Модел. и анализ информ. систем Т.**13**, №**1** (2006) 3–8

УДК 517.9

Формула для ляпуновской величины задачи о бифуркации автоволн

Колесов Ю.С., Харьков А.Е.
Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

получена 15 марта 2006

Аннотация

Метод квазинормальных форм был создан первым автором еще в начале восьмидесятых годов прошлого века. Однако до сих пор он не стал общим местом. Связано это с тем, что его идеология не только сложна, но и многогранна. В данной статье объясняются два аспекта проблемы: вычисление ляпуновской величины теряющего устойчивость однородного цикла и недостижимость бифуркационной границы.

1. Постановка задачи. Как известно [1], в простейшем варианте квазинормальная форма системы реакция-диффузия с малой надкритичностью и диффузионными коэффициентами при условиях непроницаемости в концах единичного отрезка имеет вид:

$$\dot{\xi} = d\exp(-i\alpha)\xi'' + \xi - (1 + i\omega^2)|\xi|^2\xi, \quad \xi'\Big|_{x=0} = \xi'\Big|_{x=1} = 0, \tag{1}$$

где d, ω – положительные параметры, $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, точка – дифференцирование по времени, штрих – по пространственной переменной. Отметим, что краевая задача (1) дополняется комплексно сопряженной.

Достаточно очевидно, что краевая задача (1) имеет пространственно однородный автомодельный цикл $\xi_0 = \exp(-i\omega^2 t)$, который теряет устойчивость при $d < d_{\text{кр}}$, где

$$\pi^2 d_{\text{кр}} = 2(\omega^2\sin\alpha - \cos\alpha). \tag{2}$$

Естественно, при этом предполагается, что положительна правая часть в (2). Собственно, на этом заканчивается формулировка ограничений на три параметра краевой задачи (1).

Пространственно неоднородные колебания краевых задач типа (1) принято называть автоволнами. Возникает вопрос: могут ли они ответвляться от теряющего устойчивость однородного цикла. Формально ответ на него получить просто: следует найти формулу для ляпуновской величины однородного цикла краевой задачи (1) при $d = d_{\text{кр}}$. Именно данной проблеме и посвящена основная часть нашей работы.

2. Подготовительные сведения. При условиях непроницаемости введем в рассмотрение оператор

$$L_0\eta = d_{\text{кр}}\exp(-i\alpha)\eta'' - (1 + i\omega^2)(\eta + \bar{\eta}). \tag{3}$$

Непосредственно проверяется, что

$$L_0\exp(-i\varphi)\sqrt{2}\cos\pi x = 0, \tag{4}$$

если постоянная φ, где $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, подчинена равенству

$$\pi^2 d_{\text{кр}}\sin\varphi = 2(\sin\alpha + \omega^2\cos\alpha)\cos\varphi. \tag{5}$$

Из (2) и (5) следует, что

$$\sin\varphi = \frac{\sin\alpha + \omega^2\cos\alpha}{\sqrt{\omega^4 + 1}}, \quad \cos\varphi = \frac{\omega^2\sin\alpha - \cos\alpha}{\sqrt{\omega^4 + 1}}. \tag{6}$$

Содержательный смысл постоянной φ прояснится после доказательства следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 1. *Неоднородное уравнение*

$$L_0\eta = \gamma\cos\pi x, \quad \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2, \tag{7}$$

разрешимо в том и только том случае, если

$$\mathrm{Re}(\gamma \exp(i\alpha)) = 0. \tag{8}$$

Доказательство. Из метода Фурье следует, что искомое решение обязано иметь вид

$$\eta = a\cos\pi x, \quad a = a_1 + ia_2. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (7), получаем комплексное равенство

$$-d_{\text{кр}}\exp(-i\alpha)\pi^2 a - 2(1 + i\omega^2)a_1 = \gamma_1 + i\gamma_2, \tag{10}$$

эквивалентное двум вещественным

$$-\pi^2 d_{\text{кр}}(a_1\cos\alpha + a_2\sin\alpha) - 2a_1 = \gamma_1, \quad \pi^2 d_{\text{кр}}(a_1\sin\alpha - a_2\cos\alpha) - 2\omega^2 a_1 = \gamma_2.$$

Умножая первое из них на $\cos\alpha$; второе на $\sin\alpha$, а затем вычитая из первого равенства второе, после простых преобразований выводим, что в силу (2)

$$\gamma_1\cos\alpha - \gamma_2\sin\alpha = -\pi^2 d_{\text{кр}}a_1 + 2(\omega^2\sin\alpha - \cos\alpha)a_1 = 0,$$

а значит, доказана необходимость условия (8).

