\epsilon = 10^{-10}$. В расчетах использована сетка 20×20 .

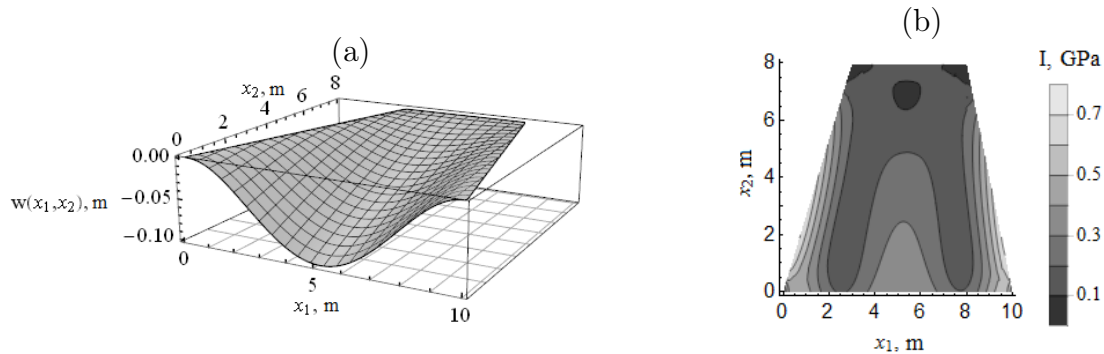


Рис. 4. Величина прогиба w (а) деформированной пластины (три края защемлены, другой край свободен) и интенсивность напряжений I (б)

Fig. 4. The value of the deflection w (a) of the strain plate (the three edges are clamped, another one is free) and stress intensity I (b)

Для наглядности слева на рисунках 4 – 7 по вертикальной оси взят увеличенный масштаб.

2.2.3. Пластина с двумя свободными краями, вариант II

Пример 1. Рассмотрим задачу, аналитическое решение которой не известно. Пусть изотропная пластина находится под действием равномерной поперечной нагрузки $q = \text{const}$. Вершины четырехугольника в точках $(0, 0)$, $(10, 0)$, $(8, 5)$, $(2, 8)$. Два края пластины шарнирно закреплены, а другие два края свободны.

На рис. 5 показана форма прогиба w и интенсивность напряжений I при параметрах задачи $h = 0.1$ м, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0.28$, $q = 30$ КПа, $\epsilon = 10^{-10}$. В расчетах использована сетка 20×20 .

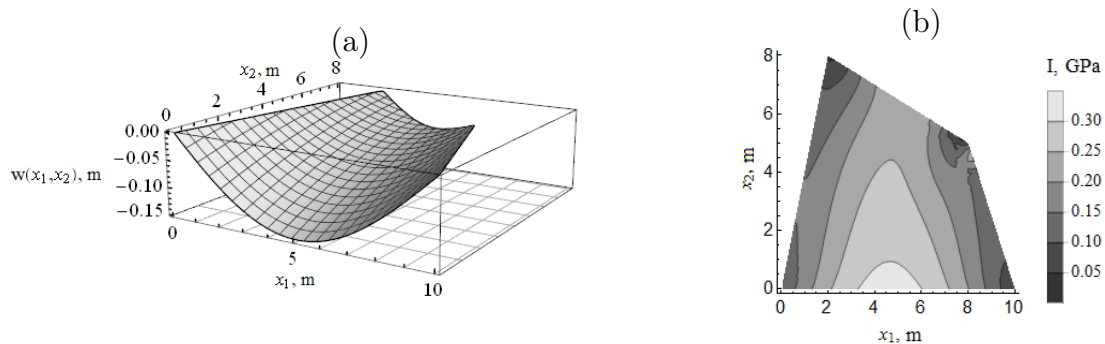


Рис. 5. Величина прогиба w (а) деформированной пластины (два края шарнирно закреплены, другие два края свободны) и интенсивность напряжений I (б)

Fig. 5. The value of the deflection w (a) of the strain plate (the two edges are simply supported, another two are free) and stress intensity I (b)

Пример 2. Рассмотрим аналогичный эксперимент, когда два края защемлены, а два другие края свободны. Очевидно, что в этом случае прогиб будет меньше (рис. 6), чем в предыдущем случае.

