Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, № 5 (2017), с. 655–670
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 5 (2017), pp. 655–670

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-655-670

УДК 517.95

Конструктивное решение проблемы эллиптичности системы дифференциальных уравнений первого порядка

Балабаев В. Е.

получена 6 февраля 2017

Аннотация. Построены эллиптические системы первого порядка с любым возможным числом неизвестных функций и максимально возможным числом неизвестных, т.е. в общем случае. Эти системы служат основой для изучения свойств любых эллиптических систем первого порядка. Проведенное изучение системы Коши–Римана и ее обобщений привело к выделению целого класса эллиптических систем первого порядка специальной структуры. Важное значение в исследовании этих систем играет интегральное представление их решений. Лишь при помощи конструктивного метода интегральных представлений можно решить ряд проблем в теории эллиптических систем, связанных, в основном, с граничными свойствами решений. Найденное интегральное представление удалось применить также для решения ряда задач, которые трудно решить, если опираться только на неконструктивные методы. Установлены, в частности, аналоги теорем Лиувилля, Вейерштрасса, Коши, Гаусса, Морера, аналог формулы Грина, а также аналог принципа максимума модуля. Используемые матричные операторы позволяют осуществить новое конструктивное построение максимально возможного числа линейно независимых векторных полей на сферах в общем случае любой возможной размерности. Кроме того, построенные операторы позволяют получить конструктивное решение расширенной задачи «о сумме квадратов», известной в алгебре.

Ключевые слова: эллиптические системы, дифференциальные уравнения

Для цитирования: Балабаев В. Е., "Конструктивное решение проблемы эллиптичности системы дифференциальных уравнений первого порядка", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:5 (2017), 655–670.

Об авторе:
Балабаев Владимир Евгеньевич, orcid.org/0000-0001-5349-6917, доктор физ.-мат. наук, профессор
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: balabaev49@mail.ru

Проблема эллиптичности системы дифференциальных уравнений первого порядка хорошо известна. И.Р. Шафаревич сформулировал ее в своей монографии [1, с. 288] в следующем виде.

Дана система дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}=0 \qquad (i=1,\dots,m). \tag{1}$$

При каких n и m она будет эллиптична?

Как указывает И.Р. Шафаревич [1, с. 288], эта проблема равносильна следующей проблеме. При каких m и n система уравнений

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}^k x_i y_k = 0 \qquad (k = 1, \dots, n)$$

не имеет ненулевых вещественных решений?

Заметим, что эта проблема тесно связана с проблемой ортогонального спаривания евклидовых пространств [2]. Кроме того, она взаимосвязана с проблемой существования ортогональных полей на сферах [3], решение которой Адамсом [3] позволяет получить решение данной проблемы [4]. Следует, однако, отметить, что полученное таким образом решение не является конструктивным и не дает способа построения эллиптических систем первого порядка с любым числом независимых переменных. В настоящей работе укажем иное конструктивное решение поставленной проблемы. Справедлива

Теорема 1. *Эллиптические системы (1) с вещественными коэффициентами существуют для любых $n \geq 2$ тогда и только тогда, когда порядок матрицы системы $m = l \cdot 2^{r(n)}$, где l – натуральное, а $r(n)$ — число Радона–Гурвица, определяемое формулой*

$$r(n) = \begin{cases} (n-2)/2, & n \equiv 1,7 \mod 8 \\ (n+1)/2, & n \equiv 3,5 \mod 8 \\ n/2, & n \equiv 2,4,6 \mod 8 \\ (n-2)/2, & n \equiv 0 \mod 8. \end{cases} \tag{2}$$

Доказательство. Необходимость следует, как было отмечено [4], из известного результата Адамса [3] о максимальном числе линейно независимых векторных полей на сфере, полученного методами K-теории.

Для доказательства достаточности установим, что такие системы существуют при $m = 2^{r(n)}$ для любого $n \geq 2$. Для этого построим матрицы $A_n(a_1, ..., a_n)$ порядка $2^{r(n)}$, удовлетворяющие соотношению

$$A_n(a_1, ..., a_n) A_n^t(a_1, ..., a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 E_{2^{r(n)}},$$

где A_n^t — транспонированная к A_n матрица, E_m — единичная матрица порядка m. Построение будем вести рекуррентно по размерности пространства n. Определим матрицы $A_n \quad (n = 1, 2...)$ следующим образом:

$$A_1(a_1) = a_1, \quad A_2(a_1, a_2) = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем, если это не вызывает недоразумений, пишем для краткости $A_n(a)$ вместо $A_n(a_1, ..., a_n)$. Матрица A_3 блочная, она имеет вид

$$A_3(a) = \begin{pmatrix} A_2(a) & -A_3 E_2 \\ A_3 E_2 & A_2^t(a) \end{pmatrix}.$$

Матрица

$$A_4(a) = \begin{pmatrix} A_2(a) & -A_2^t(a_3, a_4) \\ A_2(a_3, a_4) & A_2^t(a) \end{pmatrix}.$$

Для построения матрицы A_5 и ряда других введем матрицу

$$B_2(b_1, b_2) = \begin{pmatrix} -b_1 & -b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{pmatrix}.$$

С ее помощью определим матрицу

$$B_4(b) = \begin{pmatrix} -A_2^t(b) & B_2(b_3, b_4) \\ B_2(b_3, b_4) & -A_2^t(b) \end{pmatrix}.$$

Матрица B_4 — это другое матричное представление алгебры кватернионов. С помощью матриц A_4 и B_4 образуем важную для дальнейшего построения матрицу

$$A_8(a) = \begin{pmatrix} A_4(a) & B_4(a_5, ..., a_8) \\ -B_4^t(a_5, ..., a_8) & A_4^t(a) \end{pmatrix}.$$

