

УДК 517.9

Бифуркация плоских волн обобщенного кубического уравнения Шредингера в цилиндрической области

Куликов Д.А.  
Ярославский государственный университет  
150 000, Ярославль, Советская, 14

Аннотация

В данной работе рассматривается вопрос о существовании и устойчивости автомодельных волн обобщенного кубического уравнения Шредингера. Рассмотрен вопрос о бифуркации от этих решений автоволн более сложной структуры. При исследовании бифуркационной проблемы был использован метод нормальных форм.

1. Постановка задачи. В работе рассматривается обобщенное уравнение Шредингера

$$u_t = u - (1 + ic)u|u|^2 - id\Delta u, \tag{1}$$

где  $u = u(t, x, z)$  – комплекснозначная функция,  $\Delta$  – оператор Лапласа по пространственным переменным,  $d, c$  – действительные постоянные, причем  $d > 0$ , знак  $c$  произволен. Уравнение (1) является естественным обобщением нелинейного уравнения Шредингера и, в свою очередь, является частным случаем известного уравнения Гинзбурга – Ландау (см. [1 – 4]). Уравнение (1) рассмотрим в случае, когда  $u(t, x, z)$  удовлетворяет следующим граничным условиям

$$u(t, x + 2\pi, z) \equiv u(t, x, z), \quad u_z \Big|_{z=0} = u_z \Big|_{z=l} = 0, \tag{2}$$

где  $x \in R, z \in [0; l]$ . В рамках этой работы ограничимся случаем, когда  $l = \pi + \delta_1$ , а  $|\delta_1| \ll 1$ . После замены  $z = \frac{\pi + \delta_1}{\pi} z_1$  краевая задача (1), (2) переписется уже так

$$u_t = u - (1 + ic)u|u|^2 - id(u_{xx} + (1 + \delta)u_{z_1 z_1}), \tag{3}$$

$$u(t, x + 2\pi, z_1) = u(t, x, z_1), \quad u_{z_1} \Big|_{z_1=0} = u_{z_1} \Big|_{z_1=\pi} = 0. \tag{4}$$

Здесь  $\delta = \delta(\delta_1)$  – малый параметр. Далее индекс "1" у переменной  $z$  будем опускать.

Простая проверка показывает, что краевая задача (3), (4) имеет решения в виде периодических по  $t$  бегущих волн:

$$u(t, x, z) = \exp(i\sigma_n t + inx),$$

где  $n \in Z, \sigma_n = dn^2 - c$ . В работе продолжают исследования свойств этих решений [5], но несколько в ином плане. Далее будет рассмотрен вопрос о структуре окрестности указанных решений в достаточно малой окрестности в смысле нормы фазового пространства решений краевой задачи (3), (4). В качестве фазового пространства естественно выбрать  $W^2_2(D, C)$  – замыкание в метрике  $W^2_2(D, C)$  линейала гладких комплекснозначных функций, удовлетворяющих граничным условиям (4). Переменные  $x, z$  при этом принадлежат области  $D = \{(x, z) : 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq z \leq \pi\}$ .

На первом этапе рассмотрения краевой задачи (3), (4) ограничимся базисным случаем  $\delta = 0$  ( $\delta_1 = 0$ ).

2. Об устойчивости бегущих волн в линейном приближении. Замена

$$u(t, x, z) = \exp(i\sigma_n t + inx)v(t, x, z) \tag{5}$$

после введения новых независимых переменных

$$t = t, \quad y = x + 2dnt, \quad z = z,$$

сводит задачу (3), (4) к рассмотрению краевой задачи

$$v_t = (1 + ic)(1 - |v|^2)v - id\Delta v, \tag{6}$$

$$v(t, y + 2\pi, z) = v(t, y, z), \quad v_z \Big|_{z=0} = v_z \Big|_{z=\pi} = 0 \quad (7)$$

