

УДК 517.928; 517.954

Поведение решений нормальной формы системы трех связанных разностных автогенераторов

Глызин С.Д.¹

Ярославский государственный университет,
150 000, Ярославль, Советская, 14

Аннотация

Изучается вопрос об аттракторах системы трех связанных двумерных отображений. Каждое парциальное отображение служит математической моделью автогенератора с релейным усилителем и с отрезком длинной линии без искажений в цепи обратной связи. Для модельного отображения построена нормализованная система обыкновенных дифференциальных уравнений, динамические свойства которой подробно изучены. Показано, что изучаемая система связанных осцилляторов имеет колебательные режимы разных масштабов.

1. Алгоритм нормализации отображений в окрестности неподвижной точки

Локальный анализ отображений в окрестности неподвижной точки обычно осуществляется путем построения некоторых нормализованных систем разностных уравнений. Общий алгоритм перехода изложен, например, в [1]. В ряде случаев, однако, такой анализ удобнее производить путем сведения исследуемого объекта к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, некоторые из этих случаев представлены в работе [2]. Опишем основную конструкцию общего вида, позволяющую получить нормальную форму отображения в виде системы дифференциальных уравнений, и приведем содержательный пример ее использования. Как и в [1], рассмотрим в вещественном банаховом пространстве E отображение

$$u \rightarrow A_0 u + \varepsilon A_1 u + F_2(u, u) + F_3(u, u, u), \quad (1)$$

определяющее функцию $u(t+1)$, $t \in [-1, 0]$ через функцию $u(t)$. Здесь $u(t)$ при каждом t лежит в R^n , $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр, A_0 — $n \times n$ вещественная матрица, имеющая m пар собственных чисел на единичной окружности комплексной плоскости так, что $A_0 a_k = e^{i\omega_k} a_k$, $k = 1, \dots, m$. Остальные собственные числа A_0 лежат внутри единичного круга. Будем считать, что $F_2(u, u)$ и $F_3(u, u, u)$ — линейные по каждому своему аргументу функции, определяющие квадратичную и кубическую нелинейности правой части.

Отображение (1) при каждом t определяет обычное разностное уравнение вида

$$u(t+1) = (A_0 + \varepsilon A_1)u(t) + F_2(u(t), u(t)) + F_3(u(t), u(t), u(t)). \quad (2)$$

Выполним в (2) замену

$$u(t) = \sqrt{\varepsilon} u_0(t, s) + \varepsilon u_1(t, s) + \varepsilon^{3/2} u_2(t, s) + \varepsilon^2 u_3(t, s) + \varepsilon^{5/2} u_4(t, s) + \dots, \quad (3)$$

где $u_0(t, s) = \sum_{k=1}^m (\xi_k(s) \exp(i\omega_k t) a_k + \bar{\xi}_k(s) \exp(-i\omega_k t) \bar{a}_k)$, $s = \varepsilon t$. Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$ приводит на третьем шаге к уравнению

$$u_2(t+1, s) - A_0 u_2(t, s) = - \sum_{k=1}^m \left(\dot{\xi}_k(s) \exp(i\omega_k(t+1)) a_k + \dot{\bar{\xi}}_k(s) \exp(-i\omega_k(t+1)) \bar{a}_k \right) + 2F_2(u_0, u_1) + F_3(u_0, u_0, u_0) + A_1 u_0. \quad (4)$$

В зависимости от того, какие резонансные соотношения связывают ω_k , могут быть получены различные условия разрешимости задачи (4), ясно, однако, что эти соотношения будут включать следующие слагаемые:

$$\dot{\xi}_k = \gamma_k \xi_k + \xi_k \sum_{j=1}^m d_{kj} |\xi_j|^2 + \dots, \quad (5)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке программы „Университеты России“ (грант 04.01.452) и „Развитие научного потенциала высшей школы“ (проект РНП.2.1.1.630).

где γ_k, d_{kj} – числа, определяемые правыми частями (2). Грубым режимам системы (5) будут соответствовать решения (2) той же устойчивости с асимптотикой (3).

2. Построение отображения, моделирующего динамику взаимодействия трех автогенераторов

Рассмотрим применение этого алгоритма на примере отображения, порождаемого системой трех связанных *RCLG*-генераторов. Исходная модель имеет вид (см., например, [3])

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + 2\mu \frac{\partial u_j}{\partial t} + \mu^2 u_j = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial u_j}{\partial x} \right|_{x=1} = 0, \quad u_j|_{x=0} + \varphi(K(u_j|_{x=1} + \alpha u_{j-1}|_{x=0})) = 0, \quad u_0 = u_3. \quad (7)$$

Здесь $u_j(t, x)$ – нормированные напряжения в линиях соответствующих генераторов, 2μ – потери в линии, которые ниже предполагаются малыми, $K > 0$ – коэффициент усиления, а $|\alpha| \ll 1$ – параметр, характеризующий связь между генераторами. Функция $\varphi(z)$ получается из нелинейной характеристики усилителя в результате сдвига рабочей точки в начало координат. Обычно предполагается, что (см. [3]) $\varphi'(z) > 0$ при всех $z \in \mathbb{R}$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ и, кроме того, выполнены следующие предельные соотношения:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &\rightarrow q_1 \text{ при } z \rightarrow +\infty, \quad \varphi(z) \rightarrow -q_2 \text{ при } z \rightarrow -\infty, \\ z \varphi'(z) &\rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \pm\infty, \end{aligned}$$

где $q_1, q_2 > 0$. Учитывая, что ниже будут изучаться локальные свойства системы (6),(7), считаем, что в окрестности точки ноль $\varphi(z)$ допускает следующее разложение:

$$\varphi(z) = z - az^3 + bz^5 + \dots \quad (8)$$

Простейший пример удовлетворяющей указанным условиям функции дает выражение $\varphi(z) = z(1+z^2)^{-1/2}$, для которого $a = 1/2$, $b = 3/8$.