Теперь, используя $A_8(a)$, легче построить A_5, A_6, A_7: $A_5(a) = A_8(a_1, ...a_5, 0, 0, 0)$, $A_6(a) = A_8(a_1, ...a_6, 0, 0)$, $A_7(a) = A_8(a_1, ...a_7, 0)$. Аналогично A_{12} имеет другую конструкцию. Обозначим для краткости $B_4(a_{11}, a_{12})$ матрицу $B_4(a_{11}E_8, 0, 0, a_{12}E_8)$, тогда

$$A_{12}(a) = \begin{pmatrix} A_{10}(a) & B_4(a_{11}, a_{12}) \\ -B_4^t(a_{11}, a_{12}) & A_{10}^t(a) \end{pmatrix}.$$

Для определения матрицы A_{13} и других введем еще одну матрицу $D_4(d_1, d_2) = [D_{i,j}], i, j = 1, 2$, где $D_{11} = -D_{22}$, $D_{22} = \begin{pmatrix} 0 & -d_1 \\ -d_1 & 0 \end{pmatrix}$, $D_{12} = D_{21} = -d_2E_2$. Для кратности блочную матрицу $D_4(a_{15}E_8, a_{16}E_8)$ обозначим через $D_4(a_{15}, a_{16})$, тогда $A_{16}(a) = [A_{ij}]$,$1 \leq i,\ j \leq 4$, где

$$A_{11} = A_{22}^t = A_{33}^t = A_{44} = A_{10}(a),$$

$$A_{12} = -A_{34} = -A_{21}^t = A_{43}^t = B_4(a_{11}, a_{12}),$$

$$A_{13} = A_{24} = -A_{31}^t = A_{42}^t = B_4(a_{13}, a_{14}),$$

$$A_{14} = -A_{24} = A_{32}^t = -A_{41}^t = D_4(a_{15}, a_{16}).$$

Теперь определим матрицы A_{13}, A_{14}, A_{15}: $A_{13}(a) = A_{16}(a_1, ..., a_{13}, 0, 0, 0)$, $A_{14}(a) = A_{16}(a_1, ..., a_{14}, 0, 0)$, $A_{15}(a) = A_{16}(a_1, ..., a_{15}, 0)$. Матрица A_{17} строится с помощью A_{16} аналогично A_{13}.

Итак, при $n = 1, .., 17$ мы уже знаем строение матрицы A_n. Далее конструкция повторяется, т.е. матрицы и A_{9+i} и A_{17+i} $(i = 1, 2, ...)$ строятся аналогичным образом.

Пусть мы построили матрицы $A_n(n = 1, ..., 8k + 1)$, $(k \geq 2)$ и матрица A_{8k+1} имеет вид

$$A_{8k+1}(a) = \begin{pmatrix} A_{8k}(a) & -a_{8k+1}E_{2^{4k-1}} \\ a_{8k+1}E_{2^{4k-1}} & A_{8k}^t(a) \end{pmatrix},$$

где $A_{8k}(a) = [A_{ij}]$, $1 \leq i,\ j \geq 4$, а

$$A_{11} = A_{22}^t = A_{33}^t = A_{44} = A_{8k-1}(a),$$

$$A_{12} = -A_{34} = -A_{21}^t = A_{43}^t = B_4(a_{8k-5}, a_{8k-4}),$$
$$A_{13} = A_{24} = -A_{31}^t = -A_{42}^t = B_4(a_{8k-3}, a_{8k-2}),$$
$$A_{14} = -A_{24} = A_{32}^t = -A_{41}^t = D_4(a_{8k-1}, a_{8k}).$$

Здесь для краткости мы обозначим $B_4(a_{8k-5}E_{2^{4k-5}}, 0, 0, a_{8k-5}E_{2^{4k-5}})$ через $B_4(a_{8k-5,a_{8k-4}})$, $B_4(a_{8k-3}E_{2^{4k-5}}, 0, 0, a_{8k-2}E_{2^{4k-5}})$ через $B_4(a_{8k-3}, a_{8k-2})$, $D_4(a_{8k-1}E_{2^{4k-5}}, 0, 0, a_{8k}E_{2^{4k-5}})$ через $D_4(a_{8k-1}, a_{8k})$.

Теперь матрицы $A_{8k+2}, \dots, A_{8(k+1)-1}$ строим аналогично матрицам $A_{10}, \dots, A_{17}$ соответственно.

Таким образом, зная матрицы $A_n(n = 1, \dots, 8k+1)$, мы построили матрицы $A_n(n = 8k+2, \dots, 8(k+1)+1)$. Легко видеть, что матрица A_n зависит от $a_1, \dots, a_n$, а ее порядок равен $2^{r(n)}$, где $r(n)$ определяется равенством (2).

Рассмотрим систему

$$A_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u = 0 \qquad (n \geq 2), \tag{3}$$

где матрица A_n определена выше. В силу легко проверяемого соотношения

$$A_n\,(a)\,A_n^t\,(a) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 E_{2^{r(n)}}$$

система (3) эллиптична. Чтобы получить эллиптическую систему первого порядка R^n с числом неизвестных функций $m = l \cdot 2^{r(n)}$, нужно в (3) вместо матрицы A_n использовать матрицу, включающую в себя l блоков A_n и имеющую вид $\mathrm{diag}[A_n, \dots, A_n]$. Теорема доказана.

Следствие 1. Эллиптические системы (3) будут системами простейшей структуры (определение см. в [4]), так как их решения являются гармоническими векторами.

Следствие 2. Эллиптические системы (1), имеющие матрицу A порядка $m = t * 2^k$, где t нечетно, существуют тогда и только тогда, когда число независимых переменных n $(n \geq 2)$ в системе — любое число, удовлетворяющее неравенству $n \leq n(k)$, где

$$n(k) = \begin{cases} 2k+1, k \equiv 0 \mod 4, \\ 2k, k \equiv 1, 2 \mod 4, \\ 2k+2, k \equiv 3 \mod 4. \end{cases} \tag{4}$$

Следствие 3. Эллиптические системы (1) с числом независимых переменных n, равным числу неизвестных функций m, существуют лишь в случае, когда $n = 2, 4, 8$.

