Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, № 5 (2017), с. 649–654
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 5 (2017), pp. 649–654

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-649-654

УДК 517.9

Семейство негрубых циклов в системе двух связанных генераторов с запаздыванием

Кащенко А. А.

получена 15 июня 2017

Аннотация. В данной работе рассматривается нелокальная динамика модели двух связанных генераторов с запаздывающей обратной связью. Эта модель имеет вид системы двух дифференциальных уравнений с запаздыванием. Функция обратной связи является нелинейной, финитной и гладкой. Главным предположением в задаче является то, что связь между генераторами достаточно малая. Асимптотическими методами исследуется существование релаксационных периодических решений данной системы. Для этого в фазовом пространстве исходной системы выделяется специальное множество. Затем находится асимптотика решений данной системы с начальными условиями из этого множества. С помощью этой асимптотики строится специальное отображение, описывающее в главном динамику исходной задачи. Доказывается, что все решения данного отображения являются негрубыми циклами периода два. В результате удается сформулировать условия на параметр связи, при выполнении которых исходная система имеет двупараметрическое семейство негрубых неоднородных релаксационных периодических асимптотических по невязке решений.

Ключевые слова: большой параметр, релаксационное колебание, периодическое решение, асимптотика, запаздывание

Для цитирования: Кащенко А. А., "Семейство негрубых циклов в системе двух связанных генераторов с запаздыванием", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:5 (2017), 649–654.

Об авторах:
Кащенко Александра Андреевна, orcid.org/0000-0003-3823-9351, канд. физ.-мат. наук,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003, Россия, e-mail: a.kashchenko@uniyar.ac.ru

Благодарности:
Исследование выполнено в рамках государственного задания, работа №1.6074.2017/П220.

Введение

Рассмотрим дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$\dot{u} + u = \lambda F(u(t-T)). \tag{1}$$

Здесь u — скалярная функция, параметр запаздывания T и коэффициент λ положительны, а $F(u)$ — некоторая нелинейная функция. Предполагаем, что функция $F(u)$ является финитной, то есть для некоторого $p > 0$ имеет место равенство

$$F(u) = \begin{cases} f(u), & |u| < p, \\ 0, & |u| \geq p. \end{cases}$$

Уравнения такого вида возникают в электротехнике [1–3] и радиофизике [4, 5].

Будем предполагать, что параметр λ является достаточно большим:

$$\lambda \gg 1. \tag{2}$$

В [6, 7] было показано, что при условии невырожденности при всех достаточно больших $\lambda > 0$ (1) имеет одно или два устойчивых релаксационных периодических решения, и была найдена их асимптотика при $\lambda \to +\infty$.

Рассмотрим систему из двух связанных уравнений вида (1) при условии (2).

$$\begin{aligned} \dot{u_1} + u_1 &= \lambda F(u_1(t-T)) + \gamma(u_2 - u_1), \\ \dot{u_2} + u_2 &= \lambda F(u_2(t-T)) + \gamma(u_1 - u_2), \end{aligned} \tag{3}$$

где параметр связи γ положителен. Эта система, очевидно, имеет однородный ($u_1 \equiv u_2$) релаксационный цикл, однако его устойчивость или неустойчивость определяется величиной параметра γ. В работе [8] было показано, что при некоторых условиях на функцию $f(u)$ при $\gamma = \gamma_1 (\ln \lambda)^{-1}$ (где $\gamma_1 > 0$) при всех достаточно больших $\lambda > 0$ структура аттракторов (3) определяется аттракторами специальных одномерных отображений. Приведены соответствующие формулы для таких отображений и построена асимптотика решений (3). Также было доказано, что для каждого достаточно большого значения $\lambda > 0$ существует $\gamma_1^* > 0$ такое, что при всех $\gamma_1 > \gamma_1^*$ однородное периодическое релаксационные решение (3) будет устойчивым.