При некоторых дополнительных ограничениях замена

$$u_j = e^{-\mu t} (h_j(t + (x-1)) + h_j(t - (x-1))) \quad (9)$$

приводит краевую задачу (6)-(7) к системе разностных уравнений

$$\begin{cases} v_j(t+1) = w_j(t) \\ w_j(t+1) = -(1-\varepsilon)v_j(t) - \varphi(Kw_j(t)) + \nu\varphi'(Kw_j(t))\varphi(Kw_{j-1}(t)), \end{cases} \quad (10)$$

где $w_j(t) = h_j(t) \exp(1 - \mu t)$, $v_j(t) = w_j(t-1)$, $j = 1, 2, 3$, $v_0 = v_3$, $w_0 = w_3$, $\varepsilon = 1 - \exp(-2\mu)$, $\nu = \alpha K$, а величина $2K \exp(-\mu)$ снова обозначена K .

Разностная система (10) имеет самостоятельное значение, не связанное с краевой задачей (6),(7) (см. [3]). Рассмотрим возможность применения изложенного в предыдущем пункте алгоритма к данной задаче.

Матрица линейной части системы (10) имеет при $0 < K < 2$ и $\varepsilon = 0$ пару собственных чисел $\lambda_{1,2} = \exp(\pm i\omega_0)$, где $\omega_0 = \arccos(-K/2)$, кратности три, которая лежит на единичной окружности комплексной плоскости. Учитывая, что этим собственным числам соответствует столько линейно независимых собственных векторов, какова их кратность, можно утверждать, что при достаточно малых ε в окрестности нулевой неподвижной точки системы (10) имеется 6-мерное экспоненциально устойчивое локальное инвариантное многообразие (см. [1, 3]). Используя алгоритм пункта 1, построим нормальную форму отображения (10) и изучим ее динамические свойства.

3. Нормальная форма отображения

Обозначим $u(t)$ шестимерный вектор вида $(v_1, w_1, v_2, w_2, v_3, w_3)^T$ и будем считать, что $\nu = \varepsilon\nu_0$, тогда для нормализации системы разностных уравнений (10) можно выполнить замену (3). На третьем шаге применения алгоритма из условий разрешимости соответствующей алгебраической задачи на $u_2(t, s)$ получаем

$$\dot{\xi}_j = -id(e^{-i\omega_0}\xi_j + 3aK^3\xi_j|\xi_j|^2 + K\nu_0\xi_{j-1}), \quad \xi_0 = \xi_3, \quad j = 1, 2, 3, \quad (11)$$

где $d = \frac{1}{2 \sin \omega_0}$. Нормальная форма (11) может быть уточнена на пятом шаге слагаемыми порядка ε , на седьмом – порядка ε^2 и т.д. Предполагая, что

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_j &= -id(e^{-i\omega_0}\xi_j - 3aK^3\xi_j|\xi_j|^2 + K\nu_0\xi_{j-1}) + \varepsilon\Psi_j(\xi_j, \xi_{j-1}, \xi_{j-2}), \\ \xi_0 &= \xi_3, \quad \xi_{-1} = \xi_2, \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (12)$$

из условий разрешимости системы, возникающей при $\varepsilon^{5/2}$ для $u_3(t, s)$ получаем функцию добавки

$$\begin{aligned} \varepsilon \Psi_j(\xi_j, \xi_{j-1}, \xi_{j-2}) = & \frac{\varepsilon}{2} d^2 \left[e^{-2i\omega_0} \xi_j + 3aK^3 (3e^{-i\omega_0} - e^{i\omega_0}) \xi_j |\xi_j|^2 + \right. \\ & + \nu_0 K \xi_{j-1} (2e^{-i\omega_0} + 3aK^2 (K + 4i \sin \omega_0) (2|\xi_j|^2 + |\xi_{j-1}|^2)) - \\ & - 3\nu_0 a K^3 (K - 4i \sin \omega_0) \xi_j^2 \xi_{j-1} + K \nu_0^2 \xi_{j-2} (K + 4i \sin \omega_0) + \\ & \left. + K^5 \left(9a^2 K + 4i \frac{(3a^2 K + 5b(K + 2 \cos 3\omega_0)) \sin \omega_0}{K + 2 \cos 3\omega_0} \right) \xi_j |\xi_j|^4 \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Принимая во внимание развитую в [1] общую теорию, можно показать, что грубым режимам систем (11) или (12) соответствуют решения системы (10) с асимптотикой (3) той же устойчивости. Тем самым, возникает задача качественного анализа этих систем. Рассмотрим сначала систему (11) и в целях ее упрощения выполним замену $\xi_j = \sqrt{\frac{4 \sin \omega_0}{3K^3}} \exp(-t \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \omega_0) \eta_j$. Преобразованная система приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= -\eta_1/2 - i(\gamma \eta_3 + |\eta_1|^2 \eta_1), \\ \dot{\eta}_2 &= -\eta_2/2 - i(\gamma \eta_1 + |\eta_2|^2 \eta_2), \\ \dot{\eta}_3 &= -\eta_3/2 - i(\gamma \eta_2 + |\eta_3|^2 \eta_3), \end{aligned} \quad (14)$$

где $\gamma = \frac{K \nu_0}{2 \sin \omega_0}$.

Сразу отметим, что при $|\gamma| < 1/\sqrt{3}$ нулевое решение (14) асимптотически устойчиво, а при $|\gamma| > 1/\sqrt{3}$ — неустойчиво. Если же $|\gamma| = 1/\sqrt{3}$, то система (14) имеет в фазовом пространстве прямую, заполненную неподвижными точками.

