

УДК 517.9

Формула для ляпуновской величины задачи о конкурентной борьбе

Пендюк А.Д., Пендюк Д.А.
Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

получена 14 марта 2006

Аннотация

Продолжается начатое ранее рассмотрение данной задачи; приводится вывод упомянутой в названии формулы; приведено одно следствие.

1. Начнём с общих положений из [1]. Рассмотрим уравнение с запаздыванием в R^n

$$\dot{u} = r l(u(t+s)) + r u l(u(t+s)), \quad (1)$$

где $l(*)$ – линейный оператор, действующий из $C([-h, 0], R^n)$ в R^n , $r \in R^n$, а произведение векторов означает вектор, у которого координаты – произведения координат сомножителей. Введём в рассмотрение матрицу

$$A(i\omega) = l(I \exp(i\omega s)), \quad (2)$$

где I – единичная матрица размера $n \times n$.

Будем считать, что при некоторых r и $\omega > 0$

$$r A(i\omega) a = i\omega a, \quad a \neq 0. \quad (3)$$

Последнее равенство означает, что характеристический квазиполином уравнения

$$\dot{u} = r l(u(t+s)) \quad (4)$$

имеет корни $\pm i\omega$. Считаем их простыми. Относительно остальных его корней предполагаем, что они имеют отрицательные действительные части. Из (3) следует, что

$$A^*(-i\omega) r b = -i\omega b, \quad b \neq 0, \quad (5)$$

где звёздочка обозначает транспонирование.

Лемма. Вектор b можно выбрать так, что

$$(a, b) - (r l(a s \exp(i\omega s)), b) = 1, \quad (6)$$

где скалярное произведение берётся в смысле унитарного пространства.

Доказательство. Так как вектор b определяется с точностью до комплексного множителя, то достаточно показать, что отлична от нуля левая часть в (6). Будем рассуждать от противного, считая, что она равна нулю. Введём в рассмотрение вспомогательное уравнение

$$\dot{u} = (r + \varepsilon \gamma) l(u(t+s)),$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, а γ – пока произвольный вектор из R^n . Из наших предположений следует, что уравнение

$$(r + \varepsilon \gamma) l(a(\varepsilon) \exp(\lambda(\varepsilon) s)) = \lambda(\varepsilon) a(\varepsilon) \quad (7)$$

имеет гладко зависящие от ε решения

$$\lambda(\varepsilon) = i\omega + \varepsilon \lambda_1 + O(\varepsilon^2), \quad a(\varepsilon) = a + \varepsilon a_1 + O(\varepsilon^2) \quad (8)$$

Из (7) и (8) вытекает, что

$$(rA(i\omega) - i\omega I) \mathbf{a}_1 = \lambda_1 (\mathbf{a} - rl(\mathbf{a} s \exp(i\omega s))) - i\omega \frac{\gamma \mathbf{a}}{r}.$$

По построению $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$. Поэтому, скажем, при $\gamma = r$ правая часть в последнем равенстве отлична от нуля при её скалярном умножении на $\mathbf{b}$, что невозможно. Доказательство закончено.

При выбранном r уравнение (1) имеет двумерное инвариантное интегральное многообразие, на котором динамика связана с уравнением

$$\dot{z} = dz |z|^2 \quad (9)$$

и комплексно сопряжённом к нему. В (9) комплексная постоянная d называется ляпуновской величиной, значение которой существенно при решении бифуркационных задач. Опишем способ её вычисления. Положим

$$u = u_1 + u_2 + u_3, \quad (10)$$

где $u_1 = z\mathbf{a} \exp(i\omega t) + K.C.$ (К.С. - обычное сокращение комплексно сопряжённой добавки); u_2 - квадратичным образом зависит от z , а по t является второй гармоникой; u_3 - кубична по z , а по t является суммой первых и третьих гармоник.

Подставляя (10) в (1) и приравнявая квадратичные по z слагаемые, получаем

$$i\dot{u}_2 = rl(u_2(t+s)) + ru_1(t) l(u_1(t+s)). \quad (11)$$

Так как $\dot{u}_1 = rl(u_1(t+s))$, то неоднородность в (11) можно представить в виде:

$$i\omega (\mathbf{a}^2 z^2 \exp(2i\omega t) - \bar{\mathbf{a}}^2 \bar{z}^2 \exp(-2i\omega t)). \quad (12)$$