В данной работе исследуется нелокальная динамика системы (3) при условии

$$\gamma = \gamma_1 \lambda^{-\alpha}, \quad \gamma_1 > 0, \quad 1/2 < \alpha < 1. \tag{4}$$

Также предполагается, что функция $f(u)$ гладкая и удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} uf(u) > 0, \quad 0 < |u| < p, \\ f(-p) = f(0) = f(p) = 0, \\ f(u) = const_1 (p-u)^2, \quad 0 < p - u \ll 1, \\ f(u) = const_2 (p+u)^2, \quad 0 < p + u \ll 1. \end{cases} \tag{5}$$

1. Метод исследования

Мы изучаем нелокальную динамику системы (3) при условиях (2), (4), (5) с помощью специального метода большого параметра [9, 10].

Опишем суть данного метода. В фазовом пространстве $C_{[-T,0]}(\mathbb{R}^2)$ исходной системы выбираем множество $S(x)$, зависящее от параметра x. Далее находим асимптотику при $\lambda \to +\infty$ всех решений $u(t, \phi, \lambda) = (u_1(t, \phi, \lambda), u_2(t, \phi, \lambda))^T$ с начальными условиями $u(s, \phi) = \phi(s)$ из множества $S(x)$. Доказываем, что существует значение $\bar{x}$ такое, что каждое решение $u(t, \phi, \lambda)$ через некоторое время $t(\phi, \lambda)$ принадлежит множеству $S(\bar{x})$: $u(s + t(\phi, \lambda), \phi, \lambda) \in S(\bar{x})$. Это означает, что существует оператор последования Π такой, что

$$\Pi(\phi(s)) = u(s + t(\phi, \lambda), \phi), \text{ и } \Pi S(x) \subset S(\bar{x}).$$

По асимптотике решений аналитически получаем зависимость $\bar{x}$ от x в виде $\bar{x} = \psi(x) + o(1)$.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k$ – цикл отображения $\bar{x} = \psi(x)$, причем $|\psi'(x_1) \cdot \ldots \cdot \psi'(x_k)| \neq 1$. Тогда для всех достаточно больших $\lambda > 0$ получаем $\Pi^k(x_1) \in S(x_1)$. Отсюда следует, что оператор Π^k имеет неподвижную точку. Следовательно, существует функция $\phi_*(s) \in S(x_1)$ такая, что $\Pi^k(\phi_*(s)) = \phi_*(s)$. Поэтому решение $u(t, \phi_*, \lambda)$ исходной системы периодическое с периодом $t(\phi_*, \lambda) + t(\Pi(\phi_*), \lambda) + \ldots + t(\Pi^{k-1}(\phi_*), \lambda)$. Данное решение имеет ту же устойчивость, что и цикл $x_1, x_2, \ldots, x_k$ отображения $\bar{x} = \psi(x)$.

Данный метод применялся в работах [11–14].

2. Динамика системы (3) при условиях (2), (4), (5)

Для исследования асимптотики решений (3) применим схему из предыдущего раздела. Определим множество $S(x) \subset C_{[-T,0]}(\mathbb{R}^2)$ начальных условий. Введем обозначения. Пусть параметр k равен 1 или -1, параметр $x \neq 0$, причем $kx > 0$, а для параметра β выполнено неравенство $0 < \beta < \alpha$. Фиксируем значения k, x, β. Множество функций $u_1(t, \beta, x)$, $u_2(t, \beta, x)$, удовлетворяющих условиям

$$|u_1| > p, \quad |u_2| > p, \text{ при } t \in [-T, 0), \tag{6}$$

$$u_1|_{t=0} = kp, \quad u_2|_{t=0} = xp\lambda^\beta, \tag{7}$$

обозначим через $S(x)$.