Замечание. Когда $n = 2$, система (3) превращается в систему Коши–Римана. При $n = 3$ система (3) сводится к системе Моисила–Теодореско, которая подробно изучена в работах А.В. Бицадзе (см., например, [5]). Когда $n = 4$, система (3) совпадает с системой, изучавшейся Фьютером, В.С. Виноградовым [6] и др. При $n = 8$

получающаяся система изучалась нами [7], ее матрица связана с матричным представлением алгебры Кэли. В случае произвольного числа независимых переменных аналоги системы Коши–Римана рассматривались А.А. Дезиным [8] и В.С. Виноградовым [6]. Однако системы, рассматривавшиеся в [8], не включают в себя ни систему Фьютера, ни систему, получающуюся из (3) при $n = 8$. Они при числе переменных n содержат 2^{n-1} неизвестных функций и не являются при $n > 3$ системами простейшей структуры. Спинорные системы, изученные в [6], также не включают в себя систему (3) при $n = 8$ и не являются, вообще говоря, системами простейшей структуры. Кроме того, как показано в [6], у них нет нетеровых граничных задач.

В качестве непосредственного приложения предложенного метода дадим новое конструктивное доказательство параллелизуемости сфер S^1, S^3, S^7.

Действительно, для этого нужно доказать существование n линейно независимых векторных полей на S^n $(n = 1, 3, 7)$. Докажем большее, а именно построим на S^n n ортонормальных векторных полей. Для этого достаточно определить такие отображения $V_i \colon S^n \to R^{n+1}$ $(1 \le i \le n)$, что

1. $(V_i(x), x) = 0, \quad 1 \le i \le n, \quad x \in S^n$;
2. $(V_i(x), V_j(x)) = \delta_i^j, \quad 1 \le i, j \le n, \quad x \in S^n$.

В самом деле, когда $n = 1$ положим

$$V_1(x) = (-x_2, x_1).$$

Если $n = 3$, положим

$$\begin{aligned}
V_1(x) &= (-x_2, x_1, -x_4, x_3),\\
V_2(x) &= (-x_3, x_4, -x_1, x_2),\\
V_3(x) &= (-x_4, -x_3, x_2, x_1).
\end{aligned}$$

При $n = 7$ положим

$$\begin{aligned}
V_1(x) &= (-x_2, x_1, -x_4, x_3, -x_6, x_5, x_8, -x_7),\\
V_2(x) &= (-x_3, x_4, -x_1, x_2, -x_7, -x_8, x_5, x_6),\\
V_3(x) &= (-x_4, -x_3, x_2, x_1, -x_8, x_7, -x_6, x_5),\\
V_4(x) &= (-x_5, x_6, x_7, x_8, x_1, -x_2, -x_3, -x_4),\\
V_5(x) &= (-x_6, -x_5, -x_7, x_2, x_1, x_4, -x_3),\\
V_6(x) &= (-x_7, -x_8, -x_5, x_6, x_3, -x_4, x_1, x_2),\\
V_7(x) &= (-x_8, x_7, -x_6, -x_5, x_4, x_3, -x_2, x_1).
\end{aligned}$$

Непосредственные вычисления, использующие свойства матриц A_n, показывают, что условия 1, 2 выполняются.

Метод построения эллиптических систем (3) позволяет дать краткое конструктивное решение проблемы нахождения максимального числа линейно независимых полей на сфере. Как известно, эта проблема была решена Адамсом [3] методами

K-теории. Отметим, однако, что его доказательство достаточно громоздко и не является конструктивным, т.е. не указывает способ, которым можно найти решение в явном виде. Ниже указан способ построения максимального числа не только линейно независимых, но и ортонормальных векторных полей на $(m-1)$-мерной сфере в общем случае, т.е. для любого возможного m.

Следствие 4. Пусть $m = l \cdot 2^k$, где l нечетное, $k = 0, 1, \ldots$, тогда максимальное число линейно независимых векторных полей на $(m-1)$-мерной сфере равно $n(k)-1$, где $n(k)$ определяется формулой (4).

Доказательство. Пусть $n = n(k)$ определено равенством (4). Рассмотрим блочную матрицу, включающую в себя l блоков $A_n(a)$ и имеющую вид $B_n(a) = \mathrm{diag}[A_n, \ldots, A_n]$, где матрица $A_n(a)$ определена выше системой (3). Матрица $B_n(a)$ удовлетворяет соотношению $B_n^t(a)B_n(a) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 E_m$, где E_m — единичная матрица порядка m. Построим следующие ортонормальные векторные поля на $(m-1)$-мерной сфере $S^{m-1} : V_i(x_1, \ldots, x_m) = B_n(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i}, 1, 0, \ldots, 0)x$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, где вектор $x = (x_1, \ldots)$ $x = (x_1, \ldots, x_m) \in S^{m-1}$. Заметим, что $B_n(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)x = x$, следовательно, учитывая свойства матрицы $B_n(a_1, \ldots, a_n)$, имеем

$$(B_n(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i}, 1, 0, \ldots, 0)x, B_n(\underbrace{0, \ldots, 0}_{j}, 1, 0, \ldots, 0)x) = \delta_j^i \sum_{k=1}^{m} x_k^2.$$

Поэтому $(V_i(x_1, \ldots, x_m), x) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $x = (x_1, \ldots, x_m) \in S^{m-1}$, $(V_i(x_1, \ldots, x_m), V_j(x_1, \ldots, x_m)) = \delta_j^i$, $1 \le i, j \le n-1$, $(x_1, \ldots, x_m) \in S^{m-1}$. Отсюда следует, что максимальное число $M(m-1)$ линейно независимых векторных полей на $(m-1)$-мерной сфере не меньше $n(k)-1$. То, что $M(m-1) \le n(k)-1$, доказывается, как и в [3]. Следовательно, $M(m-1) = n(k)-1$.