Нетрудно найти, что краевая задача (6), (7) имеет решение  $v = \exp(i\varphi)$ , где  $\varphi \in R$ . Линеаризация на состоянии равновесия  $v = 1$  приводит к исследованию устойчивости нулевого решения следующей краевой задачи

$$w_t = Lw, \quad (8)$$

$$w(s, y + 2\pi, z) = w(s, y, z), \quad w_z \Big|_{z=0} = w_z \Big|_{z=\pi} = 0, \quad (9)$$

где  $Lw \equiv -id\Delta w - (1 + ic)(w + \bar{w})$ . Стандартный анализ спектра линейного оператора  $L$  показывает, что справедливо следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Спектру линейного оператора  $L$  при всех  $d$  и  $c$  принадлежит собственное число  $\lambda_0 = 0$ , которому отвечает собственная функция  $e_0(y, z) = i$ . При  $d > 2c$  остальные собственные числа этого оператора лежат в полуплоскости, выделяемой неравенством  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ , а при  $d < 2c$  имеются собственные числа, находящиеся в правой полуплоскости комплексной плоскости. Наконец, при  $d = d_{\text{кр}} = 2c$  все собственные числа лежат в левой полуплоскости, кроме одного – нулевого собственного значения кратности 4. Ему соответствуют четыре линейно независимые собственные функции*

$$e_0 = i, \quad e_1 = (-c + i) \cos y, \quad e_2 = (-c + i) \sin y, \quad e_3 = (-c + i) \cos z.$$

Отметим, что величина  $d_{\text{кр}}$  находится, если  $c > 0$ . Далее ограничимся именно этим случаем. Рассмотрим теперь оператор

$$L_0 w = -2ci\Delta w - (1 + ic)(w + \bar{w}),$$

т.е. оператор  $L$  при критическом значении  $d$ . При таком выборе  $d$  уравнение

$$L_0 w = g \quad (10)$$

разрешимо не при любом выборе правой части этого уравнения. При построении нормальной формы могут встречаться следующие случаи выбора  $g$ .

$$1) g(y, z) = g_0; \quad 2) g(y, z) = g_1 \cos y; \quad 3) g(y, z) = g_2 \sin y;$$

$$4) g(y, z) = g_3 \cos z; \quad 5) g(y, z) = g_{m,k} \cos my \cos kz; \quad 6) g(y, z) = g_{m,k} \sin my \cos kz.$$

Здесь  $g_0, g_1, g_2, g_3, g_{m,k} \in C$ ,  $m, k \in Z$  и таковы, что  $m^2 + k^2 \geq 2$ .

Отметим достаточно легко проверяемое утверждение.

**Лемма 2.** *При первом варианте выбора  $g$  необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (10) является выполнение равенства*

$$\operatorname{Im} g_0 = c \operatorname{Re} g_0. \quad (11)$$

При выборе  $g$  в вариантах 2), 3), 4) необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (10) является выполнение уже следующих равенств

$$\operatorname{Im} g_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (12)$$

В случаях 5) и 6) рассматриваемое уравнение разрешимо при любом выборе постоянных  $g_{m,k}$ .

Равенства (11), (12) будут использованы далее при построении нормальной формы – системы дифференциальных уравнений, отвечающей за динамику решений краевой задачи (6), (7) в окрестности состояния равновесия  $v = 1$ .

**3. Построение нормальной формы.** Положим теперь  $d = 2c - \varepsilon$ , где  $|\varepsilon| \ll 1$ . Вместе с краевой задачей (6), (7) рассмотрим вспомогательную задачу при таком же выборе  $d$ :

$$v_t = (1 + ic)(1 - |v|^2)v - i(2c - \varepsilon)\Delta v, \quad (13)$$

$$v_y \Big|_{y=0} = v_y \Big|_{y=\pi} = 0, \quad v_z \Big|_{z=0} = v_z \Big|_{z=\pi} = 0. \quad (14)$$

