*Моделирование и анализ информационных систем.* Т. 25, № 1 (2018), с. 18–32
*Modeling and Analysis of Information Systems.* Vol. 25, No 1 (2018), pp. 18–32


**DOI:** 10.18255/1818-1015-2018-1-18-32

УДК 517.9

# Асимптотическое приближение решения уравнения реакция-диффузия-адвекция с нелинейным адвективным слагаемым

**Антипов Е. А., Левашова Н. Т.[1], Нефедов Н. Н.[1]**

*получена 15 ноября 2017*

**Аннотация.** В работе рассматривается решение вида движущегося фронта начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения реакция-диффузия-адвекция в полосе с периодическими условиями по одной из переменных. Особенностями настоящей работы является постановка задачи в двумерной области и наличие большого адвективного слагаемого в исходном уравнении. Интерес к решениям вида фронта связан с задачами горения или нелинейных акустических волн. В области определения функции, описывающей движущийся фронт, содержится подобласть, в которой функция обладает большим градиентом. Эта подобласть называется внутренним переходным слоем. Задачи с внутренними переходными слоями содержат естественный малый параметр, равный отношению ширины переходного слоя к ширине рассматриваемой области. Наличие малого параметра при старшей производной по пространственным координатам делает задачу сингулярно возмущенной. Численное решение таких задач встречает определенные сложности, связанные с выбором сеток и начальных условий. Для решения этих проблем наиболее успешным является использование аналитических методов. Асимптотический анализ с использованием алгоритма Васильевой, проведенный в настоящей работе, позволяет определить условия существования решения вида фронта, а также получить асимптотическое приближение решения, которое можно выбрать в качестве начального условия для численного алгоритма. Кроме того, аналитические методы, использованные в работе, позволяют выписать уравнение для кривой, в области которой локализован фронт. Эти сведения могут быть полезными для разработки математических моделей или численных алгоритмов для решения задач вида реакция-диффузия-адвекция.

**Ключевые слова:** задача реакция-диффузия-адвекция, двумерный движущийся фронт, внутренний переходный слой, асимптотическое представление, малый параметр

**Для цитирования:** Антипов Е. А., Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., "Асимптотическое приближение решения уравнения реакция-диффузия-адвекция с нелинейным адвективным слагаемым", *Моделирование и анализ информационных систем*, **25**:1 (2018), 18–32.

**Об авторах:** Антипов Евгений Александрович, orcid.org/0000-0001-6734-683X,
зам. начальника Управления информатизации, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, e-mail: a.evgen.a@gmail.com

Левашова Наталия Тимуровна, orcid.org/0000-0002-1916-166X, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: natasha@npanalytica.ru

Нефедов Николай Николаевич, orcid.org/0000-0002-3651-6434, д-р физ.-мат. наук, профессор,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, e-mail: nefedov@phys.msu.ru

**Благодарности:**
[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, проект №16-01-00437.

# Введение

В работе рассматривается решение вида движущегося фронта начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения реакция-диффузия-адвекция в полосе $0 \leqslant y \leqslant a$; $x \in \mathbb{R}$ с периодическими условиями по переменной $x$. Задачи с решением вида фронта на отрезке рассматривались ранее в работах [1–5], движение двумерного фронта в задаче реакция-диффузия было исследовано в работах [6, 7]. Особенностями настоящей работы является постановка задачи в двумерной области и наличие большого адвективного слагаемого в исходном уравнении.