Определение. Систему (3) с построенной выше матрицей A_n порядка $2^{r(n)}$ назовем канонической системой в R^n.

Рассмотрим ряд свойств канонических систем. Можно показать, что для их решений справедливы принцип максимума модуля, теорема Лиувилля и другие свойства, рассматриваемые ниже.

Далее, если не оговорено противное, считаем границу ∂D области $D \subset R^n$ кусочно-гладкой и ориентированной в соответствии с ориентацией D.

Теорема 2. *Пусть f и g — векторы класса $C^{(1,0)}(G) \cap C^{(0,0)}(\bar{G})$, тогда справедлива формула*

$$\int_{\partial D} (f(x), A_n(*\,dx)g(x)) = \int_G \left[\left(A_n^t \left(\tfrac{\partial}{\partial x}\right) f(x), g(x)\right) + \left(f(x), A_n\left(\tfrac{\partial}{\partial x}\right)g(x)\right)\right] dV(x), \tag{5}$$

где $*\,dx = (*\,dx_1, \ldots, *\,dx_n)$, $*$ — оператор Ходжа, $(dx_i = (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \ldots \wedge [dx_i] \wedge \ldots \wedge dx_n)$, $dV(x) = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ — элемент объема согласно принятой ориентации.

В самом деле, в силу теоремы Стокса, примененной к дифференциальной форме $(f(x), A_n(*\,dx)g(x))$, имеем

$$\int_{\partial D} (f(x), A_n(*\,dx)g(x)) = \int_G d(f(x), A_n(*\,dx)g(x)). \tag{6}$$

Вычисляя внешний вид дифференциала справа в (6), получим

$$d(f(x), A_n(*\,dx)g(x)) = (df(x), A_n(*\,dx)g(x)) + (-1)^{n-1}(f(x), A_n(*\,dx) \wedge dg(x)) =$$

$$= (A_n^t\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x), g(x) + (f(x), A_n\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)g(x)) \times dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Подставляя это выражение в (6), получаем (5).

Следствие. Если f и g — векторы класса $C^{(1,0)}(G)$ и $\operatorname{supp} f \subset G$, $\operatorname{supp} g \subset G$, то верна формула

$$\int_G \left(\left(A_n^t\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x), g(x)\right) + \left(f(x), A_n\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)g(x)\right)\right)dV(x) = 0.$$

Справедливость этой формулы вытекает из равенства нулю в силу условия интеграла слева в (5).

Наряду с системой (3) рассмотрим сопряженную к ней систему

$$A_n^t\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x) = 0. \tag{7}$$

Теорема 3. *Пусть f и g — векторы класса $C^{(1,0)}(G)\bigcap C^{(0,0)}(\bar{G})$, $g(x)$ удовлетворяет системе (3), $f(x)$ — системе (7) в области G, тогда имеет место равенство*

$$\int_{\partial D}(f(x), A_n(*\,dx)g(x)) = 0. \tag{8}$$

Формула (8) следует из (5), так как интеграл справа в (5) равен нулю по условию.

Теорема 4. *Если вектор $f(x)$ класса $C^{(1,0)}(G)\bigcap C^{(0,0)}(\bar{G})$, то верна формула*

$$\int_{\partial D}(A_n(*\,dx)f(x)) = \int_G A_n\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f(x)dV(x). \tag{9}$$

Формулу (9) можно доказать, применяя теорему Стокса.

Следствие. Если $f(x)$ класса $C^{(1,0)}(G)$, $\operatorname{supp} f \subset G$, то

$$\int_G A_n\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f(x)dV(x) = 0.$$

Теорема 5. *Если вектор $f(x)$ класса $C^{(1,0)}(G)\bigcap C^{(0,0)}(\bar{G})$ и удовлетворяет в G системе (3), то*

$$\int_{\partial D}(A_n(*\,dx)f(x)) = 0.$$

Действительно, в силу условия интеграл справа в (9) равен нулю.

Теорема 5 является аналогом теоремы Коши в комплексном анализе.

Верно и обратное утверждение, являющееся аналогом теоремы Морера.

Теорема 6. *Пусть вектор $f(x)$ класса $C(G)$ и для любого шара $B \subset G$ $\int_{\partial B}(A_n(*\,dx)f(x)) = 0$. Тогда $f(x)$ удовлетворяет системе (3) в G.*

Доказательство разобьем на два этапа.

1. Пусть в начале $f(x)$ — гладкий вектор в G. Для любого шара $B \subset G$ в силу условия по теореме 4 имеем

$$\int_{\partial B} (A_n(*\,dx)f(x) = \int_B A_n\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x)dV(x) = 0.$$

Так как в силу гладкости $f(x)$ выражение под знаком последнего интеграла непрерывно в G и B — произвольный шар из G, то отсюда следует, что $f\,(x)$ — решение системы (3) в G, и для гладких f теорема доказана.

Прежде чем переходить к общему случаю, докажем следующую лемму.

Лемма 1. *(аналог теоремы Вейерштрасса) Если последовательность $f_k\,(x)$ решений системы (3) в G сходится равномерно внутри G, то её предел $f(x)$ также является решением системы (3) в G.*

В самом деле, в силу аналогичного утверждения для гармонических функций $f(x)$ будет класса $C^\infty(G)$. Кроме того, по теореме 5

$\int_{\partial B} (A_n(*\,dx)f\,(x)) = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots)$

для любого шара $B \subset G$. Так как $f_k\,(x)$ сходится равномерно внутри G, то можно переходить к пределу при $k \to \infty$ под знаком последнего интеграла, и мы получим, что $f\,(x)$ — также решение системы (3) в G.