4. Динамические свойства нормальной формы отображения

Качественный анализ системы (14) удобнее производить после перехода в ней к полярным координатам $\eta_j = p_j e^{i\varphi_j}$. Обозначая $\alpha_1 = \varphi_3 - \varphi_1$ и $\alpha_2 = \varphi_1 - \varphi_2$, приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -p_1/2 + \gamma p_3 \sin \alpha_1, \\ \dot{p}_2 &= -p_2/2 + \gamma p_1 \sin \alpha_2, \\ \dot{p}_3 &= -p_3/2 - \gamma p_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2), \\ \dot{\alpha}_1 &= \gamma \left[\frac{p_3}{p_1} \cos \alpha_1 - \frac{p_2}{p_3} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \right] + p_1^2 - p_3^2, \\ \dot{\alpha}_2 &= \gamma \left[\frac{p_1}{p_2} \cos \alpha_2 - \frac{p_3}{p_1} \cos \alpha_1 \right] + p_2^2 - p_1^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Остановимся сначала на простейших свойствах системы (15) аналитического характера. Прежде всего отметим свойство циклической симметрии, которое следует из того, что осцилляторы исходной системы разностных уравнений (10) идентичны друг другу. Как легко видеть, система (15) инвариантна относительно замен

$$p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_3, p_3 \rightarrow p_1, \alpha_1 \rightarrow \alpha_2, \alpha_2 \rightarrow -\alpha_1 - \alpha_2 \quad (16)$$

и периодична по α_1, α_2 с периодом 2π . Тем самым, любая траектория системы (15) либо является самосимметричной, либо одновременно с ней в фазовом пространстве (15) сосуществуют еще две траектории, получающиеся из данной однократной или двукратной заменой (16).

Второе свойство системы (15) состоит в существовании в ее фазовом пространстве двух инвариантных прямых

$$\begin{aligned} p_1 = p_2 = p_3 = p, \alpha_1 = \alpha_2 = 2\pi/3, \\ p_1 = p_2 = p_3 = p, \alpha_1 = \alpha_2 = -2\pi/3. \end{aligned} \quad (17)$$

Система (15) сводится к уравнению $\dot{p} = (\gamma\sqrt{3} - 1)p/2$, на первой из прямых (17) и $\dot{p} = -(\gamma\sqrt{3} + 1)p/2$ — на второй. Как уже отмечалось выше, при $|\gamma| < 1/\sqrt{3}$ нулевое решение (14) асимптотически устойчиво. Система (15) в силу выполненных замен уже не имеет нулевого решения, однако при указанных ограничениях ее траектории стремятся к нулю вдоль одного из инвариантных направлений. При $\gamma = 1/\sqrt{3}$ первая из инвариантных прямых (17) заполнена состояниями равновесия, а при $\gamma = -1/\sqrt{3}$ — вторая. Увеличение $|\gamma|$ приводит в обоих случаях к мягкому ответвлению периодических колебаний. Учитывая, что данные фазовые перестройки происходят в критическом случае одного нулевого и пары чисто мнимых собственных чисел, при $\gamma = \pm(1/\sqrt{3} + \mu)$, где $0 < \mu \ll 1$, можно построить асимптотику устойчивого

периодического режима системы (15). Данный критический случай подробно изучен, например, в книге [4]. При $\gamma = 1/\sqrt{3} + \mu$ имеем

$$(p_1, p_2, p_3, \alpha_1, \alpha_2)^T = (p^+, p^+, p^+, \alpha^+, \alpha^+)^T + r^+ \sqrt{\mu} \operatorname{Re} [w^+ \exp(\omega^+ t)] + O(\mu). \quad (18)$$

Здесь $p^+ = \sqrt{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}$, $\alpha^+ = 2\pi/3$, $\omega^+ = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $r^+ \simeq 2.745$, а вектор w^+ имеет вид $w^+ \simeq (-0.1997 - 0.2029i, -0.0758 + 0.2744i, 0.2756 - 0.0715i, -0.5 + 0.866i, 1)^T$. Если же $\gamma = -1/\sqrt{3} - \mu$, то асимптотика устойчивого цикла становится следующей:

$$(p_1, p_2, p_3, \alpha_1, \alpha_2)^T = (p^-, p^-, p^-, \alpha^-, \alpha^-)^T + r^- \sqrt{\mu} \operatorname{Re} [w^- \exp(\omega^- t)] + O(\mu), \quad (19)$$

где $p^- = \sqrt{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$, $\alpha^- = -2\pi/3$, $\omega^- = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, $r^- \simeq 2.33$, а $w^- \simeq (-0.21 + 0.2619i, 0.3318 + 0.051i, -0.1218 - 0.3129i, -0.5 + 0.866i, 1)^T$.

Численный анализ, выполненный с помощью программы Tracer 3.51 (см. [5]), показал, что при увеличении параметра $\gamma > 1/\sqrt{3}$ в системе (12) наблюдается следующая динамика (точнее говоря, речь пойдет о фрагментах динамики, которые удалось выявить с той или иной степенью достоверности).

1. При $\gamma_1^+ < \gamma < \gamma_2^+$ ($\gamma_1^+ = 1/\sqrt{3} \simeq 0.57735$, $\gamma_2^+ \simeq 0.716$) устойчив цикл C_1 , ответившийся при $\gamma = \gamma_1^+$ от состояния равновесия на инвариантной прямой (17) и допускающий при $0 < \gamma - \gamma_1^+ \ll 1$ асимптотику (18).

2. При $\gamma = \gamma_2^+$ с циклом C_1 происходит бифуркация удвоения и при $\gamma_2^+ < \gamma < \gamma_3^+$ ($\gamma_3^+ \simeq 0.7173$) устойчив условно двухобходный цикл C_2 .

3. При $\gamma = \gamma_3^+$ от периодического решения двойного периода бифурцируют двухчастотные колебания (двумерный тор), которые устойчивы на промежутке $\gamma_3^+ < \gamma < \gamma_4^+$.

4. При $\gamma > \gamma_4^+$ в системе наблюдаются неупорядоченные колебания, старший ляпуновский показатель которых растет (см. рис. 1).