При анализе краевой задачи, естественно, считаем, что  $y \in [0; \pi]$ . Построим нормальную форму краевой задачи (13), (14) в окрестности единичного состояния равновесия. Понятно, что, как и в случае краевой задачи (6), (7), вспомогательная задача (13), (14) также имеет семейство состояний равновесия

$v = \exp(i\varphi)$  ( $\varphi \in R$ ). Но спектр устойчивости состояния равновесия  $v = 1$  теперь устроен проще, чем при изучении аналогичного вопроса для краевой задачи (8), (9). При  $\varepsilon = 0$  ( $d = 2c$ ) спектру оператора  $L_0 v$ , рассматриваемого уже вместе с краевыми условиями (14), принадлежит нулевое трехкратное значение. Ему отвечают три линейно независимые собственные функции  $e_0 = i$ ,  $e_1 = (-c+i) \cos y$ ,  $e_3 = (-c+i) \cos z$ . Поэтому в случае краевой задачи (13), (14) центральное многообразие трехмерно и, следовательно, нормальная форма состоит из трех обыкновенных дифференциальных уравнений. Решения на этом трехмерном многообразии представляется возможным искать в следующем виде:

$$v(t, y, z, \varepsilon) = \exp(i\varphi(t))(1 + w(t, y, z, \varepsilon)). \quad (15)$$

Здесь

$$w(t, y, z, \varepsilon) = w_1(\eta_1, \eta_2, y, z) + w_2(\eta_1, \eta_2, y, z) + w_3(\eta_1, \eta_2, y, z) + \varepsilon w_0(\eta_1, \eta_2, y, z) + \dots, \quad (16)$$

где  $w_1, w_0$  – линейные формы относительно  $\eta_1, \eta_2$ , причем

$$w_1 = (-c + i)(\eta_1 \cos y + \eta_2 \cos z), \quad (17)$$

$w_2, w_3$  – соответственно квадратичная и кубическая форма по переменным  $\eta_1, \eta_2$ . Все слагаемые ряда (16), естественно, удовлетворяют краевым условиям (14). Точками обозначены слагаемые более высокого порядка малости по отношению к  $\eta_1, \eta_2, \varepsilon$ . Наконец,  $\eta_1(t), \eta_2(t), \varphi(t)$  – действительные функции, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений, которую принято называть нормальной формой краевой задачи (13), (14)

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \beta_1 \eta_1^2 + \beta_2 \eta_2^2 + \dots, \\ \dot{\eta}_1 &= \varepsilon \alpha_1 \eta_1 + \eta_1(g_{11} \eta_1^2 + g_{12} \eta_2^2) + \dots, \\ \dot{\eta}_2 &= \varepsilon \alpha_2 \eta_2 + \eta_2(g_{21} \eta_1^2 + g_{22} \eta_2^2) + \dots, \end{aligned} \quad (18)$$

где точками, как обычно, обозначены слагаемые более высокого порядка малости по сравнению с выписанными.

Для того, чтобы определить коэффициенты нормальной формы, следует выписать уравнение для комплекснозначной функции  $w(t, y, z, \varepsilon)$ :

$$w_t + i\dot{\varphi}(1 + w) = L_0 w - i\varepsilon \Delta w - (1 + ic)(2w\bar{w} + w^2 + w^2\bar{w}).$$

Отметим сразу, что слагаемое  $w_1$ , определяемое формулой (17), принадлежит ядру оператора  $L_0$  при любом выборе  $\eta_1, \eta_2$ . Остальные члены суммы (16) находятся как решения линейных неоднородных уравнений, дополненных граничными условиями (14). Выпишем основные из них, необходимые для определения коэффициентов нормальной формы. Для  $w_2 = w_2(\eta_1, \eta_2, y, z)$  получаем

$$L_0 w_2 = i(\beta_1 \eta_1^2 + \beta_2 \eta_2^2) + (1 + ic)(2w_1 \bar{w}_1 + w_1^2). \quad (19)$$