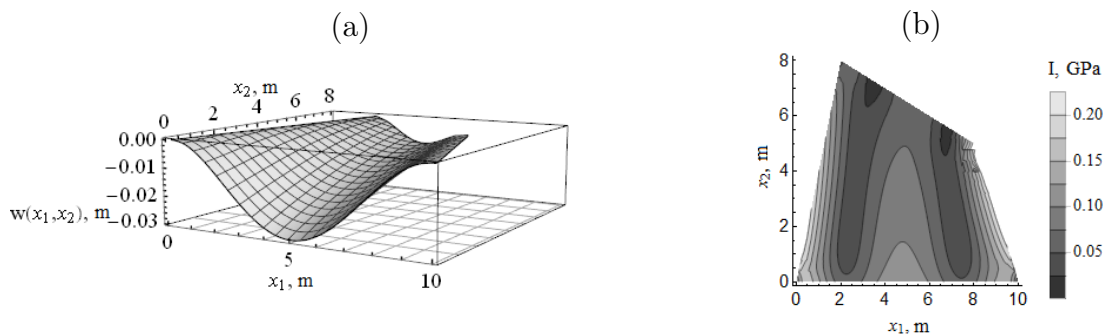


Рис. 6. Величина прогиба w (а) деформированной пластины (два края защемлены, а другие два края свободны) и интенсивность напряжений I (б)

Fig. 6. The value of the deflection w (a) of the strain plate (the two edges are clamped, another two are free) and stress intensity I (b)

Пример 3. Теперь рассмотрим эксперимент в той же области, но нагрузка теперь $q = 3$ КПа, два соседних края шарнирно закреплены, а два других соседних края свободны. В этом случае задача хуже обусловлена, чем в предыдущих случаях. Поэтому потребовалось больше итераций, чтобы итерационный процесс сошелся при том же значении $\epsilon = 10^{-10}$, что и в предыдущих случаях. На рис. 7 показана форма прогиба w и интенсивность напряжений I при параметрах задачи $h = 0.1$ м, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0.28$. В расчетах использована сетка 10×10 .

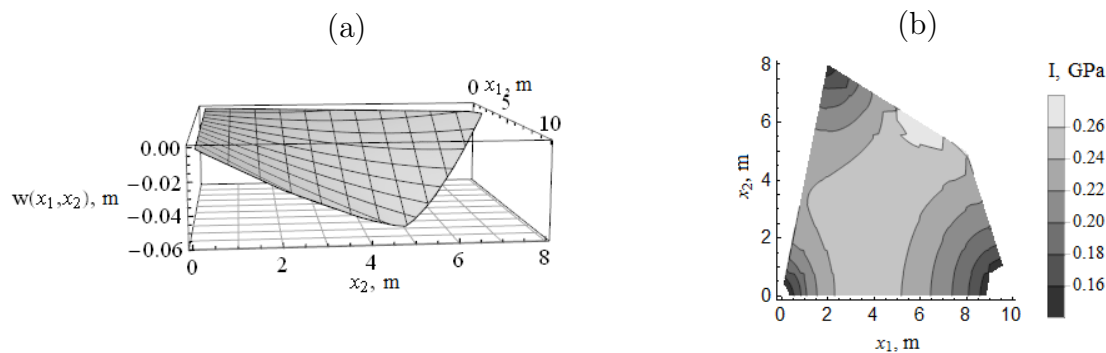


Рис. 7. Величина прогиба w (а) деформированной пластины (два соседних края шарнирно закреплены, другие два соседних края свободны) и интенсивность напряжений I (б)

Fig. 7. The value of the deflection w (a) of the strain plate (the two adjacent edges are clamped, another two are free) and stress intensity I (b)

Заключение

В представленной работе реализованы два различных подхода к построению вариантов метода КНН решения краевых задач для PDE в четырехугольных выпуклых областях. Показано, что приближенные решения задач, полученные применением этих вариантов, сходятся с повышенным порядком, а в случаях тестовых численных экспериментов они с высокой точностью совпадают с известными решениями. Важным обстоятельством является наличие кусочно-аналитического решения задачи в методе КНН, которое не столь жестко, как в некоторых других методах, связано с формой ячейки расчетной сетки и с конфигурацией узлов сетки. Это позволяет внутри области брать регулярную сетку, а на границе относительно просто использовать “одинарный слой” n -ячеек. Кроме того, регулярность сетки внутри области существенно упрощает программную реализацию решения приближенной задачи, например, в сравнении со случаем, когда нужно запрограммировать и реализовать для каждой ячейки поиск соседних ячеек на нерегулярной сетке. Последнее приводит к увеличению программы и времени решения задачи на ЭВМ.

Установлено, что обусловленность приближенной задачи зависит прежде всего от обусловленности дифференциальной задачи, которую она аппроксимирует, от геометрии области и существенно от способа построения расчетной сетки. В конечном итоге от указанных факторов зависит возможность эффективного численного решения методом КНН краевых задач для уравнений с частными производными. Как показали численные эксперименты, с применением варианта II алгоритма построения сетки за счет нового подхода построения сетки и присоединения треугольных n -ячеек к соседним ячейкам почти всегда удавалось уменьшить обусловленность СЛАУ приближенной задачи по сравнению со случаем применения варианта I. Поэтому для хорошо обусловленных задач предпочтительным является вариант I ввиду его простоты, а для плохо обусловленных задач рекомендуется применять вариант II.