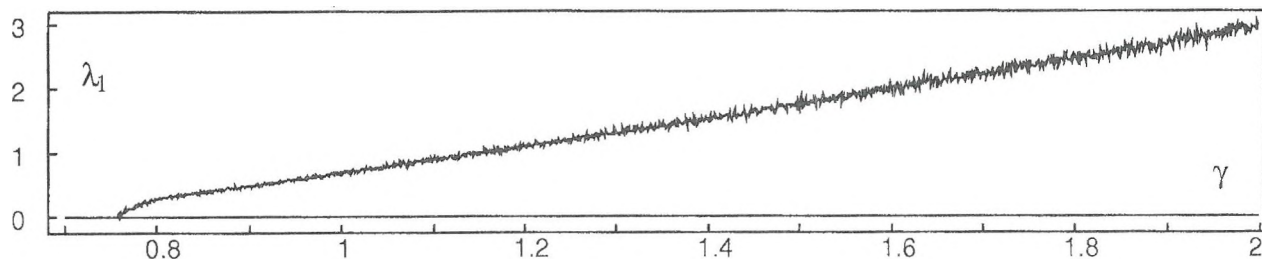


Рис. 1.

Величину γ_4^+ можно оценить лишь весьма приближенно, как точку, в которой старший ляпуновский показатель становится положительным, в соответствии с этим $0.75 \lesssim \gamma_4^+ \lesssim 0.758$. Способ перехода от двухчастотных колебаний к хаотическим также остается в данном случае неизвестным.

Рассмотрим теперь фазовые перестройки системы (12) при отрицательных γ . В этом случае реализуется сложная схема всевозможных бифуркаций циклов и хаотических режимов. Выделим область значений γ , примыкающую к $\gamma = \gamma_1^-$, где $\gamma_1^- = -1/\sqrt{3} \simeq -0.57735$. При этих значениях параметра возникают и претерпевают фазовые перестройки большое число различных режимов, которые удается классифицировать по амплитуде колебаний. Выделим режимы условно малой, средней и большой амплитуды и будем обозначать буквами C и A соответственно циклы и хаотические аттракторы системы (15), добавляя индексы s , m и l (малый, средний, большой) для обозначения их амплитуды. Рассмотрим сначала бифуркации, происходящие в этой ситуации с циклом малой амплитуды.

1. Цикл малой амплитуды C_s мягко ответвляется при $\gamma = \gamma_1^-$ от состояния равновесия на второй инвариантной прямой (17) и имеет вблизи критического значения параметра γ асимптотику (19) (на рис. 2-5 этот цикл изображен жирной кривой).

2. При $\gamma_2^- < \gamma < \gamma_1^-$ ($\gamma_2^- \simeq -0.716$) цикл C_s устойчив, а при $\gamma = \gamma_2^-$ он претерпевает бифуркацию удвоения периода.

3. Цикл условно двойного периода C_s^2 остается устойчивым при $\gamma_3^- < \gamma < \gamma_2^-$ ($\gamma_3^- \simeq -1.272$).

4. При $\gamma < \gamma_3^-$ цикл C_s^2 теряет устойчивость и наблюдаются хаотические колебания с многочисленными окнами периодичности.

Отметим, что циклы C_s и C_s^2 самосимметричны, т.е. инвариантны относительно замены (16).

Ниже на рис. 2 – 5 приведены проекции траекторий системы (15) на плоскость $p_3 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ для некоторых характерных значений параметра γ . Для того чтобы получить устойчивые режимы изучаемой

системы с относительно узкими областями притяжения, из 40000 случайно выбранных точек области $(0, 2] \times (0, 2] \times (0, 2] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ фазового пространства выпускались траектории, по местам сгущения которых можно судить о наличии в данной части фазового пространства какого-либо устойчивого режима.

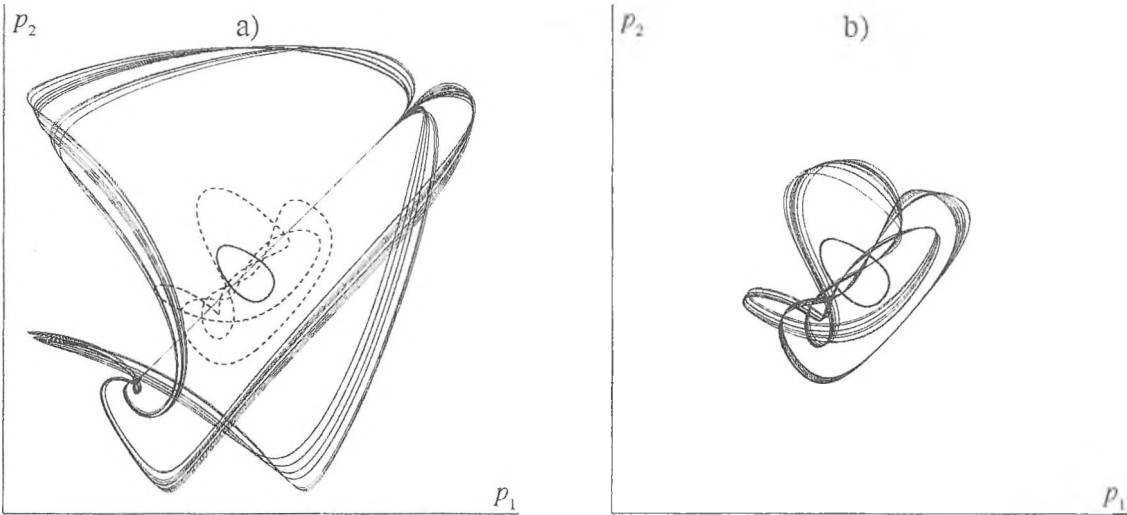


Рис. 2. а) $\gamma = -0.595$; б) $\gamma = -0.6022$.