Тогда при $t \in [0, T]$ выполняются условия $F(u_1(t - T)) \equiv F(u_2(t - T)) \equiv 0$. Следовательно, имеют место формулы

$$u_1(t, \beta, x) = kp(1 + o(1)) \exp(-t), \quad u_2(t, \beta, x) = xp\lambda^\beta(1 + o(1)) \exp(-t).$$

Заметим, что в силу того, что на отрезке $t \in [0, T]$ система (3) имеет вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, то при фиксированных значениях k_0, x_0, β_0 все решения (3) с начальными условиями из класса $S(x_0)$ совпадают при $t \in [0, T]$, и, следовательно, совпадают при всех $t \geq 0$.

При $t \in [T, 2T]$ имеем

$$u_1(t, \beta, x) = \lambda[g(t) + o(1)],$$

$$u_2(t, \beta, x) = xp\lambda^\beta(1 + o(1)) \exp(-t) + \gamma_1\lambda^{1-\alpha}[g_1(t) + o(1)],$$

где

$$g(t) = \int_T^t \exp(s - t) f(kp \exp(T - s)) ds, \quad g_1(t) = \int_T^t \exp(s - t) g(s) ds.$$

Отсюда получаем, что

$$u_1(2T, \beta, x) = \lambda[g(2T) + o(1)],$$

$$u_2(2T, \beta, x) = \begin{cases} xp\lambda^\beta \exp(-2T)[1 + o(1)], \text{ при } 1 - \alpha < \beta < \alpha; \\ \gamma_1\lambda^{1-\alpha}g_1(2T)[1 + o(1)], \text{ при } 0 < \beta < 1 - \alpha; \\ \lambda^{1-\alpha}[xp \exp(-2T) + \gamma_1 g_1(2T) + o(1)], \text{ при } \beta = 1 - \alpha. \end{cases}$$

Из (5) следует, что при $t \in [2T, 3T]$ будут совпадать главные члены асимптотики решений системы (3) и системы

$$\dot{u_1} + u_1 = \gamma_1 \lambda^{-\alpha}(u_2 - u_1), \quad \dot{u_2} + u_2 = \gamma_1 \lambda^{-\alpha}(u_1 - u_2). \tag{8}$$

Следовательно, при $t \in [2T, 3T]$ верны неравенства $|u_1(t,\beta,x)| > p$ и $|u_2(t,\beta,x)| > p$. Пусть t_i $(i = 1, 2)$ — первый момент времени такой, что $t_i > 2T$ и $|u_i(t_i,\beta,x)| = p$. Обозначим $t_0 = \min\{t_1, t_2\}$, $\tilde{t} = t - 2T$. Тогда при $t \in [2T, t_0]$ система (3) имеет вид (8) и верны следующие асимптотические формулы:

$$u_1(t,\beta,x) = \lambda[g(2T) + o(1)]\exp(-\tilde{t}),$$

$$u_2(t,\beta,x) = \begin{cases} xp\lambda^{\beta}\exp(-2T)[1+o(1)]e^{-\tilde{t}}, \text{ при } 1-\alpha < \beta < \alpha; \\ \gamma_1\lambda^{1-\alpha}(g_1(2T) + g(2T)\tilde{t} + o(1))e^{-\tilde{t}}, \text{ при } 0 < \beta < 1-\alpha; \\ \lambda^{1-\alpha}\big(xp\exp(-2T) + \gamma_1(g_1(2T) + g(2T)\tilde{t}) + o(1)\big)e^{-\tilde{t}}, \text{ при } \beta = 1-\alpha. \end{cases}$$

Из данных формул следует, что

$$t_0 = \begin{cases} (\beta + o(1))\ln\lambda, \text{ при } 1-\alpha < \beta < \alpha; \\ (1-\alpha+o(1))\ln\lambda, \text{ при } 0 < \beta \le 1-\alpha. \end{cases}$$

В итоге при $t = t_0$ приходим к равенствам

$$u_2(t_0,\beta,x) = kp, \quad u_1(t_0,\beta,x) = \bar{x}p\lambda^{\bar{\beta}},$$