2. Общий случай. Пусть f только непрерывна в G. Продолжим f во все пространство R^n, полагая $f = 0$ вне G, и построим семейство векторных функций

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha^n} \int_{R^n} f(t)\varphi\left(\frac{t-x}{\alpha}\right) dV(t), \qquad \alpha > 0,$$

где функция $\varphi \geq 0$ бесконечно дифференцируема в R^n, $\varphi = 0$, когда $|t| \geq 1$ и $\int_{\{|t|\leq 1\}} \varphi(t)dV(t) = 1$. Последовательность бесконечно дифференцируемых $f_\alpha\,(x)$ сходится равномерно при $\alpha \to 0$ внутри G к функции $f\,(x)$. Покажем, что $f_\alpha\,(x)$ удовлетворяет системе (3) на множестве $G_\alpha = \{x \in G : e(x, \partial G) > \alpha\}$, где $e(x, \partial G)$ — евклидово расстояние от точки x до границы ∂G. Действительно, сделав замену переменных в интеграле, представим $f_\alpha\,(x)$ в следующем виде:

$$f_\alpha\,(x) = \int_{\{|t|\leq 1\}} \left(\int_{\partial B} A_n(*\,dx) f(x + \alpha\tau)\right) \varphi(\tau)dV(\tau) = 0.$$

Следовательно,

$$\int_{\partial B} (A_n(*\,dx)f_\alpha\,(x)) = \int_{\{|t|\leq 1\}} \left(\int_{\partial B} A_n(*\,dx) f(x + \alpha\tau)\right) \varphi(\tau)dV(\tau) = 0,$$

где B — произвольный шар из G_α, так как, возвращаясь к старым переменным $t = x + \alpha\tau$, имеем в силу условия теоремы

$$\int_{\partial B} A_n(*\,dx) f_\alpha\,(x+\alpha\tau) = \int_{\partial B} A_n(*\,dx) f\,(t) = 0,$$

где $\widetilde{B} \subset G$ — шар, являющийся образом шара $\widetilde{B} \subset G_\alpha$ при сделанной замене координат. Используя доказанность теоремы 6 на первом этапе для гладких f, получим, что $f_\alpha\,(x)$ — решение системы (3) в G_α. Так как последовательность $f_\alpha\,(x)$ при $\alpha \to 0$ сходится равномерно в G, то в силу леммы 1 $f\,(x)$ также является решением системы (3) в G.

Обозначим через

$$g(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2-n}|t-x|^{2-n}, & n \geq 3, \\ \ln|t-x|, & n = 2 \end{cases}$$

и введем матричную дифференциальную форму

$$H(t,x) = A_n^t\left(\frac{t-x}{|t-x|^n}\right)A_n(*\,dt).$$

Теорема 7. *Пусть $f(x)$ класса $C^{(1,0)}(G^+)\bigcap C^{(0,0)}(\bar{G}^+)$, тогда справедлива формула*

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\left[\int_{\partial G^+} H(t,x)f(t) - \int_{G^+} A_n^t\left(\frac{t-x}{|t-x|^n}\right)A_n\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)f(t)dV(t)\right] =$$

$$= \begin{cases} f(x), & x \in G^+, \\ 0, & x \in G^-, \end{cases} \tag{10}$$

где 0 *— нулевой вектор.*

Доказательство формулы (10) проведем в несколько этапов.

1. Пусть 0 и E — соответственно нулевая и единичная матрицы, тогда

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{\partial G^+} H(t,x) = \begin{cases} E, & x \in G^+, \\ 0, & x \in G^-. \end{cases} \tag{11}$$

В самом деле, если $x \in G^-$, то форма $H(t,x)$ неособая, и, применяя теорему Стокса, получим

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{\partial G^+} H(t,x) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{G^+} d(H(t,x)).$$

Прямой подсчет показывает, что

$$d(H(t,x)) = A_n\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)A_n^t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)g(t,x)dV(t) = 0,$$

и мы получим (11). Если же $x \in G^+$, то форма $H(t,x)$ особая в G^+, и мы рассмотрим область $G_r = G^+ \backslash \overline{B(x,r)}$, где шар $B(x,r) \subset G^+$. В G_r, форма $H(t,x)$ неособая, и мы можем применить теорему Стокса:

$$j_r = \int_{\partial G_r} H(t,x) = \int_{G_r} d(H(t,x)) = 0. \tag{12}$$

Интеграл в правой части в (12) равен 0, так как $x \notin \bar{G}_r$ и $d(H(t,x)) = 0$ по той же причине, что и выше. Интеграл в левой части в (12) равен

$$j_r = \int_{\partial G^+} H(t,x) - \int_{\partial B(x,r)} H(t,x). \tag{13}$$

Используя свойства формы $H(t,x)$, находим, что

$$\int_{\partial B(x,r)} H(t,x) = \frac{1}{r^n} \int_{\partial B(x,r)} A_n^t(t-x) A_n(* \, dx). \tag{14}$$

К интегралу в правой части в (14) снова применим теорему Стокса. Имеем

$$\int_{\partial B(x,r)} H(t,x) = \frac{n}{r^n} \left(\int_{\partial B(r,x)} dV(t) \right) E, \tag{15}$$

где E — единичная матрица. Используя формулу объема шара в R^n, из (15) получим

$$\int_{\partial B(x,r)} H(t,x) = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}} E}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} E. \tag{16}$$

Из (12), (13) и (16) при $r \to 0$ получается формула (11).