Если же выполнено равенство (8), то тогда при подходящем μ

$$\gamma_1 = \mu\sin\alpha, \quad \gamma_2 = \mu\cos\alpha. \tag{11}$$

Из (11) вытекает, что справедлива формула $\gamma = i\mu\exp(-i\alpha)$, которая позволяет комплексное равенство (10) записать в виде следующих двух вещественных

$$\pi^2 d_{\text{кр}}a_1 - 2(\cos\alpha - \omega^2\sin\alpha)a_1 = 0, \quad -\pi^2 d_{\text{кр}}a_2 - 2(\omega^2\cos\alpha + \sin\alpha)a_1 = \mu.$$

Согласно (2) первое равенство справедливо. Второе равенство позволяет однозначно определить a_2 при произвольно заданном a_1. Доказательство закончено.

Из равенств (6) следует, что

$$\sin\alpha = \frac{\sin\varphi + \omega^2\cos\varphi}{\sqrt{\omega^4 + 1}}, \quad \cos\alpha = \frac{\omega^2\sin\varphi - \cos\varphi}{\sqrt{\omega^4+1}}. \tag{12}$$

Равенства (12) означают, что

$$\exp(i\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\omega^4+1}}(-1 + i\omega^2)\exp(-i\varphi). \tag{13}$$

Из сопоставления (8) с (13) выводим ключевое утверждение.

Лемма 2. *Неоднородное уравнение (7) разрешимо в том и только том случае, если*

$$\mathrm{Re}(\gamma\exp(-i\varphi)) + \omega^2\mathrm{Im}(\gamma\exp(-i\varphi)) = 0. \tag{14}$$

3. Алгоритм вычисления ляпуновской величины. При $d = d_{\text{кр}}$ в (1) выполним замену

$$\xi = (1 + \eta)\exp(-i\omega^2 t + i\psi),$$

в которой с достаточной для нас точностью

$$\eta = \rho\exp(-i\varphi)\sqrt{2}\cos\pi x + \rho^2\eta_1 + \rho^3\eta_2, \tag{15}$$

$$\dot\psi = \beta\rho^2, \quad \dot\rho = b\rho^3, \tag{16}$$

где β и b – вещественные постоянные, η_1 и η_2 – комплексные функции определенной структуры. В итоге приходим к равенству

$$i\beta\rho^2 + i\beta\rho^3\exp(-i\varphi)\sqrt{2}\cos\pi x + b\rho^3\exp(-i\varphi)\sqrt{2}\cos\pi x =$$
$$= L_0\eta - (1 + i\omega^2)(\eta^2 + 2|\eta|^2 + |\eta|^2\eta). \tag{17}$$

Приравнивая последовательно в (17) коэффициенты при ρ^2 и ρ^3, находим из получающихся уравнений сначала β и η_1, а затем b. Последняя b и называется ляпуновской величиной.

Остановимся на геометрическом смысле уравнений (16): с их помощью описывается динамика в двумерном инвариантном подпространстве краевой задачи (1). Равенство же (15) используется для приближенного построения автомодельного цикла с пространственно неоднородной комплексной амплитудой.