Приравнявая кубические слагаемые по  $\eta_1, \eta_2$ , формируем неоднородное уравнение уже для комплекснозначной функции  $w_3 = w_3(\eta_1, \eta_2, y, z)$

$$\begin{aligned} L_0 w_3 &= i(\beta_1 \eta_1^2 + \beta_2 \eta_2^2)w_1 + (1 + ic)(2w_1 \bar{w}_2 + 2w_2 \bar{w}_1 + 2w_1 w_2 + w_1^2 \bar{w}_1) + \\ &+ \eta_1(g_{11} \eta_1^2 + g_{12} \eta_2^2)(-c + i) \cos y + \eta_2(g_{21} \eta_1^2 + g_{22} \eta_2^2)(-c + i) \cos z. \end{aligned} \quad (20)$$

Наконец, для  $w_0 = w_0(\eta_1, \eta_2, y, z)$  получаем

$$L_0 w_0 = i\Delta w_1 + \alpha_1 \eta_1(-c + i) \cos y + \alpha_2 \eta_2(-c + i) \cos z. \quad (21)$$

Из соображений симметрии сразу вытекает, что  $g_{11} = g_{22} = a$ ,  $g_{21} = g_{12} = b$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ . Из условий разрешимости неоднородного уравнения (19) находим, что  $\beta = c(c^2 + 1)$ , а соответствующее решение имеет вид

$$\begin{aligned} w_2 &= -\frac{(1+i)(5c^2+1)}{4}(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \left(\frac{3c^2-1}{12} - i\frac{9c^2+1}{24c}\right)\eta_1^2 \cos 2y + \\ &+ \left(\frac{3c^2-1}{12} - i\frac{9c^2+1}{24c}\right)\eta_2^2 \cos 2z + (3c^2-1-4ci)\eta_1 \eta_2 \cos z \cos y. \end{aligned}$$

Для определения остальных коэффициентов нормальной формы следует применить условия разрешимости для неоднородного уравнения (20). Используя их, получаем, что

$$a = -\frac{30c^4 - 9c^2 + 1}{6}, \quad b = 4c^2(c^2 - 1).$$

Наконец, также из рассмотрения уравнения (21) находим, что  $\alpha = c$ .

**4. Анализ нормальной формы.** В системе уравнений (18) положим

$$\eta_1 = \sqrt{\varepsilon c} \sqrt{\rho_1}, \quad \eta_2 = \sqrt{\varepsilon c} \sqrt{\rho_2},$$

считая, что  $\eta_1 \geq 0, \eta_2 \geq 0, \rho_1 \geq 0, \rho_2 \geq 0$ . После замены времени  $\tau = 2\varepsilon c t$  получаем следующую систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= \rho_1 - \rho_1(a_0\rho_1 + b_0\rho_2), \\ \dot{\rho}_2 &= \rho_2 - \rho_2(b_0\rho_1 + a_0\rho_2), \\ \dot{\varphi} &= \frac{\beta}{2}(\rho_1 + \rho_2), \end{aligned} \tag{22}$$

где точкой обозначена уже производная по  $\tau$ , а правые части выписаны с точностью до  $o(\sqrt{\varepsilon})$ . Наконец,  $a_0 = -a, b_0 = -b$ .

Прежде чем приступить к анализу системы (22) отметим, что  $a_0 = \frac{30c^4 - 9c^2 + 1}{6} > 0$  при любых  $c$ . Понятно, что главную роль играет анализ уравнений для амплитудных переменных  $\rho_1, \rho_2$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= \rho_1 - \rho_1(a_0\rho_1 + b_0\rho_2), \\ \dot{\rho}_2 &= \rho_2 - \rho_2(b_0\rho_1 + a_0\rho_2). \end{aligned} \tag{23}$$