2. Пусть $f(x)$ класса $C^{(1,0)}$ в окрестности $\overline{B(x^0,R)} \subset R^n$, тогда

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \left[\int_{\partial B(x^0,R)} H(t,x) f(t) - \int_{\partial B(x^0,R)} A_n^t \left(\frac{t-x}{|t-x|^n} \right) A_n \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) f(t) dV(t) \right] = \\ = \begin{cases} f(x), & x \in B(x^0,R), \\ 0, & x \notin \overline{B(x^0,R)}. \end{cases} \tag{17}$$

Здесь 0 — нулевой вектор.

Действительно, если $x \notin \overline{B(x^0,R)}$, то по теореме Стокса для $H(t,x)$ в шаре $B(x^0,R)$ имеем

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\partial B(x^0,R)} H(t,x) f(t) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{B(x^0,R)} d(H(t,x) f(t)).$$

Так как при $x \neq t$

$$d\left[A_n^t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)g(t,x)A_n\,(*\,dt)\right] = A_n^t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)A_n\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)g(t,x)dV(t) = 0,$$

то

$$\begin{aligned} d(H(t,x)f(t)) = &\left[A_n^t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)g(t,x)A_n(*\,dt)\right]\wedge f(t)+\\ &+(-1)^{n-1}A_n^t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)g(t,x)A_n(*\,dt)\wedge df =\\ &=(-1)^{n-1}A_n^t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)g(t,x)A_n(*\,dt)\wedge df+\\ &+A_n^t\left(\frac{t-x}{|t-x|^n}\right)A_n\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)f(t)dV(t), \end{aligned} \tag{18}$$

и при $x \notin \overline{B(x^0,R)}$ формула (17) доказана. Пусть $x \in B(x^0,R)$, рассмотрим область $D_r = B(x^0,R)\backslash\overline{B(x,R)}$, где r таково, что $\overline{B(x,R)} \subset B(x^0,R)$. В силу теоремы Стокса для $H(t,x)$ в D_r находим

$$j_r = \int_{\partial D_r} H(t,x)f(t) = \int_{D_r} d(H(t,x)f(t)). \tag{19}$$

Интеграл в левой части в (19) представим в виде

$$j_r = \int_{\partial B(x^0,R)} (H(t,x)f(t)) - \int_{\partial B(x,R)} (H(t,x)f(t)).$$

Используя непрерывность $f(t)$ в $B(x^0,R)$, имеем

$$j_r = \int_{\partial B(x,R)} (H(t,x)f(t)) - \int_{\partial B(x,R)} (H(t,x)f(t)) + \alpha(r), \tag{20}$$

где $|\alpha(r)| \to 0$ при $\alpha \to 0$. Используя доказанную на первом этапе формулу (11), в которой роль G играет шар $B(x,R)$, для интеграла в правой части в (20), из (20) и (19) при $r \to 0$ получим формулу (17). Отметим, что второй интеграл в (17) является интегралом со слабой особенностью порядка $n-1$, следовательно, он сходится по крайней мере, когда $A_n\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)f(t) \in L_p(B(x^0,R))$, где $p > n$.

3. Пусть G^+ — область, указанная в условии теоремы, а $f(t)$ класса $C^{(1,0)}$ в окрестности $\overline{C}^+$, тогда

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\left[\int_{\partial G^+} H(t,x)f(t) - \int_{G^+} A_n^t\left(\frac{t-x}{|t-x|^n}\right)A_n\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)f(t)dV(t)\right] = \\ = \begin{cases} f(x), & x \in G^+,\\ 0, & x \in G^-. \end{cases} \tag{21}$$

В самом деле, если $x \in G^-$, то по теореме Стокса

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{\partial G^+} H(t,x)f(t) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{G^+} d(H(t,x)f(t)).$$

Так как в G^- внешний дифференциал $d\left[A_n^t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)g(t,x)A_n(*\,dt)\right] = 0$, то внешний дифференциал произведения форм равен

$$d\left[A_n^t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)g(t,x)A_n\left(*\,dt\right)\right]\wedge f(t) = A_n^t\left(\frac{t-x}{|t-x|^n}\right)A_n\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)f(t)dV(t),$$

и мы получим (21).

Когда $x \in G^+$, рассмотрим, как и на первом этапе, область $G_r = G^+\backslash\overline{B(x,r)}$. По теореме Стокса

$$j_r = \int_{\partial G_r} H(t,x)f(t) = \int_{G_r} d(H(t,x)). \tag{22}$$

Внешний дифференциал под знаком интеграла в правой части в (22) вычисляется таким же образом, как и на втором этапе. Интеграл в левой части в (22) равен

$$j_r = \int_{\partial G^+} H(t,x) - \int_{\partial B(x,r)} H(t,x)f(t). \tag{23}$$

Второй интеграл в (23) в силу формулы (17), полученный на втором этапе, равен

$$\int_{\partial B(x,R)} H(t,x)f(t) = \int_{B(x,r)} A_n^t\left(\frac{t-x}{|t-x|^n}\right)A_n\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)f(t)dV(t) + \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}f(x)}{\Gamma(\frac{n}{2})} \tag{24}$$

Таким образом, при $x \in G^+$ имеем в силу (22)–(24)

$$\int_{\partial G^+} H(t,x)f(t) - \int_G^+ A_n^t\left(\frac{t-x}{|t-x|^n}\right)A_n\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)f(t)dV(t) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}f(x)}{\Gamma(\frac{n}{2})},$$

откуда имеем (21). Второй интеграл в (21) сходится по крайней мере, если $A_n\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)f(t) \in L_p(G^+)$, где $p > n$, так как он является интегралом со слабой особенностью порядка $n-1$.