Поэтому достаточно рассмотреть уравнение

$$i\dot{u} = rl(u(t+s)) + c \exp(2i\omega t), \quad (13)$$

решение которого будем искать в виде

$$u = \gamma \exp(2i\omega t). \quad (14)$$

Из (13) и (14) вытекает, что

$$c = (2i\omega I - rA(2i\omega))^{-1} \gamma. \quad (15)$$

Сопоставляя (15) с (12) и (13), замечаем, что

$$u_2 = \beta \mathbf{a}^2 \exp(2i\omega t) + K.C., \quad (16)$$

где

$$\beta = i\omega (2i\omega I - rA(2i\omega))^{-1} \mathbf{a}^2. \quad (17)$$

Условия, при которых гармоническая по t функция u_3 существует, нуждаются в пояснениях. После приравнивания в (1) кубических по z слагаемых, приходим к некоторому неоднородному уравнению, в котором неоднородность содержит только первые и третьи гармоники по t . Кроме того, следует учесть, что u_1 теперь дифференцируется и по z , и что в силу (9)

$$z(t+s) = z(t) + s\dot{z}(t) + \dots,$$

где опущены слагаемые пятого порядка по z .

Реализация указанной процедуры приводит к заключению, что слева перед $\exp(i\omega t)$ стоит множитель

$$ds |z|^2 (\mathbf{a} + rl(\mathbf{a} s \exp(i\omega s))), \quad (18)$$

а справа

$$z |z|^2 i\omega (\bar{a}\beta - a^2\bar{a}). \quad (19)$$

Из (18), (19) и леммы вытекает содержащееся в [1] утверждение.

Теорема 1. *Справедлива формула*

$$d = i\omega ((\beta, ab) - (a^2, ab)). \quad (20)$$

2. В [2] рассматривается вопрос об устойчивости единичного состояния равновесия системы дифференциально-разностных уравнений

$$\dot{n}_1 = \frac{r}{1+a}(1+a(1-n_2)-n_1(t-1))n_1, \quad (21)$$

$$\dot{n}_2 = \frac{r}{1+a}(1+a(1-n_1)-n_2(t-1))n_2, \quad (22)$$

которые служат простейшей моделью задачи о конкуренции двух видов. В (21), (22) все параметры положительны. С помощью замены $n_k = 1 + u_k$, $k = 1, 2$, выпишем уравнения в вариациях

$$\dot{u}_1 = -\frac{r}{1+a}(au_2 + u_1(t-1)), \quad \dot{u}_2 = -\frac{r}{1+a}(au_1 + u_2(t-1)) \quad (23)$$

системы (21), (22). В [2] показано, что характеристический квазиполином уравнений (23)

$$P(\mu) = \left(\mu + \frac{r}{1+a} \exp(-\mu) - \frac{ra}{1+a} \right) \left(\mu + \frac{r}{1+a} \exp(-\mu) + \frac{ra}{1+a} \right) \quad (24)$$

имеет корни $\pm i\omega$, только если

$$a = \cos \omega, \quad r = \frac{\omega(1 + \cos \omega)}{\sin \omega}, \quad 0 < \omega < \frac{\pi}{2}. \quad (25)$$

Матрица (2) для системы (23) соответственно есть

$$A(i\omega) = -\frac{r}{1+a} \begin{pmatrix} \exp(-i\omega) & a \\ a & \exp(-i\omega) \end{pmatrix}, \quad (26)$$

а для матрицы A^* справедлива формула:

$$A^*(-i\omega) = A(-i\omega).$$

Найдём векторы a и b , удовлетворяющие условиям (3), (5), (6).

Пусть $a = (a_1, a_2)^T$. Согласно (3) имеем

$$-\frac{r}{1+a}(a_1 \exp(-i\omega) + aa_2) = i\omega a_1, \quad -\frac{r}{1+a}(aa_1 + a_2 \exp(-i\omega)) = i\omega a_2.$$

Отсюда следует, что $a_1 = 1$, $a_2 = -1$.

Пусть $b = (b_1, b_2)^T$. В соответствии с (5) получаем

$$\frac{r}{1+a}(b_1 \exp(i\omega) + ab_2) = i\omega b_1, \quad \frac{r}{1+a}(ab_1 + b_2 \exp(-i\omega)) = i\omega b_2,$$

а значит, $b = b_0(1, -1)^T$, где о выборе комплексной постоянной b_0 скажем позднее.

Рассмотрим равенство (6). В рассматриваемом случае оно имеет вид:

$$2\bar{b}_0 - \frac{2r}{1+a} \exp(-i\omega) \bar{b}_0 = 1,$$

т.е.

$$\bar{b}_0 = \frac{1}{2 \left(1 - \frac{r}{1+a} \exp(-i\omega) \right)}.$$

Вычислим

$$\beta = i\omega \begin{pmatrix} 2i\omega + \frac{r}{1+a} \exp(-2i\omega) & \frac{ra}{1+a} \\ \frac{ra}{1+a} & 2i\omega + \frac{r}{1+a} \exp(-2i\omega) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Пусть $\beta = (\beta_1, \beta_2)^T$. Из (27) получаем

$$i\omega = \beta_1 \left(2i\omega + \frac{r}{1+a} \exp(-2i\omega) \right) + \beta_2 \frac{ar}{1+a}, \quad i\omega = \beta_1 \frac{ar}{1+a} + \beta_2 \left(2i\omega + \frac{r}{1+a} \exp(-2i\omega) \right).$$

Отсюда следует, что $\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$, где

$$\beta_0 = \frac{i\omega}{2i\omega + \frac{r}{1+a} \exp(-2i\omega) + \frac{ar}{1+a}}, \quad (28)$$

т.е. $\beta = \beta_0(1, 1)$.