Показанная здесь возможность решать задачи теории упругости с повышенной точностью в неканонических областях имеет самостоятельное прикладное значение.

С другой стороны, проделанная работа может рассматриваться как методическая с точки зрения поиска эффективных и достаточно просто реализуемых алгоритмов решения с повышенной точностью PDE в неканонических областях с более сложными границами, состоящими из сочетания криволинейных и полигональных участков. Скорее всего, в этом случае будет эффективно сочетание разных подходов, которые проверялись в [4], в данной работе и, возможно, появятся в ходе дальнейшего поиска.

Авторы выражают благодарность Идимешеву С.В. за интерес, проявленный к данной работе, и ее полезное обсуждение.

Список литературы / References

- [1] Слепцов А. Г., “Коллокационно-сеточное решение эллиптических краевых задач”, *Моделирование в механике*, **5(22)**:2 (1991), 101–126; [Sleptsov A. G., “Kollokatsionno-setochnoe resheniya ellepticheskikh zadach”, *Modelirovanie v mekhanike*, **5(22)**:2 (1991), 101–126, (in Russian).]
- [2] Слепцов А. Г., Шокин Ю. И., “Адаптивный проекционно-сеточный метод для эллиптических задач”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **37**:5 (1997), 572–586; English transl.: Sleptsov A. G., Shokin Yu. I., “An adaptive grid-projection method for elliptic problems”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **37** (1997), 558–571.
- [3] Беляев В. В., Шапеев В. П., “Метод коллокаций и наименьших квадратов на адаптивных сетках в области с криволинейной границей”, *Вычислительные технологии*, **5**:4 (2000), 12–21; [Belyaev V. V., Shapeev V. P., “Metod kollokatsiy i naimenshikh kvadratov na adaptivnykh setkakh v oblasti s krivolineinoy granitse”, *Vychislitelnye tekhnologii*, **5**:4 (2000), 12–21, (in Russian).]
- [4] Шапеев В. П., Беляев В. А., “Варианты метода коллокации и наименьших невязок повышенной точности в области с криволинейной границей”, *Вычислительные технологии*, **21**:5 (2016), 95–110; [Shapeev V. P., Belyaev V. A., “Varianty metoda kollokatsiy i naimenshikh nevyazok povushennoy tochnosti v oblasti s krivolineinoy granitse”, *Vychislitelnye tekhnologii*, **21**:5 (2016), 95–110, (in Russian).]
- [5] Голушко С. К., Идимешев С. В., Шапеев В. П., “Метод коллокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин”, *Вычислительные технологии*, **18**:6 (2013), 31–43; [Golushko S. K., Idimeshev S. V., Shapeev V. P., “Metod kollokatsiy i naimenshikh nevyazok v prilozhenii k zadacham mekhaniki izotropnykh plastin”, *Vychislitelnye tekhnologii*, **18**:6 (2013), 31–43, (in Russian).]
- [6] Семин Л. Г., Слепцов А. Г., Шапеев В. П., “Метод коллокаций-наименьших квадратов для уравнений Стокса”, *Вычисл. технологии*, **1**:2 (1996), 90–98; [Semin L. G., Sleptsov A. G., Shapeev V. P., “Metod kollokatsiy-naimenshikh kvadratov dlya uravneniy Stoksa”, *Vychislitelnye tekhnologii*, **1**:2 (1996), 90–98, (in Russian).]
- [7] Исаев В. И., Шапеев В. П., “Развитие метода коллокаций и наименьших квадратов”, *Труды ИММ УрО РАН*, **14**:1 (2008), 41–60; English transl.: Isaev V. I., Shapeev V. P., “Development of the collocations and least squares method”, *Proc. Inst. Math. Mech.*, **261** (2008), 87–106.
- [8] Исаев В. И., Шапеев В. П., “Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнений Навье–Стокса”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:10 (2010), 1758–1770; English transl.: Isaev V. I., Shapeev V. P., “High-accuracy versions of the collocations and least squares method for the numerical solution of the Navier–Stokes equations”, *Comput. Math. and Math. Phys.*, **50** (2010), 1670–1681.
- [9] Шапеев В. П., Ворожцов Е. В., Исаев В. И., Идимешев С. В., “Метод коллокаций и наименьших невязок для трехмерных уравнений Навье–Стокса”, *Вычислит. методы и программирование*, **14** (2013), 306–322; [Shapeev V. P., Vorozhtsov E. V., Isaev V. I., Idimeshev S. V., “Metod kollokatsiy i naimenshikh nevyazok dlya trekhmernykh