**Лемма 3.** Система дифференциальных уравнений (23) имеет следующие нетривиальные состояния равновесия

$$\begin{aligned} E_1 : \rho_1 &= \frac{1}{a_0}, \rho_2 = 0; \quad E_2 : \rho_1 = 0, \rho_2 = \frac{1}{a_0}; \\ E_3 : \rho_1 &= \rho_2 = \frac{1}{a_0 + b_0}. \end{aligned}$$

Третье состояние равновесия  $E_3$  является изолированным, если  $a_0 \neq b_0$  ( $c^2 \neq \frac{33 \pm \sqrt{873}}{108}$ ). При этих исключительных значениях  $c$  существует континуум состояний равновесия

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{1}{a_0}.$$

Этот случай дальше не будет рассматриваться. Отметим также, что  $a_0 + b_0 > 0$  при всех  $c$ .

Рассмотрим вопрос об устойчивости состояний равновесия  $E_1, E_2, E_3$ .

**Лемма 4.** Состояния равновесия  $E_1, E_2$  асимптотически устойчивы, если

$$a_0 < b_0, \tag{24}$$

и неустойчивы, если

$$a_0 > b_0. \tag{25}$$

Состояние равновесия  $E_3$  асимптотически устойчиво, если имеет место неравенство (25) и неустойчиво, если выполнено неравенство (24).

Для доказательства следует линеаризовать систему (23) на исследуемом состоянии равновесия. При этом при анализе спектра их устойчивости следует учесть то обстоятельство, что  $a_0 + b_0 > 0$ . Нетрудно проверить, что неравенство (25) выполнено, если  $c^2 \in (0, c_1^2) \cup (c_2^2, \infty)$  и неравенство (24) при  $c^2 \in (c_1^2, c_2^2)$ , где  $c_1^2 = \frac{33 - \sqrt{873}}{108} \approx 0.032, c_2^2 = \frac{33 + \sqrt{873}}{108} \approx 0.579$  ( $c_1 \approx 0.179, c_2 \approx 0.761$ ).

В заключении этого пункта отметим, что вспомогательная система дифференциальных уравнений (23) диссипативна. Это вытекает из неравенства  $a_0\rho_1^2 + 2b_0\rho_1\rho_2 + a_0\rho_2^2 > 0$  ( $\rho_1, \rho_2 > 0$ ).

**5. Основные результаты.** Напомним, что здесь речь идет пока о случае  $\delta = 0$ . Используя методику, изложенную в монографии [6], можно показать, что существует такое достаточно малое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  и  $d = 2c - \varepsilon$  справедливы следующие три утверждения.

**Теорема 1.** *Состоянию равновесия  $E_1$  системы дифференциальных уравнений (23) соответствует два цикла краевой задачи (13), (14)*

$$v_1(t, y, z, \varepsilon) = \exp(i\varepsilon\beta_1 t) \left[ 1 \pm \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\gamma_1}(-c + i) \cos y + \varepsilon\gamma_1(\gamma_{10} + \gamma_{11} \cos 2y) + \dots \right], \quad (26)$$

где точками в квадратных скобках обозначены слагаемые более высокого порядка малости по сравнению с предшествующими слагаемыми в этих скобках,

$$\gamma_1 = \frac{c}{a_0}, \beta_1 = \gamma_1 c(c^2 + 1), \gamma_{10} = -\frac{(1+i)(5c^2 + 1)}{4}, \gamma_{11} = \frac{3c^2 - 1}{12} - i\frac{9c^2 + 1}{24c}.$$

Этот цикл орбитально асимптотически устойчив, если выполнено неравенство (24), и неустойчив, если выполнено неравенство (25).

**Теорема 2.** *Состоянию равновесия  $E_2$  системы дифференциальных уравнений (23) соответствует два цикла краевой задачи (13), (14)*

$$v_2(t, y, z, \varepsilon) = \exp(i\varepsilon\beta_2 t) \left[ 1 \pm \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\gamma_2}(-c + i) \cos z + \varepsilon\gamma_2(\gamma_{20} + \gamma_{21} \cos 2z) + \dots \right], \quad (27)$$

где точки означают то же самое, что в формуле (26) теоремы (1),  $\gamma_2 = \gamma_1, \beta_2 = \beta_1, \gamma_{20} = \gamma_{10}, \gamma_{21} = \gamma_{11}$ .