Для того, чтобы воспользоваться формулой (20) посчитаем все входящие в неё величины.

$$ab = b_0(1, 1)^T, \quad a^2 = (1, 1)^T, \quad (a^2, ab) = 2\bar{b}_0, \quad (\beta, ab) = 2\beta_0\bar{b}_0, \quad (\beta, ab) - (a^2, ab) = 2\bar{b}_0(\beta_0 - 1).$$

Теорема 2. Для ляпуновской величины справедлива формула

$$d = 2i\omega\bar{b}_0(\beta_0 - 1). \quad (29)$$

Доказательство следует из приведённых выше рассуждений и теоремы 1.

Рассмотрим теперь вопрос о знаке Red .

Теорема 3. Справедливы неравенства $\text{Red} > 0$, $\omega_0 < \omega < \pi/3$, где $\omega_0 = 1,0007\dots$, и $\text{Red} < 0$ при остальных ω .

Доказательство. Имеем

$$2i\omega\bar{b}_0 = \frac{i\omega}{1 - \frac{r}{1+a} \exp(-i\omega)}. \quad (30)$$

Учитывая, что $P(i\omega) = 0$, получаем

$$2i\omega_0\bar{b}_0\beta_0 = - \frac{\omega^2 \left(1 - \frac{ra}{1+a} - i\omega \right) \left(\frac{ar}{1+a} + \frac{r}{1+a} \exp(2i\omega) - 2i\omega \right)}{\left| 1 - \frac{r}{1+a} \exp(-i\omega) \right|^2 \left| 2i\omega + \frac{r}{1+a} \exp(-2i\omega) + \frac{ar}{1+a} \right|^2}. \quad (31)$$

Из (29)-(31) следует, что

$$\text{Red} = - \frac{\omega^3 V}{\left| 1 - \frac{r}{1+a} \exp(-i\omega) \right|^2 \left| 2i\omega + \frac{r}{1+a} \exp(-2i\omega) + \frac{ar}{1+a} \right|^2},$$

где

$$\omega V = \left| \frac{ar}{1+a} + \frac{r}{1+a} \exp(-2i\omega) + 2i\omega \right|^2 + \left(1 - \frac{ra}{1+a} \right) \left(\frac{ar}{1+a} + \frac{r \cos 2\omega}{1+a} \right) + \frac{\omega r}{1+a} \sin 2\omega - 2\omega^2.$$

Учитывая (25), получим:

$$V = f(\omega) \frac{\omega}{\sin \omega} (\cos \omega + 1), \quad f(\omega) = 8 \cos^2 \omega - 10 \cos \omega + 3 + (2 \cos \omega - 1) \frac{\sin \omega}{\omega}. \quad (32)$$

График функции $f(\omega)$ приведён на рисунке 1.