в которых с точностью до $o(1)$

$$\bar{\beta} = \begin{cases} 1-\beta, \text{ при } 1-\alpha < \beta < \alpha, \\ \alpha, \text{ при } 0 < \beta \le 1-\alpha; \end{cases} \tag{9}$$

$$\bar{x} = \begin{cases} \dfrac{g(2T)}{|x|pe^{-2T}}, \text{ при } 1-\alpha < \beta < \alpha, \\ k[\gamma_1(1-\alpha)\ln\lambda]^{-1}, \text{ при } 0 < \beta \le 1-\alpha. \end{cases} \tag{10}$$

Таким образом, при $t = t_0$ ситуация вернулась к исходной (при $t = 0$) с заменой u_1 на u_2, u_2 на u_1 и заменой параметров β и x соответственно на $\bar{\beta}$ и $\bar{x}$ согласно формулам (9), (10).

При β из интервала $(1-\alpha, \alpha)$ получаем итерационный процесс по параметрам β и x

$$\beta_{n+1} = 1 - \beta_n, \quad x_{n+1} = \frac{g(2T)}{|x_n|pe^{-2T}}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Из равенства (11) следует, что $\beta_{n+2} = \beta_n$ и $x_{n+2} = x_n$. Таким образом, все решения отображения (11) являются негрубыми циклами периода 2. Для исходной системы (3) при всех достаточно больших $\lambda > 0$ можно утверждать существование асимптотических по невязке семейств периодических решений с периодом $T_0(\lambda) = (1 + o(1))\ln\lambda$, у которых значения параметров β и x с точностью до $o(1)$ меняются по закону (11). Выводы о существовании точных периодических решений и об их устойчивости сделать нельзя.

Отметим, что каждая компонента негрубых асимптотических по невязке решений системы (3) один раз на периоде $T_0(\lambda)$ за короткий промежуток времени (порядка $O(1)$) совершает скачок от величины порядка единицы до величины порядка $O(\lambda)$, а остальной промежуток времени убывает по экспоненциальному закону до величины порядка единицы.

3. Выводы

Асимптотическими методами исследована нелокальная динамика системы из двух связанных автогенераторов с нелинейной финитной запаздывающей обратной связью. Показано, что при условиях (4) и (5) при всех достаточно больших $\lambda > 0$ система (3) имеет двупараметрическое семейство негрубых неоднородных релаксационных периодических асимптотических по невязке решений.

Список литературы / References

[1] Kilias T. et al., “Electronic chaos generators-design and applications”, *International journal of electronics*, **79**:6 (1995), 737–753.

[2] Kilias T., Mogel A., Schwarz W., “Generation and application of broadband signals using chaotic electronic systems”, *Nonlinear Dynamics: New Theoretical and Applied Results*, Akademie Verlag, Berlin, 1995, 92–111.

[3] Balachandran B., Kalmar-Nagy T., Gilsinn D. E., *Delay differential equations*, Springer, Berlin, 2009.

[4] Дмитриев А. С., Кислов В. Я., *Стохастические колебания в радиотехнике*, Наука, Москва, 1989; [Dmitriev A. S., Kislov V. Ya., *Stokhasticheskie kolebaniya v radiotekhnike*, Nauka, Moskva, 1989, (in Russian).]

[5] Дмитриев А. С, Кащенко С. А., “Динамика генератора с запаздывающей обратной связью и низкодобротным фильтром второго порядка”, *Радиотехника и электроника*, **34**:12 (1989), 24–39; [Dmitriev A. S., Kaschenko S. A., “Dinamika generatora s zapazdyvayushchey obratnoy svyazyu i nizkodobrotnym filtrom vtorogo poryadka”, *Radiotekhnika i elektronika*, **34**:12 (1989), 24–39, (in Russian).]

[6] Кащенко С. А., “Асимптотика релаксационных колебаний в системах дифференциально-разностных уравнений с финитной нелинейностью. I”, *Дифференциальные уравнения*, **31**:8 (1995), 1330–1339; English transl.: Kaschenko S. A., “Asymptotics of relaxation oscillations in systems of differential-difference equations with a compactly supported nonlinearity. I”, *Differential Equations*, **31**:8 (1995), 1275–1285.