Условия устойчивости этих циклов совпадают с условиями устойчивости для циклов, рассмотренных в теореме 1.

**Теорема 3.** *Состоянию равновесия  $E_3$  системы дифференциальных уравнений (23) соответствует уже четыре цикла вспомогательной краевой задачи (13), (14)*

$$v_3(t, y, z, \varepsilon) = \exp(i\varepsilon\beta_3 t) \left[ 1 \pm \sqrt{\varepsilon c} \Theta_1(-c + i) \cos y \pm \sqrt{\varepsilon c} \Theta_2(-c + i) \cos z + \right. \\ \left. + \varepsilon c (\Theta_0 + \Theta_3 \cos 2y + \Theta_4 \cos 2z \pm \Theta_5 \cos y \cos z) + \dots \right], \quad (28)$$

где точками обозначены слагаемые более высокого порядка малости по сравнению с предшествующими в квадратных скобках

$$\beta_3 = \frac{2c^2(c^2 + 1)}{a_0 + b_0}, \Theta_0 = \frac{-(1+i)(5c^2 + 1)}{2(a_0 + b_0)}, \Theta_1 = \Theta_2 = \sqrt{\frac{1}{a_0 + b_0}}, \\ \Theta_5 = \frac{(3c^2 - 1 - 4ci)}{(a_0 + b_0)}, \Theta_3 = \Theta_4 = \frac{1}{a_0 + b_0} \left( \frac{3c^2 - 1}{12} - i\frac{9c^2 + 1}{24c} \right).$$

Каждый из этих циклов орбитально асимптотически устойчив, если выполнено неравенство (25), и неустойчив при выполнении неравенства (24).

Сразу отметим, что решения  $v_1(t, y, \varepsilon), v_2(t, z, \varepsilon), v_3(t, y, z, \varepsilon)$  вспомогательной краевой задачи (13), (14) удовлетворяют уже и краевой задаче (6), (7) при  $d = 2c - \varepsilon$ . В этом легко убедиться, продолжив по переменной  $y$  эти функции с отрезка  $[0, \pi]$  на отрезок  $[-\pi, \pi]$  четным образом, а затем на всю числовую ось по периодичности с периодом  $2\pi$ . Более того, в силу трансляционной инвариантности по переменной  $y \in \mathbb{R}$  решениями краевой задачи (6), (7) будут и функции  $v_1(t, y + \psi, \varepsilon), v_3(t, y + \psi, z, \varepsilon)$ , где  $\psi$  – произвольная действительная постоянная. Возвращаясь теперь к старым переменным и используя замену (5), можно получить некоторые следствия, касающиеся исходной задачи (3), (4).

**Следствие 1 (из теоремы 1).** *Состоянию равновесия  $E_1$  системы дифференциальных уравнений (23) соответствует счетное число двумерных инвариантных торов. Решения на каждом из них допускают асимптотическое представление*

$$u_n(t, x, z, \varepsilon) = \exp(i\sigma_n t + inx + i\varepsilon\beta_1 t) \left[ 1 + \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\gamma_1}(-c + i) \cos(x + 4cnt + \psi_n) + \right. \\ \left. + \varepsilon\gamma_1(\gamma_{10} + \gamma_{11} \cos(2x + 8cnt + 2\psi_n)) + o(\varepsilon) \right], \quad (29)$$

которое получено из формулы (26). Условия устойчивости этих торов повторяют условия устойчивости из теоремы 1.