Интерес к решениям вида фронта связан с задачами горения [8] или нелинейных акустических волн [9]. В области определения функции, описывающей движущийся фронт, содержится подобласть, в которой функция обладает большим градиентом. Эта подобласть называется внутренним переходным слоем. Задачи с внутренними переходными слоями содержат естественный малый параметр, равный отношению ширины переходного слоя к ширине рассматриваемой области. Наличие малого параметра при старшей производной по пространственным координатам делает задачу сингулярно возмущенной. Численное решение таких задач встречает определенные сложности, связанные с выбором сеток и начальных условий. Для решения этих проблем наиболее успешным является использование аналитических методов [10–13]. Асимптотический анализ с использованием алгоритма Васильевой [14], проведенный в настоящей работе, позволяет определить условия существования решения вида фронта, а также получить асимптотическое приближение решения, которое можно выбрать в качестве начального условия для численного алгоритма. Кроме того, аналитические методы, использованные в работе, позволяют выписать уравнение для кривой, в области которой локализован фронт.

# 1. Постановка задачи

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} &\varepsilon\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial u}{\partial y} + B(u,x,y), \quad x \in \mathbb{R}, \ \ y \in (0,a), \ \ t \in (0,T], \\ &u(x,0,t,\varepsilon) = u^0(x), \ \ u(x,a,t,\varepsilon) = u^1(x), \ \ x \in \mathbb{R}, \ \ t \in [0,T], \\ &u(x,y,t,\varepsilon) = u(x+L,y,t,\varepsilon), \ \ x \in \mathbb{R}, \ \ y \in [0,a], \ \ t \in [0,T], \\ &u(x,y,0,\varepsilon) = u_{init}(x,y,\varepsilon), \ \ x \in \mathbb{R}, \ \ y \in [0,a]. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ – малый параметр. Будем считать, что функции $A(x,y)$ и $B(u,x,y)$ – $L$-периодические по переменной $x$, достаточно гладкие в области $I_u \times \bar{D} \times [0,T]$, где $I_u$ – допустимый интервал значений $u$, $\bar{D} = \{(x,y) : \mathbb{R} \times [0,a]\}$; функции $u^0(x)$, $u^1(x)$ – $L$-периодические, непрерывные при $x \in \mathbb{R}$; $u_{init}(x,y,\varepsilon)$ – непрерывная функция в $\bar{D}$, $L$–периодическая по переменной $x$, удовлетворяющая условиям согласования $u_{init}(x,0,\varepsilon) = u^0(x)$, $u_{init}(x,a,\varepsilon) = u^1(x)$.

Будем рассматривать задачу (1), считая, что выполнен ряд условий.

**Условие A1.** Пусть дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial u}{\partial y} + B(u,x,y) = 0 \tag{2}$$

с дополнительным условием $u(x,0) = u^0(x)$ имеет решение $\varphi^{(-)}(x,y)$, а с дополнительным условием $u(x,a) = u^1(x)$ — решение $\varphi^{(+)}(x,y)$, где $\varphi^{(\mp)}(x,y)$ — достаточно гладкие в $\bar{D}$ $L$-периодические по переменной $x$ функции, причем

$$\varphi^{(-)}(x,y) < 0 < \varphi^{(+)}(x,y) \quad \text{при} \quad (x,y) \in \bar{D}.$$

**Условие А2.** Пусть функции $F^{(\mp)}(x,y) := \dfrac{A(x,y)}{\varphi^{(\mp)}(x,y)}$ удовлетворяют условию Липшица по переменной $x$ в полосе $\Pi : \{0 \leqslant y \leqslant a; x \in \mathbb{R}\}$.

Мы будем исследовать решение задачи (1), которое имеет вид движущегося фронта, а именно такое решение, которое в каждый момент времени при $0 \le y \le h(x,t)$ близко к поверхности $\varphi^{(-)}(x,y)$, а при $h(x,t) \le y \le a$ близко к поверхности $\varphi^{(+)}(x,y)$, и резко изменяется от значений на поверхности $\varphi^{(-)}(x,y)$ до значений на поверхности $\varphi^{(+)}(x,y)$ в окрестности кривой $y = h(x,t)$. В этом случае говорят, что решение задачи (1) имеет внутренний переходный слой в окрестности этой кривой.