- uravneniy Navie–Stoksa”, *Vychislitelnye metody i programmirovaniye*, **14** (2013), 306–322, (in Russian).]
- [10] Shapeev V., “Collocation and least residuals method and its applications”, *EPJ Web of Conferences*, **108**:01009 DOI: 10.1051/epjconf/201610801009 (2016).
- [11] Ворожцов Е. В., Шапеев В. П., “О комбинировании способов ускорения сходимости итерационных процессов при численном решении уравнений Навье–Стокса”, *Вычислит. методы и программирование*, **18** (2017), 80–102; [Vorozhtsov E. V., Shapeev V. P., “O kombinirovaniy sposobov uskoreniya iteratsionnykh processov pri chislennom reshenii uravneniy Navie–Stoksa”, *Vychislitelnye metody i programmirovaniye*, **18** (2017), 80–102, (in Russian).]
- [12] Слепцов А. Г., “Об ускорении сходимости линейных итераций И”, *Моделирование в механике*, **3(20)**:5 (1989), 118–125; [Sleptsov A. G., “Ob uskorenii skhodimosti lineinykh iteratsiy И”, *Modelirovaniye v mekhanike*, **3(20)**:5 (1989), 118–125, (in Russian).]
- [13] Saad Y., *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems*, Manchester University Press, Manchester, 1991.
- [14] Исаев В. И., Шапеев В. П., Еремин С. А., “Исследование свойств метода коллокации и наименьших квадратов решения краевых задач для уравнения Пуассона и уравнений Навье–Стокса”, *Вычислительные технологии*, **12**:3 (2007), 1–19; [Isaev V. I., Shapeev V. P., Eremin S. A., “Issledovanie svoystv metoda kollokatsii i naimenshih kvadratov resheniya kraevykh zadach dlya uravneniya Puassona i uravneniy Navie–Stoksa”, *Vychislitelnye tekhnologii*, **12**:3 (2007), 1–19, (in Russian).]
- [15] Timoshenko S. P. Woinowsky-Krieger S., *Theory of Plates and Shells*, 2nd edn., McGraw-Hill Book Company, 1959.

Belyaev V. A., Shapeev V. P., "Versions of the Collocation and Least Residuals Method for Solving Problems of Mathematical Physics in the Convex Quadrangular Domains", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:5 (2017), 629–648.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-629-648

Abstract. The new versions of the collocations and least residuals (CLR) method of high-order accuracy are proposed and implemented for the numerical solution of the boundary value problems for PDE in the convex quadrangular domains. Their implementation and numerical experiments are performed by the examples of solving the biharmonic and Poisson equations. The solution of the biharmonic equation is used for simulation of the stress-strain state of an isotropic plate under the action of the transverse load. Differential problems are projected into the space of fourth-degree polynomials by the CLR method. The boundary conditions for the approximate solution are put down exactly on the boundary of the computational domain. The versions of the CLR method are implemented on the grids, which are constructed by two different ways. In the first version, a “quasiregular” grid is constructed in the domain, the extreme lines of this grid coincide with the boundaries of the domain. In the second version, the domain is initially covered by a regular grid with rectangular cells. Herewith, the collocation and matching points that are situated outside the domain are used for approximation of the differential equations in the boundary cells that had been crossed by the boundary. In addition the “small” irregular triangular cells that had been cut off by the domain boundary from rectangular cells of the initial regular grid are joined to adjacent quadrangular cells. This technique allowed to essentially reduce the conditionality of the system of linear algebraic equations of the approximate problem in comparison with the case when small irregular cells together with other cells were used as independent ones for constructing an approximate solution of the problem. It is shown that the approximate solution of problems converges with high order and matches with high accuracy with the analytical solution of the test problems in the case of the known solution in numerical experiments on the convergence of the solution of various problems on a sequence of grids.

Keywords: collocations and least residuals method, boundary value problem, non-canonical domain, irregular grid, high order approximation, Poisson’s equation, biharmonic equation

On the authors:

Vasily A. Belyaev, orcid.org/0000-0001-5901-2880,
Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
4/1 Institutskaya str., Novosibirsk, 630090, Russia,
e-mail: belyaevasily@mail.ru

Vasily P. Shapeev, orcid.org/0000-0001-6761-7273, Doctor of physical and mathematical sciences, professor,
Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
4/1 Institutskaya str., Novosibirsk, 630090, Russia,
Novosibirsk National Research University, 2 Pirogov str., Novosibirsk 630090, Russia,
e-mail: vshapeev@ngs.ru