**Следствие 2 (из теоремы 2).** Состоянию равновесия  $E_2$  системы дифференциальных уравнений (23) соответствует счетное число циклов краевой задачи (3), (4)

$$u_n(t, x, z, \varepsilon) = \exp(i\sigma_n t + inx + i\varepsilon\beta_2 t) \left[ 1 \pm \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\gamma_2}(-c + i) \cos z + \varepsilon\gamma_2(\gamma_{20} + \gamma_{21} \cos 2z) + o(\varepsilon) \right]. \quad (30)$$

Условия их устойчивости те же, что и для решения (27) из теоремы 2.

**Следствие 3 (из теоремы 3).** Состоянию равновесия  $E_3$  системы дифференциальных уравнений (23) соответствует счетное число двумерных инвариантных торов, для решений на которых имеем асимптотическую формулу

$$u_n(t, x, z, \varepsilon) = \exp(i\sigma_n t + inx + i\varepsilon\beta_3 t) \left[ 1 + \sqrt{\varepsilon c} \Theta_1(-c + i) \cos(x + 4cnt + \psi_n) \pm \sqrt{\varepsilon c} \Theta_2(-c + i) \cos z + \right. \\ \left. + \varepsilon c (\Theta_0 + \Theta_3 \cos(2x + 8cnt + 2\psi_n) + \Theta_4 \cos 2z \pm \Theta_5 \cos(x + 4cnt + \psi_n) \cos z) + o(\varepsilon) \right], \quad (31)$$

где  $\psi_n \in R$ . Ясно, что условия их устойчивости те же, что и для решения (28) из теоремы 3.

**6. "Несимметричный" случай.** Речь идет о той ситуации, когда  $l \neq \pi$  ( $\delta \neq 0$ ). Предположим, что  $\delta = -r\varepsilon$ , где  $r = \text{const}$ , которая может быть постоянной произвольного знака. В этом случае практически дословно повторяются построения предшествующих пунктов и, как ранее, центральным местом является сведение задачи к исследованию двух обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитудных переменных, т.е. уравнений, подобных уравнениям (23). В этом случае они приобретают вид

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= \rho_1 - \rho_1(a_0\rho_1 + b_0\rho_2), \\ \dot{\rho}_2 &= g\rho_2 - \rho_2(b_0\rho_1 + a_0\rho_2), \end{aligned} \quad (32)$$

где  $g = g(r) = 1 + 2cr$ . Отметим, что при  $l = \pi$  получаем  $g = 1$ , т.е. ранее изученную систему дифференциальных уравнений (23).

Система дифференциальных уравнений (32) имеет следующие состояния равновесия:

$$E_{1g} : \rho_1 = \frac{1}{a_0}, \rho_2 = 0; \quad E_{2g} : \rho_1 = 0, \rho_2 = \frac{g}{a_0}.$$

Состояние равновесия  $E_{2g}$  существует, если  $r$  таково, что  $g > 0$ . Наконец,

$$E_{3g} : \rho_1 = \frac{1}{a_0 + b_0} \left( \frac{a_0 - b_0 g}{a_0 - b_0} \right), \rho_2 = \frac{1}{a_0 + b_0} \left( \frac{a_0 g - b_0}{a_0 - b_0} \right).$$

Состояние равновесия  $E_{3g}$  существует, если выполнены неравенства

$$\frac{a_0 - b_0 g}{a_0 - b_0} > 0, \quad \frac{a_0 g - b_0}{a_0 - b_0} > 0. \quad (33)$$

Нетрудно проверить, что состояние равновесия  $E_{1g}$  системы дифференциальных уравнений (32) асимптотически устойчиво, если

$$a_0 g - b_0 < 0,$$

и неустойчиво, если

$$a_0 g - b_0 > 0.$$

Состояние равновесия  $E_{2g}$  асимптотически устойчиво, если выполнено следующее неравенство:

$$a_0 - b_0 g < 0,$$

и неустойчиво, если

$$a_0 - b_0 g > 0.$$

Наконец, состояние равновесия  $E_{3g}$  асимптотически устойчиво, если

$$a_0 - b_0 > 0,$$

и неустойчиво, если выполнено противоположное неравенство.