4. Формула для ляпуновской величины. Приравнивая в (17) коэффициенты при ρ^2, получаем

$$L_0\eta_1 = i\beta + (1 + i\omega^2)(\exp(-2i\varphi) + 2)(1 + \cos 2\pi x). \tag{18}$$

Из структуры правой части формулы (18) вытекает, что имеет смысл равенство

$$\eta_1 = c + A\cos 2\pi x, \tag{19}$$

где c – вещественная постоянная, A – комплексная. Из (18) и (19) вытекает, в частности, равенство

$$-2(1 + i\omega^2)c = i\beta + (1 + i\omega^2)(\exp(-2i\varphi) + 2),$$

которое справедливо только в том случае, если

$$\beta = (\omega^4 + 1)\sin 2\varphi, \quad 2c = -(1 + 2\cos^2\varphi + \omega^2 \sin 2\varphi). \tag{20}$$

Второе равенство, также вытекающее из (18) и (19), имеет вид

$$-4\pi^2 d_{\text{кр}} \exp(-i\alpha)A - (1 + i\omega^2)(A + \bar{A}) = (1 + i\omega^2)(\exp(-2i\varphi) + 2),$$

которое согласно следующей из (4) формулы

$$-\pi^2 d_{\text{кр}} \exp(-i\alpha) = (1 + i\omega^2)(\exp(2i\varphi) + 1)$$

преобразуется к более наглядной форме

$$(3 + 4\exp(2i\varphi))A - \bar{A} = 2 + \exp(-2i\varphi). \tag{21}$$

К уравнению (21) относительно A и $\bar{A}$ добавим комплексно сопряженное

$$(3 + 4\exp(-2i\varphi))\bar{A} - A = 2 + \exp(2i\varphi). \tag{22}$$

Разрешая систему (21), (22), получаем

$$A = \frac{1}{48\cos^2\varphi}(8 + \exp(2i\varphi) + 11\exp(-2i\varphi) + 4\exp(-4i\varphi)). \tag{23}$$

Формула для $\bar{A}$ получается путем проведения операции перехода к комплексно-сопряженным величинам в (23).

Выделим в (17) слагаемое при ρ^3 и обозначим через γ сумму коэффициентов при $\sqrt{2}\cos\pi x$. С учетом равенства (19) получаем

$$\gamma = (b + i\beta)\exp(-i\varphi) + (1 + i\omega^2)\Big[4c\cos\varphi + 2c\exp(-i\varphi) + 2A\cos\varphi + \bar{A}\exp(-i\varphi) + \frac{3}{2}\exp(-i\varphi)\Big]. \tag{24}$$

Формулы (23) и (24) позволяют заключить, что

$$\begin{gathered}\mathrm{Re}(\gamma\exp(-i\varphi)) = b\cos 2\varphi + \beta\sin 2\varphi + 4c\cos^2\varphi + 2c\cos 2\varphi + \\ + \tfrac{1}{24\cos\varphi}(9\cos\varphi + 11\cos 3\varphi + 4\cos 5\varphi) + \tfrac{1}{48\cos^2\varphi}(11 + 12\cos 2\varphi + \cos 4\varphi) + \\ + \tfrac{3}{2}\cos 2\varphi + 4\omega^2 c\sin\varphi\cos\varphi + 2\omega^2 c\sin 2\varphi + \\ + \tfrac{\omega^2}{24\cos\varphi}(7\sin\varphi + 11\sin 3\varphi + 4\sin 5\varphi) + \tfrac{\omega^2}{48\cos^2\varphi}(4\sin 2\varphi + \sin 4\varphi) + \\ + \tfrac{3}{2}\omega^2\sin 2\varphi,\end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{Im}(\gamma\exp(-i\varphi)) = -b\sin 2\varphi + \beta\cos 2\varphi - 4c\sin 2\varphi - \\ - \tfrac{1}{24\cos\varphi}(7\sin\varphi + 11\sin 3\varphi + 4\sin 5\varphi) - \tfrac{1}{48\cos^2\varphi}(4\sin 2\varphi + \sin 4\varphi) - \\ - \tfrac{3}{2}\sin 2\varphi + 4\omega^2 c\cos^2\varphi + 2\omega^2 c\cos 2\varphi + \\ + \tfrac{\omega^2}{24\cos\varphi}(9\cos\varphi + 11\cos 3\varphi + 4\cos 5\varphi) + \tfrac{\omega^2}{48\cos^2\varphi}(11 + 12\cos 2\varphi + \cos 4\varphi) + \\ + \tfrac{3}{2}\omega^2\cos 2\varphi,\end{gathered} \tag{26}$$