Будем считать, что $y = h(x,t)$ — это та кривая, на которой решение $u(x,y,t,\varepsilon)$ задачи (1) в каждый момент времени принимает значение, равное полусумме функций $\varphi^{(-)}(x,y)$ и $\varphi^{(+)}(x,y)$:

$$u(x,h(x,t),t,\varepsilon) = \varphi^*(x,h(x,t)) := \frac{1}{2}\left(\varphi^{(-)}(x,h(x,t)) + \varphi^{(+)}(x,h(x,t))\right). \tag{3}$$

Кривая $y = h(x,t)$ в каждый момент времени делит область $\bar{D}$ на две части: $\bar{D}^{(-)} = \{(x,y) : \mathbb{R} \times [0; h(x,t)]\}$ и $\bar{D}^{(+)} = \{(x,y) : \mathbb{R} \times [h(x,t); a]\}$.

Для детального описания переходного слоя перейдем в окрестности этой кривой к локальным координатам $(l,r)$ с помощью соотношений

$$x = l - r\sin\alpha, \quad y = h(l,t) + r\cos\alpha, \tag{4}$$

где

$$\sin\alpha = \frac{h_x}{\sqrt{1+h_x^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}}, \tag{5}$$

$\alpha$ – угол между осью $y$ и нормалью к кривой $y = h(x,t)$, проведенной в область $y > h(x,t)$ в каждый момент времени $t$, отложенный против часовой стрелки, $l$ – $x$-координата точки на этой кривой, из которой нормаль проводится; $r$ – расстояние от кривой по нормали к ней. Будем считать, что $r > 0$ в области $D^{(+)}$, $r < 0$ в области $D^{(-)}$, $r = 0$ при $y = h(x,t)$, производные функций $h(x,t)$ в выражении (5) берутся при $x = l$.

В окрестности кривой $y = h(x,t)$ перейдем к растянутой переменной

$$\xi = \frac{r}{\varepsilon}. \tag{6}$$

В переменных $\xi,\ l,\ t$ дифференциальный оператор в уравнении (1) принимает вид (см. [7]):

$$L_{\xi,l,t}[u] := \varepsilon\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} - A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y} =$$
$$= \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}}\left(h_t - h_x A(l,h(l,t)) - u\right)\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) - \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \tag{7}$$
$$- \frac{1}{1+h_x^2}\left(h_t h_x + A(l,h(l,t)) - u h_x\right)\frac{\partial u}{\partial l} + \sum_{i=1}\varepsilon^i L_i[u],$$

где $L_i$ – дифференциальные операторы первого или второго порядка по переменным $\xi$ и $l$, а производные функции $h(x,t)$ берутся при $x = l$.

При $\xi \in \mathbb{R}$ рассмотрим так называемое присоединенное уравнение для функции $\tilde{u}(\xi, h(x,t))$:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2(x,t)}}\left(h_t(x,t) - h_x(x,t)A(x,h(x,t)) - \tilde{u}\right)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = 0, \tag{8}$$

где переменные $x$ и $t$, а также функция $h(x,t)$ играют роль параметров. Это уравнение можно свести к присоединенной системе уравнений

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = \Phi; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2(x,t)}}\left(h_t(x,t) - h_x(x,t)A(x,h(x,t)) - \tilde{u}\right)\Phi. \tag{9}$$

Разделив второе уравнение (9) на первое, придем к дифференциальному уравнению первого порядка относительно функции $\Phi(\tilde{u}, h(x,t))$, которое определяет фазовые траектории присоединенной системы на плоскости $(\tilde{u}, \Phi)$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{u}} = \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2(x,t)}}\left(h_t(x,t) - h_x(x,t)A(x,h(x,t)) - \tilde{u}\right). \tag{10}$$