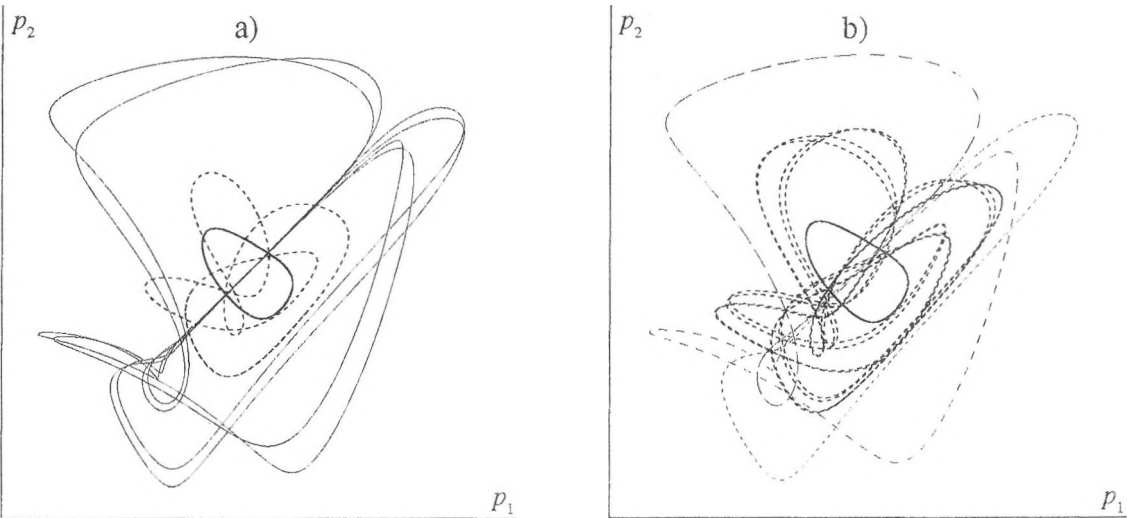


Рис. 3. а) $\gamma = -0.62$; б) $\gamma = -0.63$.

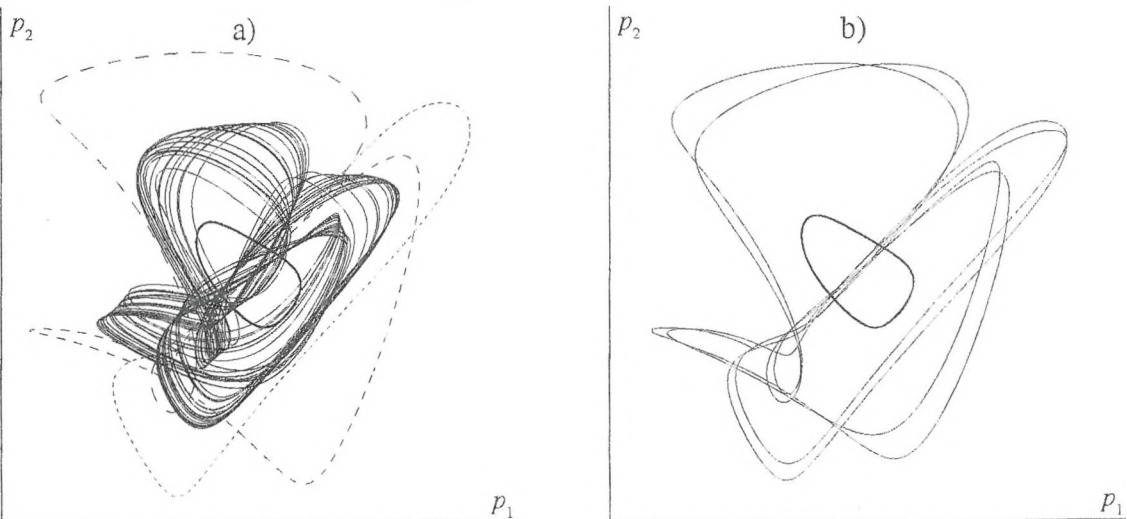
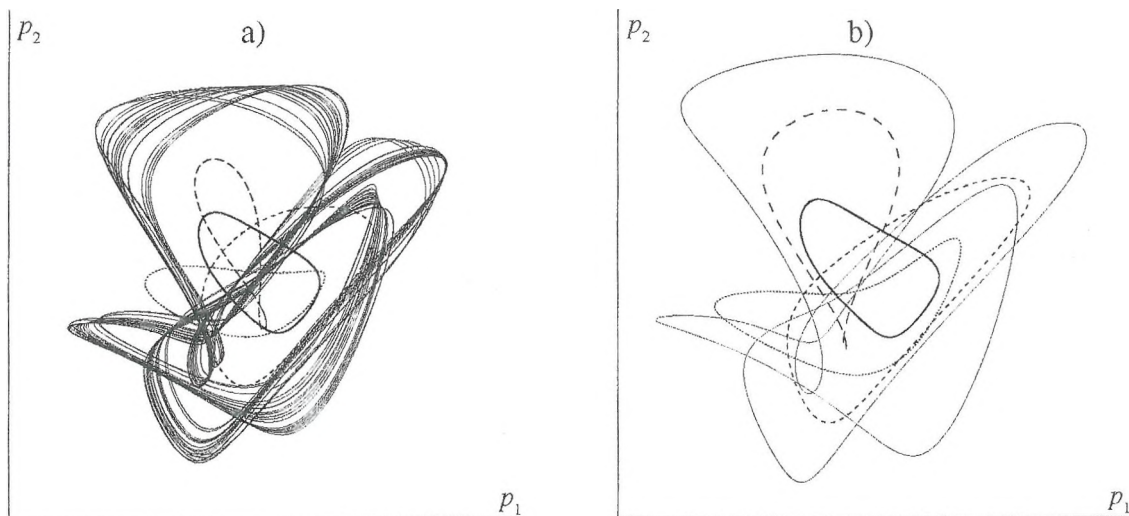


Рис. 4. а) $\gamma = -0.633$; б) $\gamma = -0.6395$.

Рис. 5. а) $\gamma = -0.65$; б) $\gamma = -0.67$.

Перейдем теперь к описанию фазовых перестроек, происходящих с циклами средней амплитуды. Такие циклы наблюдаются на промежутке от $\gamma = \gamma_m^-$ до $\gamma = \gamma_1^-$, где $\gamma_m^- \simeq -0.765$. При этом на начальном промежутке $\gamma_m^- < \gamma < \gamma_{m1}^-$, где $\gamma_{m1}^- \simeq -0.6483$ каскада бифуркаций нет. При $\gamma = \gamma_m^-$ у системы (15) появляются три симметричных устойчивых цикла C_m^0 , C_m^{0*} , C_m^{0**} , переходящих друг в друга в результате замены (16), а при $\gamma = \gamma_{m1}^-$ они теряют устойчивость. На рис. 5а, 5б эти циклы изображены пунктиром различной длины.