Отметим, что согласно (12)

$$\omega^2 \sin 2\varphi - \cos 2\varphi = 1 + 2\cos\varphi(\omega^2 \sin\varphi - \cos\varphi) = 1 + 2\sqrt{\omega^4 + 1}\cos\varphi\cos\alpha. \tag{27}$$

Формулы (25)-(27) в соответствии с равенством (14) и первым равенством (20) приводят к явной формуле для b:

$$\frac{48\cos^2\varphi(1 + 2\sqrt{\omega^4+1}\cos\varphi\cos\alpha)}{\omega^4+1}b = 48\cos^2\varphi(\sin^2 2\varphi + \omega^2\sin 2\varphi\cos 2\varphi +$$
$$+2c(\cos 2\varphi + 2\cos^2\varphi)) + 2\cos\varphi(9\cos\varphi + 11\cos 3\varphi + 4\cos 5\varphi) +$$
$$+11 + 12\cos 2\varphi + \cos 4\varphi + 72\cos^2\varphi\cos 2\varphi. \tag{28}$$

Правая часть формулы (28), которую обозначим буквой l, нуждается в упрощении. На этом пути будут полезны ряд известных тригонометрических равенств:

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi, \quad \sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi, \tag{29}$$

$$\cos 4\varphi = 8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1, \quad \cos 5\varphi = 16\cos^5\varphi - 20\cos^3\varphi + 5\cos\varphi. \tag{30}$$

Представим l в виде $l_1 + l_2 + l_3$, где l_1 – взятое в скобках первое слагаемое с множителем $48\cos^2\varphi$, l_2 – взятое в скобки второе слагаемое с множителем $2\cos\varphi$, l_3 – сумма остальных слагаемых правой части (28).

В силу второго равенства (20)

$$l_1 = 48\cos^2\varphi(1 + 2\cos^2\varphi - 12\cos^4\varphi - 4\omega^2\sin\varphi\cos^3\varphi). \tag{31}$$

Учитывая формулы (29) и (30), имеем

$$l_2 = 8\cos^2\varphi(16\cos^4\varphi - 9\cos^2\varphi - 1). \tag{32}$$

С помощью тех же формул выводим, что

$$l_3 = 8\cos^2\varphi(19\cos^2\varphi - 7). \tag{33}$$

Из (31)-(33) получаем итоговое равенство

$$l = -16l_0\cos^2\varphi, \quad l_0 = 28\cos^4\varphi - 11\cos^2\varphi + 12\omega^2\sin\varphi\cos^3\varphi + 1. \tag{34}$$

Пришли к нашему основному утверждению.

Теорема. *Для ляпуновской величины b справедлива формула:*

$$b = -\frac{\omega^4+1}{3(1 + 2\sqrt{\omega^4+1}\cos\varphi\cos\alpha)}l_0. \tag{35}$$

Разберемся со знаком l_0. Предварительно остановимся на следующем обстоятельстве. Положим

$$\sin\nu(\omega^2) = \frac{1}{\sqrt{\omega^4+1}}, \quad \cos\nu(\omega^2) = \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^4+1}}.$$

Отсюда и из (6) выводим, что

$$\sin\varphi = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha + \nu(\omega^2)), \quad \cos\varphi = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha + \nu(\omega^2)),$$

а значит, $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha + \nu(\omega^2)$. Из последнего равенства следует, что $\omega^2\operatorname{tg}\varphi > 1$.

Напомним, что

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}.$$

Поэтому

$$l_0 = (\operatorname{tg}^4\varphi - 9\operatorname{tg}^2\varphi + 12\omega^2\operatorname{tg}\varphi + 18)\cos^4\varphi. \tag{36}$$

В (36) положим $\operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{\omega^2}$, где $x > 1$. Заключаем, что знак l_0 совпадает со знаком квадратного многочлена

$$\omega^8 - \frac{3x^2}{2(2x+3)}\omega^4 + \frac{x^4}{6(2x+3)}$$

относительно переменной ω^4. Его дискриминант отрицателен, а значит, $l_0 > 0$.