При проверке последнего утверждения существенно используются неравенства (33).

Состояние равновесия  $E_{1g}$  системы дифференциальных уравнений (32) порождает счетное число двумерных инвариантных торов краевой задачи (3), (4). Соответствующие решения восстанавливаются по формуле (29). Условия их устойчивости совпадают с условиями устойчивости состояния равновесия  $E_{1g}$  системы (32).

Состоянию равновесия  $E_{2g}$  соответствует счетное число циклов краевой задачи (3), (4), для решений на которых справедлива асимптотическая формула (30), где, впрочем, необходимо незначительно откорректировать коэффициенты, заменив

$$\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 g.$$

Устойчивость(неустойчивость) этих циклов наследует аналогичные свойства  $E_{2g}$ .

Наконец, состоянию равновесия  $E_{3g}$  соответствует счетное семейство двумерных инвариантных торов, решения на которых задаются асимптотической формулой, схожей с формулой (31), в которой следует откорректировать коэффициенты, заменив

$$\begin{aligned} \beta_3 &\rightarrow \frac{c^2(1+g)(c^2+1)}{a_0+b_0}, \quad \Theta_1 \rightarrow \sqrt{\frac{a_0-gb_0}{a_0^2-b_0^2}}, \quad \Theta_2 \rightarrow \sqrt{\frac{a_0g-b_0}{a_0^2-b_0^2}}, \\ \Theta_3 &\rightarrow \frac{a_0-gb_0}{a_0^2-b_0^2} \left( \frac{3c^2-1}{12} - i \frac{9c^2+1}{24c} \right), \quad \Theta_0 \rightarrow -\frac{(1+g)}{(a_0+b_0)} \frac{(1+ic)(5c^2+1)}{4}, \\ \Theta_4 &\rightarrow \frac{a_0g-b_0}{a_0^2-b_0^2} \left( \frac{3c^2-1}{12} - i \frac{9c^2+1}{24c} \right), \quad \Theta_5 \rightarrow \sqrt{\frac{a_0g-b_0}{a_0^2-b_0^2}} \sqrt{\frac{a_0-gb_0}{a_0^2-b_0^2}} (3c^2-1-4ci). \end{aligned}$$

Торы, соответствующие состояниям равновесия  $E_{3g}$ , наследуют свойства устойчивости этого состояния равновесия.

**7. Заключение.** Как уже ранее отмечалось, данная работа является естественным продолжением [5]. Следует добавить, что она имеет точки соприкосновения с работой [7], где была рассмотрена задача о бифуркациях от однородного цикла для уравнения Гинзбурга – Ландау в плоской области. В одномерном случае вопрос о бифуркации бегущих волн был рассмотрен в работе [8], но следует отметить, что динамика решений данной краевой задачи намного богаче.

Автор выражает благодарность профессору А.Ю. Колесову за постановку задачи и ценные советы при работе над статьей.

## Список литературы

1. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электродинамике. М.: Советское радио, 1977
2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
3. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Физматлит, 1997.
4. Scheuer J., Malomed B.A. //Physika D. 2002. V. 161. P. 102 – 115.
5. Колесов А.Ю., Куликов А.Н., Розов Н.Х. Цилиндрические бегущие волны обобщенного кубического уравнения Шредингера // Доклады РАН. 2006. Вып. 73. №1. С. 125-129.
6. Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. М.: Физматлит, 2004.
7. Глызин С.Д., Колесов А.Ю. Установившиеся режимы уравнения Хатчинсона с малой диффузией в случае квадрата // Качественные методы исследования операторных уравнений. Ярославль, 1988. С. 44 – 54.
8. Куликов А.Н. Бифуркация автоколебаний в двух сингулярно возмущенных периодических краевых задачах // Математика в ЯрГУ: Сборник статей к 25 - летию математического факультета. Ярославль, 2001. С. 183 – 193.