Будем следить за каскадами бифуркаций, происходящими с режимами средней амплитуды, увеличивая параметр $\gamma_m^- < \gamma < \gamma_1^-$. Важно отметить, что области, в которых происходят каскады бифуркаций, мы будем рассматривать при увеличении γ , а за бифуркациями внутри этих областей — при уменьшении этого параметра. Ниже приведены четыре промежутка, на которых происходят стандартные каскады бифуркаций удвоения и возникновения хаотических колебаний.

1. Первый каскад происходит на промежутке $\gamma_{m2}^- < \gamma < \gamma_{m3}^-$, где $\gamma_{m2}^- \simeq -0.6335$, $\gamma_{m3}^- \simeq -0.61913$ при уменьшении γ :

- при $\gamma = \gamma_{m3}^-$ возникает самосимметричный цикл C_m^{1*} (на рис. 3а этот цикл изображен пунктиром);
- при $\gamma \simeq -0.6268$ происходит первая бифуркация удвоения периода, возникает цикл C_m^{12} удвоенного периода;
- при $\gamma \simeq -0.6296$ происходит вторая бифуркация удвоения периода и возникает цикл C_m^{13} условно периода четыре (на рис. 3б пунктиром изображен цикл C_m^{13} при $\gamma = -0.63$);
- при $\gamma_{m2}^- < \gamma \lesssim -0.631$ система (15) имеет хаотические колебания средней амплитуды. (На рис. 4а изображен хаотический аттрактор A_m^1 при $\gamma = -0.633$).

2. Второй каскад происходит на промежутке $\gamma_{m4}^- < \gamma < \gamma_{m5}^-$, где $\gamma_{m4}^- \simeq -0.61172$, $\gamma_{m5}^- \simeq -0.60605$ также при уменьшении γ . Отметим значения параметра γ , при которых происходят бифуркации в этом случае:

- при $\gamma = \gamma_{m5}^-$ возникает самосимметричный цикл C_m^{2*} ;
- при $\gamma \simeq -0.61$ происходит первая бифуркация удвоения периода, а при $\gamma \simeq -0.611$ — вторая.
- при $\gamma_{m4}^- < \gamma \lesssim -0.6112$ система (15) имеет хаотические колебания средней амплитуды.

3. Третий каскад происходит на промежутке $\gamma_{m6}^- < \gamma < \gamma_{m7}^-$, где $\gamma_{m6}^- \simeq -0.60226$, $\gamma_{m7}^- \simeq -0.59902$. Отметим бифуркационные значения γ

- при $\gamma = \gamma_{m7}^-$ возникает 3 симметричных цикла C_m^3 , C_m^{3*} , C_m^{3**} ;
- при $\gamma \simeq -0.60143$ с каждым из них происходит первая бифуркация удвоения периода, а при $\gamma \simeq -0.60196$ — вторая.
- при $\gamma_{m6}^- < \gamma \lesssim -0.602$ система (15) имеет три симметричных хаоса средней амплитуды. (На рис. 2б изображены симметричные хаотические аттракторы A_m^3 , A_m^{3*} и A_m^{3**} при $\gamma = -0.6022$).

4. Последний замеченный каскад бифуркаций самосимметричных аттракторов средних размеров происходит на промежутке $\gamma_{m8}^- < \gamma < \gamma_{m9}^-$, где $\gamma_{m8}^- \simeq -0.59677$, $\gamma_{m9}^- \simeq -0.59475$. В этом случае самосимметричный цикл C_m^4 возникает при $\gamma = \gamma_{m9}^-$, при $\gamma \simeq -0.59627$ происходит первая бифуркация удвоения, а при $\gamma \simeq -0.5966$ — вторая.

В каждом из четырех описанных случаев вычислялись ляпуновские показатели соответствующего хаотического аттрактора. В таблице 1 приведены величины ляпуновских показателей и ляпуновской размерности для последних значений γ в каждом каскаде, при которых наблюдаются хаотические колебания ($\gamma = \gamma_{m2}^-, \gamma_{m4}^-, \gamma_{m6}^-, \gamma_{m8}^-$).

Таблица 1.

γ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	d_L
-0.6335	0.0224	$8 \cdot 10^{-5}$	-0.1635	-1.420	-1.439	2.137
-0.61172	0.0145	0.0005	-0.072	-1.460	-1.483	2.209
-0.60226	0.0108	$6 \cdot 10^{-6}$	-0.045	-1.483	-1.483	2.241
-0.59677	0.009	$-5 \cdot 10^{-5}$	-0.0335	-1.4818	-1.4935	2.267

Опишем теперь каскады бифуркаций, полученные для режимов большой амплитуды. Такие циклы наблюдаются на промежутке от $\gamma = \gamma_l^-$ до $\gamma = \gamma_1^-$, где $\gamma_l^- \simeq -0.67812$. Как и ранее, будем следить за фазовыми перестройками при увеличении параметра γ . Отметим, однако, что в отличие от предыдущего случая перестройки внутри каскадов происходят при увеличении γ .

1. Первый каскад бифуркаций режимов большой амплитуды наблюдается на промежутке $\gamma_{l1}^- < \gamma < \gamma_{l2}^-$, где $\gamma_{l1}^- \simeq -0.67812$, $\gamma_{l2}^- \simeq -0.64795$ при увеличении γ :

- при $\gamma = \gamma_{l1}^-$ возникает самосимметричный цикл C_l^1 (на рис. 5b этот цикл изображен тонкой сплошной линией при $\gamma = -0.67$);
- при $\gamma \simeq -0.6575$ происходит первая бифуркация удвоения периода, возникает цикл C_l^{12} удвоенного периода;
- при $\gamma \simeq -0.6531$ происходит вторая бифуркация удвоения периода и возникает цикл C_l^{13} условно периода четыре;
- при $-0.652 \lesssim \gamma < \gamma_{l2}^-$ система (15) имеет хаотические колебания большой амплитуды (на рис. 5а изображен хаотический аттрактор A_l^1 при $\gamma = -0.65$).