[7] Кащенко С. А., “Асимптотика релаксационных колебаний в системах дифференциально-разностных уравнений с финитной нелинейностью. II”, *Дифференциальные уравнения*, **31**:12 (1995), 1968–1976; English transl.: Kaschenko S. A., “Asymptotics of relaxation oscillations in systems of differential-difference equations with a compactly supported nonlinearity. II”, *Differential Equations*, **31**:12 (1995), 1938–1946.

[8] Кащенко А. А., “Динамика системы из двух простейших автогенераторов с нелинейными финитными обратными связями”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:6 (2016), 841–849; [Kashchenko A. A., “Dynamics of a system of two simplest oscillators with finite non-linear feedbacks”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:6 (2016), 841–849, (in Russian).]

[9] Кащенко С. А., “Исследование методами большого параметра системы нелинейных дифференциально-разностных уравнений, моделирующих задачу хищник — жертва”, *Доклады Академии наук СССР*, **266**:4 (1982), 792–795; English transl.: Kaschenko S. A., “Investigation, by large parameter methods, of a system of nonlinear differential-difference

equations modeling a predator-prey problem", *Soviet Mathematics. Doklady*, **26**:2 (1982), 420–423.

[10] Grigorieva E. V., Kashchenko S. A., "Regular and chaotic pulsations in laser diode with delayed feedback", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **3**:6 (1993), 1515–1528.

[11] Bestehorn M., Grigorieva E. V., Kaschenko S. A., "Spatiotemporal structures in a model with delay and diffusion", *Physical Review E*, **70**:2 (2004), 026202.

[12] Grigorieva E. V., Kashchenko S. A., "Dynamics of spikes in delay coupled semiconductor lasers", *Regular and Chaotic Dynamics*, **15**:2/3 (2010), 319–327.

[13] Kaschenko D. , Kaschenko S., Schwarz W., "Dynamics of First Order Equations with Nonlinear Delayed Feedback", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **22**:8 (2012), 1250184.

[14] Кащенко С. А., "Релаксационные колебания в системе с запаздываниями, моделирующей задачу «хищник–жертва»", *Моделирование и анализ информационных систем*, **20**:1 (2013), 52–98; English transl.: Kaschenko S. A., "Relaxation oscillations in a system with delays modeling the predator-prey problem", *Automatic Control and Computer Sciences*, **49**:7 (2015), 547–581.

Kashchenko A. A., "A Family of Non-rough Cycles in a System of Two Coupled Delayed Generators", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:5 (2017), 649–654.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-649-654

Abstract. In this paper, we consider the nonlocal dynamics of the model of two coupled oscillators with delayed feedback. This model has the form of a system of two differential equations with delay. The feedback function is non-linear, finite and smooth. The main assumption in the problem is that the coupling between the generators is sufficiently small. With the help of asymptotic methods we investigate the existence of relaxation periodic solutions of a given system. For this purpose, a special set is constructed in the phase space of the original system. Then we build an asymptotics of the solutions of the given system with initial conditions from this set. Using this asymptotics, a special mapping is constructed. Dynamics of this map describes the dynamics of the original problem in general. It is proved that all solutions of this mapping are non-rough cycles of period two. As a result, we formulate conditions for the coupling parameter such that the initial system has a two-parameter family of non-rough inhomogeneous relaxation periodic asymptotic (with respect to the residual) solutions.

Keywords: large parameter, relaxation oscillation, periodic solution, asymptotics, delay

On the authors:
Aleksandra A. Kashchenko, orcid.org/0000-0003-3823-9351, PhD,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl, 150003 Russia, e-mail: a.kashchenko@uniyar.ac.ru

Acknowledgments:
This work was supported by State assignment, work No 1.6074.2017/П220.