Точки $(\varphi^{(\mp)}(x,h(x,t)), 0)$ фазовой плоскости $(\tilde{u}, \Phi)$ являются точками покоя системы (9). Интегрируя уравнение (10), можно выписать явные выражения для фазовых траекторий $\Phi^{(-)}(\tilde{u}, h(x,t))$, выходящих из точки $(\varphi^{(-)}, 0)$ при $\xi \to -\infty$, и $\Phi^{(+)}(\tilde{u}, h(x,t))$, выходящих из точки $(\varphi^{(+)}, 0)$ при $\xi \to +\infty$ :

$$\Phi^{(\mp)}(\tilde{u}, h(x,t)) = \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2(x,t)}}\Bigg(\left(h_t(x,t) - h_x(x,t)A(x,h(x,t))\right)\left(\tilde{u} - \varphi^{(\mp)}(x,h(x,t))\right) -$$
$$- \frac{1}{2}\left(\tilde{u}^2 - \left(\varphi^{(\mp)}(x,h(x,t))\right)^2\right)\Bigg). \tag{11}$$

Если существует гладкая кривая $y = h_0(x,t)$, для которой выполняется равенство

$$\Phi^{(-)}(\tilde{u}, h_0(x,t)) - \Phi^{(+)}(\tilde{u}, h_0(x,t)) = 0, \tag{12}$$

то на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \Phi)$ при $h = h_0$ образуется фазовая траектория, соединяющая точки покоя, а именно выходящая из точки покоя $(\varphi^{(-)}, 0)$ при $\xi \to -\infty$ и входящая в точку покоя $(\varphi^{(+)}, 0)$ при $\xi \to +\infty$.

Используя явный вид (11) функций $\Phi^{(\mp)}$, сформулируем условие существования соединительной фазовой траектории в следующем виде:

**Условие А3.** Пусть существует гладкая кривая $y = h_0(x,t)$, являющаяся решением уравнения

$$h_{0t}(x,t) - h_{0x}(x,t)A(x,h_0(x,t)) = \frac{1}{2}\left(\varphi^{(-)}(x,h_0(x,t)) + \varphi^{(+)}(x,h_0(x,t))\right)$$

с условиями

$$h_0(x,t) = h_0(x+L,t), \quad h_0(x,0) = h_{00}(x),$$

где $h_{00}(x)$ — функция, которая определяет начальное положение кривой $y = h(x,t)$.

## 2. Асимптотическое представление решения

Асимптотическое приближение $U(x,y,t,\varepsilon)$ решения задачи (1) будем строить отдельно в каждой из областей $\bar{D}^{(-)} \times [0,T]$ и $\bar{D}^{(+)} \times [0,T]$:

$$U(x,y,t,\varepsilon) = \begin{cases} U^{(-)}(x,y,t,\varepsilon), & (x,y) \in \bar{D}^{(-)} \times [0,T], \\ U^{(+)}(x,y,t,\varepsilon), & (x,y) \in \bar{D}^{(+)} \times [0,T] \end{cases}$$

в виде сумм двух слагаемых

$$U^{(\mp)} = \bar{u}^{(\mp)}(x,y,\varepsilon) + Q^{(\mp)}(\xi,l,h(l,t),t,\varepsilon). \tag{13}$$

Здесь $\bar{u}^{(\mp)}(x,y,\varepsilon)$ – регулярная часть асимптотического представления, $Q^{(\mp)}(\xi,l,h(l,t),t,\varepsilon)$ – функции, описывающие переходный слой, $\xi$ – растянутая переменная вблизи кривой локализации переходного слоя, определенная равенством (6). Каждое слагаемое в (13) будем представлять как разложение по степеням малого параметра $\varepsilon$:

$$\bar{u}^{(\mp)}(x,y,\varepsilon) = \bar{u}_0^{(\mp)}(x,y) + \varepsilon\bar{u}_1^{(\mp)}(x,y) + \dots\ , \tag{14}$$

$$Q^{(\mp)}(\xi,l,h(l,t),t,\varepsilon) = Q_0^{(\mp)}(\xi,l,h(l,t),t) + \varepsilon Q_1^{(\mp)}(\xi,l,h(l,t),t) + \dots \tag{15}$$