2. Второй каскад происходит на промежутке $\gamma_{l3}^- < \gamma < \gamma_{l4}^-$, где $\gamma_{l3}^- \simeq -0.64875$, $\gamma_{l4}^- \simeq -0.6367$. Отметим бифуркационные значения γ :

- при $\gamma = \gamma_{l3}^-$ возникает самосимметричный цикл C_l^2 ;
- при $\gamma \simeq -0.64016$ происходит первая бифуркация удвоения периода, а при $\gamma \simeq -0.6382$ — вторая (на рис. 4b изображен цикл большой амплитуды C_l^{21} после первой бифуркации удвоения при $\gamma = -0.6395$);
- при $-0.6379 \lesssim \gamma < \gamma_{l4}^-$ система (15) имеет хаотические колебания большой амплитуды.

3. Третий каскад происходит при $\gamma_{l5}^- < \gamma < \gamma_{l6}^-$, где $\gamma_{l5}^- \simeq -0.63306$, $\gamma_{l6}^- \simeq -0.62664$, с тремя сосуществующими режимами большой амплитуды, которые переходят друг в друга в результате замены (16). Отметим бифуркационные значения γ :

- при $\gamma = \gamma_{l5}^-$ возникает три симметричных друг другу цикла C_l^3 , C_l^{3*} , C_l^{3**} (на рис. 3b и 4а эти циклы изображены тонким пунктиром различной длины);
- при $\gamma \simeq -0.62866$ происходит первая бифуркация удвоения периода, а при $\gamma \simeq -0.62752$ — вторая;
- при $-0.6272 \lesssim \gamma < \gamma_{l6}^-$ система (15) имеет хаотические колебания большой амплитуды.

4. Четвертый каскад бифуркаций самосимметричных аттракторов большой амплитуды происходит на промежутке $\gamma_{l7}^- < \gamma < \gamma_{l8}^-$, где $\gamma_{l7}^- \simeq -0.62315$, $\gamma_{l8}^- \simeq -0.6193$. В этом случае самосимметричный цикл C_l^4 возникает при $\gamma = \gamma_{l7}^-$, при $\gamma \simeq -0.62066$ происходит первая бифуркация удвоения, а при $\gamma \simeq -0.6199$ — вторая (на рис. 3а изображен цикл большой амплитуды C_l^{41} после первой бифуркации удвоения при $\gamma = -0.62$). Хаотические колебания наблюдаются на промежутке $-0.6197 \lesssim \gamma < \gamma_{l8}^-$.

При дальнейшем увеличении параметра γ встречаются и другие каскады бифуркаций, разворачивающиеся на все более узких промежутках, с точкой сгущения, по-видимому, в $\gamma = \gamma_1^-$. Например, на рис. 2а представлен хаотический режим большой амплитуды, возникший в результате аналогичного описанным выше каскада бифуркаций.

Для хаотических режимов внутри полученных промежутков также вычислялись ляпуновские показатели и ляпуновская размерность соответствующего хаотического аттрактора большой амплитуды. В таблице 2 приведены эти величины для $\gamma = \gamma_{l2}^-, \gamma_{l4}^-, \gamma_{l6}^-, \gamma_{l8}^-$ и для $\gamma = -0.595$ (см. колебания большой амплитуды на рис. 2а).

Отметим, что области устойчивости хаотического режима первого каскада A_l^1 и цикла C_l^2 второго каскада пересекаются, что позволяет предположить, что режимы большой амплитуды могут быть классифицированы более тонко. В целом система (15) демонстрирует при данных значениях параметров большое число сосуществующих устойчивых режимов. На рисунках 1-5 можно наблюдать до пяти сосуществующих устойчивых циклов и хаотических режимов.

Фазовые перестройки, происходящие с аттракторами системы (15) при $\gamma < \gamma_3^-$, идентифицировать достаточно сложно, впрочем, характер хаотических колебаний, которые возникают в этом случае у системы (15), может быть оценен по старшему ляпуновскому показателю, графики которого приведены на

Таблица 2.

γ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	d_L
-0.64795	0.0268	-0.0001	-0.1686	-1.381	-1.478	2.158
-0.6367	0.0186	0.0001	-0.1176	-1.3993	-1.5016	2.158
-0.62664	0.0153	$-2 \cdot 10^{-5}$	-0.094	-1.436	-1.485	2.163
-0.6193	0.0129	$9 \cdot 10^{-5}$	-0.077	-1.45	-1.486	2.168
-0.595	0.0059	-0.0005	-0.031	-1.473	-1.502	2.158

рис. 6 - 9. Нетрудно видеть, что области хаотических колебаний перемежаются в этом случае многочисленными окнами периодичности или квазипериодичности (старший показатель нулевой). На рис. 6 дана общая картина зависимости $\lambda_1(\gamma)$ на промежутке изменения γ от -10 до -1 . На рис. 7 - 9 более подробно рассмотрены сложные участки графика $\lambda_1(\gamma)$.

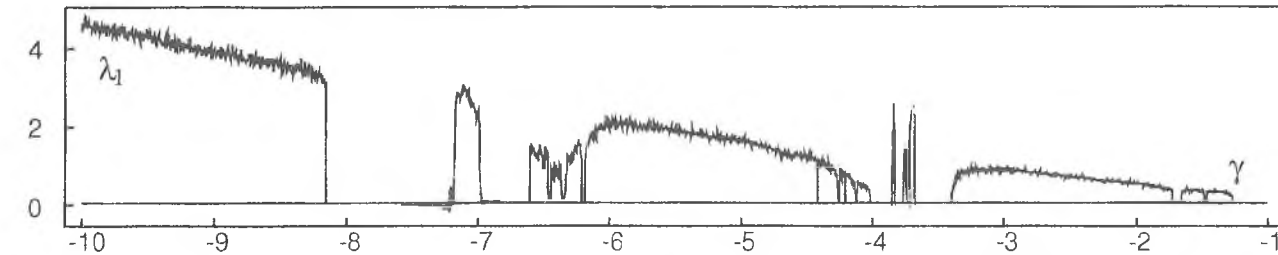


Рис. 6.