Сопоставим наш результат с приведенным в [3], где бифуркационная задача решена иным способом. Имеем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega^2 + \operatorname{tg}\alpha}{\omega^2\operatorname{tg}\alpha - 1}. \tag{37}$$

Формулу (37) учтем в выражении, стоящем в круглых скобках в (36). В получившейся формуле выделим числитель $Q(\operatorname{tg}\alpha, \omega^2)$:

$$(\omega^2 + \operatorname{tg}\alpha)^4 - 9(\omega^2 + \operatorname{tg}\alpha)^2(\omega^2\operatorname{tg}\alpha - 1)^2 + 12\omega^2(\omega^2 + \operatorname{tg}\alpha)(\omega^2\operatorname{tg}\alpha - 1)^3 + 18(\omega^2\operatorname{tg}\alpha - 1)^4,$$

который запишем в виде

$$a_1\operatorname{tg}^4\alpha + a_2\operatorname{tg}^3\alpha + a_3\operatorname{tg}^2\alpha + a_4\operatorname{tg}\alpha + a_5. \tag{38}$$

Именно выражение (38) фигурирует в [3].

Прямая выкладка показывает, что

$$a_1 = 30\omega^8 - 9\omega^4 + 1, \quad a_2 = 12\omega^{10} - 126\omega^6 + 22\omega^2,$$

$$a_3 = -45\omega^8 + 186\omega^4 - 9, \quad a_4 = 58\omega^6 - 102\omega^2, \quad a_5 = \omega^8 - 21\omega^4 + 18,$$

т.е. имеем согласование с равенством из [3].

Дополнительно подчеркнем, что согласно (35) формулу для ляпуновской величины можно записать в виде:

$$b = -\frac{Q(\operatorname{tg}\alpha, \omega^2)\cos^4\alpha}{3(\omega^4+1)(1+2\sqrt{\omega^4+1}\cos\varphi\cos\alpha)}.$$

Итак, предложен простой и наглядный способ построения ляпуновской величины квазинормальной формы, пригодный также для исследования бифуркационных проблем волновых уравнений, связанных с (1) при $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Отметим, что именно этот случай не рассмотрен в [1]-[3].

Второе замечание связано с теоремой, сформулированной в [4], в которой утверждается, что в рамках исходной краевой задачи достижима бифуркационная граница. Однако уже более двадцати лет известно, что это не так. И все же уместно еще раз отметить особенность вопроса.

Пусть процесс возникновения автоволновых процессов некоторой сингулярно возмущенной краевой задачи исследуется при помощи метода квазинормальных форм. Пусть отрицательна соответствующая ляпуновская величина. Тогда у возникающих двух неоднородных циклов пространственная неоднородность сначала связана с произвольно высокими модами. По мере увеличения надкритичности становятся пространственно неоднородными моды со все меньшими номерами. При этом при переходе неоднородности с моды на моду пространственно неоднородные циклы обмениваются устойчивостью с однородным. Процесс прекращается, когда пространственные возмущения достигают младшей ненулевой моды.

В заключение подчеркнем, что для систем реакция-диффузия метод квазинормальных форм приобрел законченный вид в относительно недавней статье [5].

Список литературы

1. Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.:Физматлит, 1995.

2. Колесов А.Ю. О принципе области в задаче о колебаниях численности млекопитающих //Нелинейные колебания в задачах экологии. Ярославль, 1985. С. 11-22.

3. Колесов А.Ю. Миграционные эффекты в одновидовом биоценозе //Нелинейные колебания и экология. Ярославль, 1984. С. 34-61.

4. Куликов А.Н. Бифуркация автоколебаний в двух сингулярно возмущенных периодических краевых задачах гиперболического типа //Математика в Ярославском университете. Ярославль, 2001. С. 183-194.

5. Колесов Ю.С. Обоснование метода квазинормальных форм для уравнения Хатчинсона с малым коэффициентом диффузии // Изв. РАН. Серия матем. 2001. Т. 65, №4. С. 111-132.