Кривую $y = h(x,t)$ также будем искать в виде разложения по степеням малого параметра:

$$h(x,t) = h_0(x,t) + \varepsilon h_1(x,t) + \varepsilon^2 h_2(x,t) + \dots \tag{16}$$

Функции $U^{(-)}(x,y,t,\varepsilon)$ и $U^{(+)}(x,y,t,\varepsilon)$ и их производные по направлению нормали к кривой $y = h(x,t)$ будем непрерывно сшивать на кривой $h(x,t)$ в каждый момент времени $t$:

$$U^{(-)}(l,h(l,t),t,\varepsilon) = U^{(+)}(l,h(l,t),t,\varepsilon) = \varphi^*(l,h(l,t)), \tag{17}$$

$$\frac{\partial U^{(-)}}{\partial n}(l,h(l,t),t,\varepsilon) = \frac{\partial U^{(+)}}{\partial n}(l,h(l,t),t,\varepsilon), \tag{18}$$

где функция $\varphi^*(x,h(x,t))$ определена в (3).

## 2.1. Регулярная часть асимптотики

Подставляя разложения (14) в равенства

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2\bar{u}^{(\mp)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{u}^{(\mp)}}{\partial y^2}\right)=A(x,y)\frac{\partial\bar{u}^{(\mp)}}{\partial x}-\bar{u}^{(\mp)}\frac{\partial\bar{u}^{(\mp)}}{\partial y}+B(\bar{u}^{(\mp)},x,y), \tag{19}$$

раскладывая функции в правой части по формуле Тейлора по степеням малого параметра и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon$, получим дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка для функций $\bar{u}_i^{(\mp)}(x,y), i=0,1\ldots$ Будем решать эти уравнения в каждой из областей $\bar{D}^{(-)}$ и $\bar{D}^{(+)}$ с условием периодичности по переменной $x$. Дополнительные условия при $y=0$ и $y=a$ будем определять из краевых условий задачи (1).

Приравнивая в (19) коэффициенты при $\varepsilon^0$, получим следующее уравнение:

$$A(x,y)\frac{\partial\bar{u}_0^{(\mp)}}{\partial x}-\bar{u}_0^{(\mp)}\frac{\partial\bar{u}_0^{(\mp)}}{\partial y}+B(\bar{u}_0^{(\mp)},x,y)=0,$$

которое совпадает с уравнением (2).

Согласно условию **A1** функции $\varphi^{(-)}(x,y)$ и $\varphi^{(+)}(x,y)$ являются $L$-периодическими по переменной $x$ решениями этого уравнения, соответственно с условиями

$$\varphi^{(-)}(x,0)=u^0(x);\quad \varphi^{(+)}(x,a)=u^1(x).$$

Положим

$$\bar{u}_0^{(-)}(x,y)=\varphi^{(-)}(x,y),\quad \bar{u}_0^{(+)}(x,y)=\varphi^{(+)}(x,y).$$

Далее для краткости будем использовать следующее обозначение:

$$\bar{B}^{(\mp)}(x,y):=B(\varphi^{(\mp)}(x,y),x,y)$$

и аналогичные обозначения для производных функции $B$.

Функции $\bar{u}_i^{(\mp)}, i=1,2\ldots$ определяются как решения задач

$$\begin{gathered}A(x,y)\frac{\partial\bar{u}_i^{(\mp)}}{\partial x}-\varphi^{(\mp)}(x,y)\frac{\partial\bar{u}_i^{(\mp)}}{\partial y}+W^{(\mp)}(x,y)\bar{u}_i^{(\mp)}=\bar{f}_i^{(\mp)}(x,y),\\ \bar{u}_i^{(-)}(x,0)=0,\quad \bar{u}_i^{(+)}(x,a)=0,\quad \bar{u}_i^{(-)}(x,y)=\bar{u}_i^{(+)}(x+L,y),\end{gathered} \tag{20}$$

где

$$W^{(\mp)}(x,y)=-\frac{\partial\varphi^{(\mp)}}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial\bar{B}^{(\mp)}}{\partial u}(x,y),$$

$\bar{f}_i^{(\mp)}(x,y)$ — известные функции. В частности, $\bar{f}_1^{(\mp)}(x,y)=\dfrac{\partial^2\varphi^{(\mp)}}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi^{(\mp)}}{\partial y^2}$.