4. Общий случай. Аппроксимируем область G^+ областями $\{G_m\}$, с кусочно-гладкими границами $\partial G_m : \bar{G}_m \subset G_{m+1}\bigcup_{m=1}^{\infty} G_m = G^+$. Так как $\lim\limits_{m\to\infty}\int_{\partial G_m^+}\omega$ для любой непрерывной в $\overline{G^+}\backslash G_1$ внешней дифференциальной формы ω степени $n-1$, то формулу (10) достаточно доказать для области G_m с кусочно-гладкой границей ∂G_m и f(x) класса $C^{(1,0)}$ в окрестности $\bar{G}_m$, что было сделано на третьем этапе.

Замечания. 1. Формулу (10) можно записать в эквивалентной форме. Так как

$$A_n^t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)g(t,x)A_n(*\,dt)\wedge df=(-1)^{n-1}A_n^t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)g(t,x)A_n\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)f(t)dV(t),\quad(25)$$

то (10) примет вид

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\left[\int_{\partial G^+}A_n^t\left(\frac{t-x}{|t-x|^{n-1}}\right)A_n\left(\frac{*\,dt}{|t-x|^{n-1}}\right)f(t)+\right.$$
$$\left.+(-1)^n\int_{G^+}A_n^t\left(\frac{t-x}{|t-x|}\right)A_n\left(\frac{*\,dt}{|t-x|^{n-1}}\right)\wedge df\right]=\begin{cases}f(x), & x\in G^+,\\ 0, & x\in G^-.\end{cases}\quad(26)$$

2. Используя (25), а также равенство

$$A_n^t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)g(t,x)=A_n^t\left(\frac{t-x}{(t-x)^n}\right),$$

из (26) имеем формулу

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\left[\int_{\partial G^+}A_n^t\left(\frac{t-x}{|t-x|}\right)A_n\left(\frac{*\,dt}{|t-x|^{n-1}}\right)f(t)+\right.$$
$$\left.+(-1)^n\int_{G^+}A_n^t\left(\frac{t-x}{|t-x|}\right)A_n\left(\frac{*\,dt}{|t-x|^{n-1}}\right)\wedge df\right]=\begin{cases}f(x), & x\in G^+,\\ 0, & x\in G^-.\end{cases}$$

Из формулы (10) находим интегральное представление для решений системы (3).

Теорема 8. *(Интегральное представление) Пусть $f(x)$ удовлетворяет системе (3) в G^+ и непрерывна в $\overline{G}^+$, тогда справедлива формула*

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{\partial G^+}A_n^t\left(\frac{t-x}{|t-x|}\right)A_n(*\,dt)f(t)=\begin{cases}f(x), & x\in G^+,\\ 0, & x\in G^-.\end{cases}\quad(27)$$

Формула (27) следует из (10), так как второй интеграл в (10) в этом случае равен нулю.

Замечание. Формулу (27) можно записать в следующей форме:

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{\partial G^+}A_n^t\left(\frac{t-x}{|t-x|}\right)A_n\left(\frac{*\,dt}{|t-x|^{n-1}}\right)f(t)=\begin{cases}f(x), & x\in G^+,\\ 0, & x\in G^-,\end{cases}$$

а также в виде

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{\partial G^+} A_n^t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) g(t,x) A_n(*\,dt) f(t) = \begin{cases} f(x), & x\in G^+,\\ 0, & x\in G^-.\end{cases}$$

Следствие. Любой вектор $f(x)$ класса $C^{(1,0)}(G)$, удовлетворяющий системе (3) в G, принадлежит $C^\infty(G)$. Поэтому если $f\in C^{(1,0)}(G)$ и удовлетворяет системе (3) в G, то $f'_{x_i}(x)\in C^{(1,0)}(G)$.

Теорема 9. *Если вектор $f(x)$ удовлетворяет системе (3) в шаре $B(r,x)$ и непрерывен в $\overline{B(x,r)}$, то верна формула*

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{\partial G^+} f(t)dS = f(x). \tag{28}$$

Действительно, в случае шара имеют место равенства

$$A_n^t\left(\frac{t-x}{(t-x)^n}\right)|_{\partial B(x,r)} = \frac{1}{r^n}A_n^t\left(t-x\right), \qquad A_n\left(*\,dt\right)|_{\partial B(x,r)} = \frac{1}{r}A_n(t-x)dS.$$

Подставляя эти выражения в интегральную формулу (27), получим (28). Теорема 9 является аналогом теоремы Гаусса о среднем.

Теорема 10. *Если $f(x)$ класса $C^{(1,0)}(G)(G^+)$, $\operatorname{supp}\subset G^+$, то имеет место формула*

$$-\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{G^+} A_n^t\left(\frac{t-x}{|t-x|^n}\right) A_n\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) f(t)dV(t) = \begin{cases} f(x), & x\in G^+,\\ 0, & x\in G^-.\end{cases} \tag{29}$$

В самом деле, из интегральной формулы (10) в силу условия получаем, что первый интеграл в (10) равен нулю, и мы имеем (29).

Полученные выше результаты позволяют найти решение неоднородной системы

$$A_n\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) f(x) = \varphi(x). \tag{30}$$

Теорема 11. *Пусть μ – векторная мера с компактным носителем в R^n, тогда интеграл*

$$f(x) = -\int A_n^+\left(\frac{t-x}{|t-x|^n}\right) d\mu(t) \tag{31}$$

определяет решение системы (3) класса C^∞ вне носителя K меры μ. Если во всякой области G, в которой $d\mu(t) = \dfrac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\varphi(t)dV(t)$ для некоторой $\varphi\in C^k(G)$, то $f\in C^k(G)$ и удовлетворяет системе (30) в G, если $k\geq 1$.