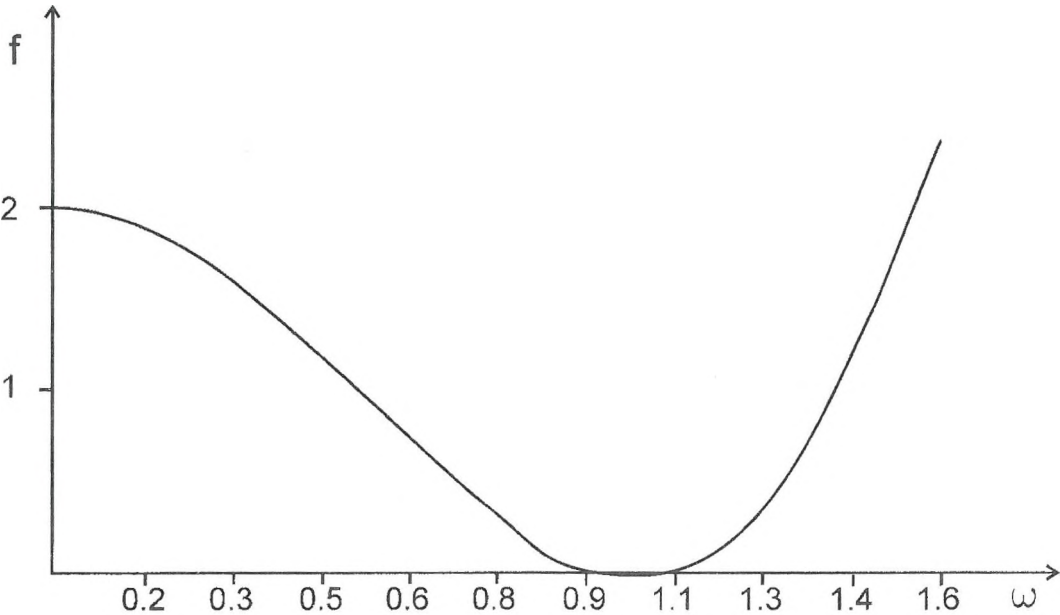


Рис. 1

На рис.2 в увеличенном масштабе показана окрестность, где $f(\omega) < 0$.

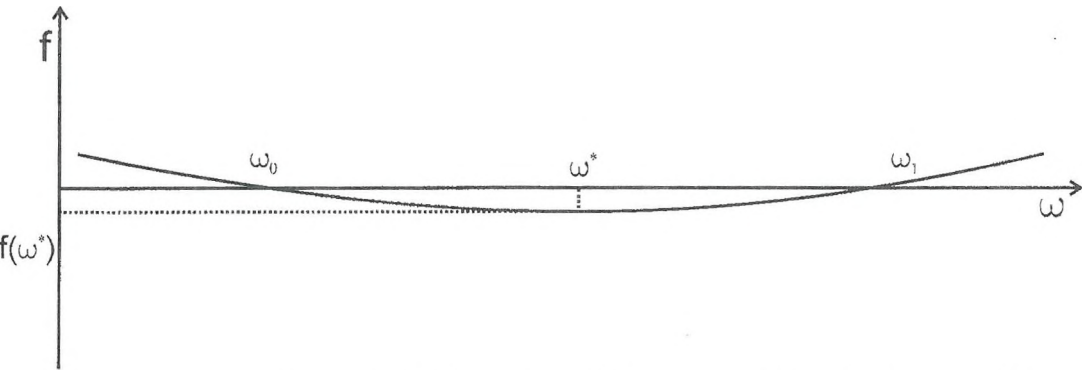


Рис. 2, $\omega_0 = 1,0007\dots$, $\omega^* = 1,024\dots$, $\omega_1 = \pi/3$, $f(\omega^*) = -0,0016\dots$

Заметим, что $\text{Re}d = 0,0057\dots$ при $\omega = \omega^*$.

3. Пусть в (21) - (22) $r = r(\omega)$ заменено на $(1 + \epsilon)r$, где $\epsilon > 0$ - малый параметр. Из (24) вытекает, что гладкая функция $\mu(\epsilon)$, $\mu(0) = i\omega$, удовлетворяет уравнению

$$\mu(\epsilon) + \frac{r(1 + \epsilon)}{1 + a} \exp(-\mu(\epsilon)) = \frac{ra(1 + \epsilon)}{1 + a}. \tag{33}$$

Из (33) следует что

$$\mu' = \left. \frac{d}{d\epsilon} \mu(\epsilon) \right|_{\epsilon=0} = \frac{i\omega}{1 - \frac{r}{1+a} \exp(-i\omega)};$$

в частности,

$$\text{Re}\mu' = \frac{\omega^2}{\left| 1 - \frac{r}{1+a} \exp(-i\omega) \right|^2}. \tag{34}$$

Из формул (32) и (34) вытекает, что при $0 < \omega < \omega_0$ и $\frac{\pi}{3} < \omega < \frac{\pi}{2}$ аттрактором системы (21)-(22) является устойчивый цикл, причём колебания происходят около единичного состояния равновесия с амплитудой

$$2\sqrt{\varepsilon \frac{W(\omega)}{\omega V(\omega)}}, \quad (35)$$

где

$$W = \frac{\omega^2}{\sin^2 \omega} (1 + \cos^2 \omega + 2 \cos \omega \cos 2\omega) + 4\omega^2 (1 - 2 \cos \omega).$$

Формула (35) и свойства функции $f(\omega)$ позволяют сделать следующий вывод.

При прохождении участка $\omega_0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{3}$ колебания теряют локальность, т.е. становятся значительными. Кроме того, формула (35) теряет смысл при $\omega \rightarrow 0$.

Авторы благодарят Ю.С. Колесова за постоянное внимание к работе и обсуждение результатов.

Список литературы

1. Колесов Ю.С. Об одной бифуркационной теореме в теории автоколебаний распределённых систем // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21, № 10. С. 1709-1713.
2. Пендюров А.Д., Пендюров Д.А. Феномен конкуренции в простейшем варианте // Современ. проблемы мат. и инф. 2005. Вып. 7. С. 101-103.