Уравнения (20) являются линейными дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка. Запишем их уравнения характеристик:

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{A(x,y)}{\varphi^{(\mp)}(x,y)}, \tag{21}$$

$$\left(f_i^{(\mp)}(x,y) - W^{(\mp)}(x,y)\bar{u}_i^{(\mp)}\right) dy = -\varphi^{(\mp)}(x,y)d\bar{u}_i^{(\mp)}.$$

В силу выполнения условия **A2** существуют первые интегралы

$$\Psi^{(\mp)}(x,y) = C_1^{(\mp)} \tag{22}$$

каждого из уравнений (21) и на отрезке $y \in [0,a]$ существуют функции $x = X^{(\mp)}\left(y, C_1^{(\mp)}\right)$ — решения каждого из этих уравнений [15].

Решая уравнения

$$\frac{d\bar{u}_i^{(\mp)}}{dy} = \frac{\bar{f}_i^{(\mp)}\left(X^{(\mp)}(y,C_1^{(\mp)}),y\right) - W^{(\mp)}\left(X^{(\mp)}(y,C_1^{(\mp)}),y\right)\bar{u}_i^{(\mp)}}{-\varphi^{(\mp)}\left(X^{(\mp)}(y,C_1^{(\mp)}),y\right)}$$

с условиями $\bar{u}_i^{(-)}(x,0) = 0, \bar{u}_i^{(+)}(x,a) = 0$, получаем выражения для $\bar{u}_i^{(\mp)}(x,y)$ :

$$\bar{u}_i^{(\mp)}(C_1^{(\mp)},y) = -\int\limits_{0,a}^{y} \exp\left(\int\limits_{y_1}^{y} \frac{W^{(\mp)}\left(X^{(\mp)}(y_2,C_1^{(\mp)}),y_2\right)}{\varphi^{(\mp)}\left(X^{(\mp)}(y_2,C_1^{(\mp)}),y_2\right)}dy_2\right) \frac{\bar{f}_i^{(\mp)}\left(X^{(\mp)}(y_1,C_1^{(\mp)}),y_1\right)}{\varphi^{(\mp)}\left(X^{(\mp)}(y_1,C_1^{(\mp)}),y_1\right)}dy_1. \tag{23}$$

Функции $\bar{u}_i^{(\mp)}(x,y)$ – решения задач (20) – будут определяться выражением (23), в которое вместо $C_1^{(\mp)}$ подставлены левые части выражений (22).

## 2.2. Функции переходного слоя

Уравнения для функций переходного слоя $Q^{(\mp)}(\xi,l,h(l,t),t,\varepsilon)$ определяются из равенств

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 Q^{(\mp)}}{\partial\xi^2} - \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}}\left(h_t - h_x A(l,h(l,t)) - \bar{u}^{(\mp)}(l-\varepsilon\xi\sin\alpha, h(l,t)+\varepsilon\xi\cos\alpha) - \right.\right.$$
$$\left.\left.-Q^{(\mp)}\right)\frac{\partial Q^{(\mp)}}{\partial\xi}\right) - \frac{\partial Q^{(\mp)}}{\partial t} - \frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial Q^{(\mp)}}{\partial\xi} -$$
$$-\frac{1}{1+h_x^2}\left(h_t h_x + A(l,h(l,t)) - \left(\bar{u}^{(\mp)}(l-\varepsilon\xi\sin\alpha, h(l,t)+\varepsilon\xi\cos\alpha) + Q^{(\mp)}\right)h_x\right)\frac{\partial Q^{(\mp)}}{\partial l} +$$
$$+\sum_{i=1}\varepsilon^i L_i[Q^{(\mp)}] = -Q^{(\mp)}\frac{\partial}{\partial y}\bar{u}^{(\mp)}(l-\varepsilon\xi\sin\alpha, h(l,t)+\varepsilon\xi\cos\alpha) + QB^{(\mp)}(\xi,l,t,\varepsilon), \tag{24}$$