Доказательство. Очевидно, что $f(x)$ бесконечно дифференцируема вне носителя K меры μ, так как $A_n^t\left(\frac{t-x}{|t-x|^n}\right)$ бесконечно дифференцируема от (t,x), когда $t\in K$, $x\in R^n\backslash K$. А так как $A_n\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)A_n^t\left(\frac{t-x}{(t-x)^n}\right) = 0$ при $t\neq x$, то $A_n\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)f(x) = 0$

вне носителя K, что вытекает из возможностей дифференцирования в (31) под знаком интеграла. Для доказательства второй части утверждения допустим вначале, что $G = R^n$. После замены переменных $x - t = \tau$ имеем

$$f(x) = (-1)^n \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{R^n} A_n^t \left(\frac{\tau}{|\tau|^n}\right) \varphi(x-\tau) dV(\tau).$$

Так как $A_n^t\left(\frac{\tau}{|\tau|^n}\right)$ интегрируема на каждом компактном множестве, то можно не менее k раз дифференцировать под знаком интеграла, причем полученные интегралы будут сходиться. Следовательно, $f \in C^k(R^n)$ и

$$A_n\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) f(x) = (-1)^n \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{R^n} A_n^t \left(\frac{\tau}{|\tau|^n}\right) A\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \varphi(x-\tau) =$$
$$= -\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{R^n} A_n^t \left(\frac{\tau - x}{|\tau - x|^n}\right) A\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \varphi(t) dV(t).$$

Применив теперь теорему 10, сформулированную для φ вместо f и для области G^+, равной шару, содержащую носитель φ, получим $A_n\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) f(x) = \varphi(x)$.

Наконец, пусть G – произвольная область в R^n. Рассмотрим для любой точки $x^0 \in G$ функцию $\varphi \in C_0^k(G)$, т.е. равную нулю вне некоторого компактного множества $K \subset\subset G$ и равную 1 в некоторой окрестности U точки x^0. Положим $\mu_1 = \varphi\mu$ и $\mu_2 = (1-\varphi)\mu$, тогда $f = f_1 + f_2$, где

$$f_i(x) = -\int_{R_n} A_n^t \left(\frac{t - x}{|t - x|^n}\right) A\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) d\mu_i(t).$$

Так как $d\mu_i = \dfrac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \Phi(t)\varphi(t)dv(t)$ и $\Phi\varphi(t) \in C_0^k(R^n)$, то $f_1 \in C^k(R^n)$ и по доказанному выше $A_n\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right) f_1(x) = \Phi(t)\varphi(t)$. А так как $\mu_2 = 0$ в U, то из этого следует, что $f_1 \in C^k(U)$ и $A_n\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right) f(x) = \varphi(t)$ в U.

Список литературы / References

[1] Шафаревич И. Р., *Основы алгебраической геометрии*, **1**, Наука, М., 1988, 352 с.; English transl.: Shafarevich I. R., “Foundations of algebraic geometry”, *Russian Math. Surveys*, **24**:6 (1969), 178 pp.

[2] Yuzvinski S., “Ortogonal pairings of Euclidean spaces”, *Michigan Math. J.*, **28**:2 (1981), 131–145.

[3] Adams J.F., “Vector fields on spheres”, *Ann. of Math.*, **75**:3 (1962), 603–632.

[4] Соломяк М.З., “О линейных эллиптических системах первого порядка”, *Докл. АН СССР*, **150**:1 (1963), 48–51; [Solomyak M.Z., “O linejnyh ehllipticheskih sistemah pervogo poryadka”, *Dokl. AN SSSR*, **150**:1 (1963), 48–51, (in Russian)].

[5] Бицадзе А.В., *Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка*, Наука, М., 1966; [Bicadze A.V., *Kraevye zadachi dlya ehllipticheskih uravnenij vtorogo poryadka*, Nauka, Moskva, 1966, (in Russian)].

[6] Виноградов В.С., "Исследование граничных задач для эллиптических систем первого порядка", *Матем. заметки*, **14**:2 (1973), 291–304; English transl.: Vinogradov V.S., "Investigation of boundary value problems for elliptic systems of first order", *Math. Notes*, **14**:2 (1973), 724–731.

[7] Балабаев В.Е., "Об одной системе уравнений в октавах в восьмимерном евклидовом пространстве", *Фундамент. и прикл. матем.*, **1**:2 (1995), 517–521; [Balabaev V.E., "On one system of equations in octaves in eight dimensional Euclidean space", *Fundam. Prikl. Mat.*, **1**:2 (1995), 517–521, (in Russian)].

[8] Дезин А.А., *Многомерный анализ и дискретные модели*, Наука, М., 1990, 240 с.; [Dezin A.A., *Mnogomernyi analiz i diskretnye modeli*, Nauka, Moskva, 1990, 240 pp., (in Russian)].

Balabaev V. E., "Constructive Solution of Ellipticity Problem for the First Order Differential Systems", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:5 (2017), 655–670.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-655-670

Abstract. We built first order elliptic systems with any possible number of unknown functions and the maximum possible number of unknowns, i.e, in general. These systems provide the basis for studying the properties of any first order elliptic systems. The study of the Cauchy-Riemann system and its generalizations led to the identification of a class of elliptic systems of first-order of a special structure. An integral representation of solutions is of great importance in the study of these systems. Only by means of a constructive method of integral representations we can solve a number of problems in the theory of elliptic systems related mainly to the boundary properties of solutions. The obtained integral representation could be applied to solve a number of problems that are hard to solve, if you rely only on the non-constructive methods. Some analogues of the theorems of Liouville, Weierstrass, Cauchy, Gauss, Morera, an analogue of Green's formula are established, as well as an analogue of the maximum principle. The used matrix operators allow the new structural arrangement of the maximum number of linearly independent vector fields on spheres of any possible dimension. Also the built operators allow to obtain a constructive solution of the extended problem "of the sum of squares" known in algebra.

Keywords: elliptic systems, differential equations

On the author:
Vladimir E. Balabaev, orcid.org/0000-0001-5349-6917, doctor of science,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia,
e-mail: balabaev49@mail.ru