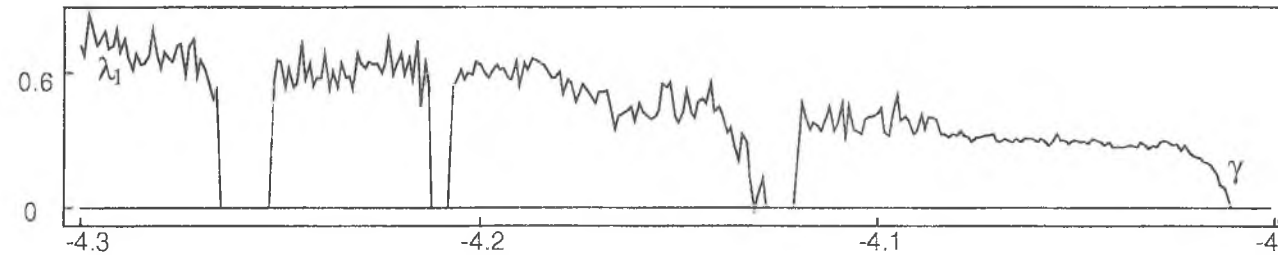


Рис. 7.

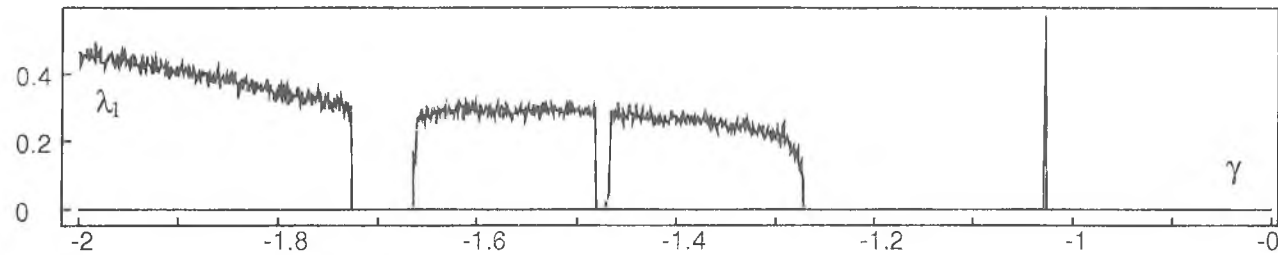


Рис. 8.

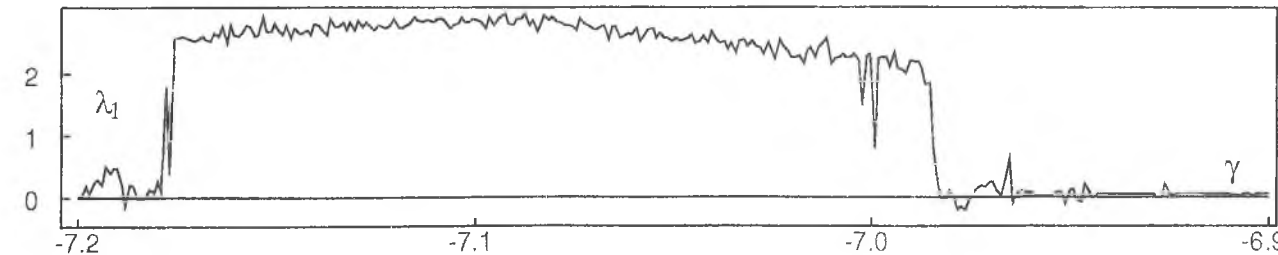


Рис. 9.

Таким образом, изучение динамических свойств решений системы (15) показало, что у нее может существовать большое число устойчивых циклов или торов, которым соответствуют устойчивые торы

исходной разностной системы (10) с асимптотикой (3). Следует, однако, заметить, что вдоль одного из инвариантных направлений (17) решения системы (15) стремятся при $|\gamma| > 1/\sqrt{3}$ к бесконечности. И, хотя при изучаемых значениях параметров инвариантные лучи (17) являются отталкивающими, наличие направления, по которому решение может уходить из области применимости асимптотических методов, требует вычисления следующего по порядку малости коэффициента в разложении (5) и дополнительного анализа соответствующей нормальной формы. При достаточно больших $|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + |\xi_3|^2$ слагаемым, определяющим поведение решений системы (12) с добавкой (13), является вещественная часть слагаемого при $|\xi_j|^4 \xi_j$. Эта величина согласно представлению (13) равна $\frac{9a^2 K^6}{8 \sin^3 \omega_0}$ и положительна, исходя из этого, масштаб применимости полученных в работе результатов имеет порядок $\sqrt{\epsilon}$. Для начальных условий внутри шара радиуса порядка $\sqrt{\epsilon}$ траектории системы (10) будут притягиваться к одному из режимов, определяемых нормальной формой (15), а вне некоторого шара радиуса порядка $\sqrt[4]{\epsilon}$ траектории будут удаляться от нуля и, учитывая диссипативность исходной системы, попадут в область притяжения какого-либо нелокального режима. Это, в частности, означает, что у динамической системы (10) может сосуществовать большое число сложных колебательных режимов различных масштабов.

Литература

1. Мищенко Е.Ф., Колесов А.Ю. Асимптотическая теория релаксационных колебаний // Труды математического ин-та АН СССР. 1991. Т. 197. С. 3 – 89.
2. Шноль Э.Э. Об устойчивости неподвижных точек двумерных отображений // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 7. С. 1156 – 1167.
3. Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Явление буферности в RCLG-автогенераторе: теоретический анализ и результаты эксперимента // Тр. МИАН. 2001. Т. 233. С. 153 – 207.
4. Гукенхеймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва-Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2002. 560 с.
5. <http://tracer3.narod.ru>.