где обозначено

$$QB^{(\mp)}(\xi,l,t,\varepsilon) := B(\bar{u}^{(\mp)}(l-\varepsilon\xi\sin\alpha, h(l,t)+\varepsilon\xi\cos\alpha) + Q^{(\mp)}, l-\varepsilon\xi\sin\alpha, h(l,t)+$$
$$+\varepsilon\xi\cos\alpha) - B(\bar{u}^{(\mp)}(l-\varepsilon\xi\sin\alpha, h(l,t)+\varepsilon\xi\cos\alpha), l-\varepsilon\xi\sin\alpha, h(l,t)+\varepsilon\xi\cos\alpha),$$

функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ определяются выражениями (5), а действие оператора $L_{\xi,l,t}$ определено выражением (7).

Подставляя в равенства (24) суммы (14) и (15), раскладывая входящие в правые части (24) функции по формуле Тейлора по степеням малого параметра и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon$, будем получать уравнения для функций $Q_i^{(\mp)}(\xi, l, h(l,t), t)$, $i = 0, 1, \ldots$

В качестве дополнительных условий потребуем убывания на бесконечности

$$Q_i^{(\mp)}(\mp\infty, l, h(l,t), t) = 0, \tag{25}$$

а также выполнения условий при $\xi = 0$, которые следуют из равенства (17). Перепишем (17) с учетом разложений (14) и (15):

$$\begin{aligned}&\bar{u}_0^{(-)}(l, h(l,t)) + \varepsilon\bar{u}_1^{(-)}(l, h(l,t)) + \ldots + Q_0^{(-)}(0, l, h(l,t), t) + \varepsilon Q_1^{(-)}(0, l, h(l,t), t) + \ldots = \\ &= \bar{u}_0^{(+)}(l, h(l,t)) + \varepsilon\bar{u}_1^{(+)}(l, h(l,t)) + \ldots + Q_0^{(+)}(0, l, h(l,t), t) + \varepsilon Q_1^{(+)}(0, l, h(l,t), t) + \ldots = \\ &= \varphi^*(l, h(l,t)).\end{aligned} \tag{26}$$

### 2.2.1. Функции переходного слоя нулевого порядка

Приравнивая коэффициенты при $\varepsilon^{-1}$ в равенствах (24) и при $\varepsilon^0$ в равенствах (26) и принимая во внимание условие (25), получим следующие задачи для функций $Q_0^{(\mp)}(\xi, l, h(l,t), t)$:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 Q_0^{(\mp)}}{\partial\xi^2} - \\ &- \frac{1}{\sqrt{1 + h_x^2(l,t)}}\Big(h_t(l,t) - h_x(l,t)A(l, h(l,t)) - \Big(\varphi^{(\mp)}(l, h(l,t)) + Q_0^{(\mp)}\Big)\Big)\frac{\partial Q_0^{(\mp)}}{\partial\xi} = 0; \\ &\varphi^{(\mp)}(l, h(l,t)) + Q_0^{(\mp)}(0, l, h(l,t), t) = \varphi^*(l, h(l,t)), \;\; Q_0^{(\mp)}(\mp\infty, l, h(l,t), t) = 0.\end{aligned} \tag{27}$$

Задачу для $Q_0^{(-)}$ будем рассматривать при $\xi \leqslant 0$, а для $Q_0^{(+)}$ – при $\xi \geqslant 0$.

Введем обозначения

$$\tilde{u}(\xi, h(l,t)) = \begin{cases}\varphi^{(-)}(l, h(l,t)) + Q_0^{(-)}(\xi, l, h(l,t), t), & \xi \leqslant 0,\\ \varphi^{(+)}(l, h(l,t)) + Q_0^{(+)}(\xi, l, h(l,t), t), & \xi \geqslant 0,\end{cases} \tag{28}$$

$$\tilde{B}(\xi, l, t) := B(\tilde{u}(\xi, h(l,t)), l, h(l,t)).$$

Каждое из уравнений (27), записанное в этих обозначениях, принимает вид (8). Уравнение (8) эквивалентно системе уравнений (9) и, как показано в пункте 1., существуют производные функции $\tilde{u}(\xi, h(l,t))$, при $\xi \leqslant 0$ и $\xi \geqslant 0$ :

$$\begin{aligned}\Phi^{(-)}(\xi, h(l,t)) &:= \Phi^{(-)}(\tilde{u}(\xi, h(l,t)), h(l,t)) = \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}, \quad \xi \leqslant 0,\\ \Phi^{(+)}(\xi, h(l,t)) &:= \Phi^{(+)}(\tilde{u}(\xi, h(l,t)), h(l,t)) = \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}, \quad \xi \geqslant 0,\end{aligned} \tag{29}$$

для которых имеют место выражения (11).

Каждое из уравнений (29) является уравнением с разделяющимися переменными, поэтому, решая каждое из них с начальным условием

$$\tilde{u}(0, h(l,t)) = \varphi^*(l, h(l,t)),$$

можно определить явные выражения для функций $\tilde{u}(\xi, h(l,t))$ и $Q_0^{(\mp)}(\xi, l, h(l,t), t)$, в которых $h(l,t)$ будет играть роль параметра.

Введем обозначения:

$$P^{(\mp)}(h(x,t)) := h_t(x,t) - h_x(x,t)A(x, h(x,t)) - \varphi^{(\mp)}(x, h(x,t)).$$

Для функций $h(x,t)$, удовлетворяющих неравенству

$$P^{(-)}(h(x,t)) > 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$$

существует функция $Q_0^{(-)}(\xi, l, h(l,t), t)$, решение задачи (27) при $\xi \leqslant 0$, а для функций $y = h(x,t)$, удовлетворяющих неравенству

$$P^{(+)}(h(x,t)) < 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$$

существует функция $Q_0^{(+)}(\xi, l, h(l,t), t)$, решение задачи (27) при $\xi \geqslant 0$.

Функции $Q_0^{(\mp)}(\xi, l, h(l,t), t)$ даются выражениями

$$Q_0^{(\mp)}(\xi, l, h(l,t), t) = 2C^{(\mp)}P^{(\mp)}(h(x,t)) \cdot \exp\left(\frac{P^{(\mp)}(h(x,t))}{\sqrt{1+h_x^2(l,t)}}\xi\right) \times$$
$$\times \left(1 + C^{(\mp)} \cdot \exp\left(\frac{P^{(\mp)}(h(x,t))}{\sqrt{1+h_x^2(l,t)}}\right)\xi\right)^{-1}. \quad (30)$$

Здесь

$$C^{(\mp)} =$$
$$= \left(\varphi^*(x, h(x,t)) - \varphi^{(\mp)}(x, h(x,t))\right) \cdot \left(2P^{(\mp)}(h(x,t)) - \left(\varphi^*(x, h(x,t)) - \varphi^{(\mp)}(x, h(x,t))\right)\right)^{-1},$$

а $\varphi^*(x, h(x,t))$ определяется выражением (3).

### 2.2.2. Функции переходного слоя первого порядка

Приравнивая слагаемые при $\varepsilon^0$ в равенствах (24), получим следующие уравнения для функций $Q_1^{(\mp)}(\xi, l, h(l,t), t)$ :

$$\frac{\partial^2 Q_1^{(\mp)}}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2(l,t)}}\left(h_t(l,t) - h_x(l,t)A(l, h(l,t)) - \tilde{u}(\xi, h(l,t))\right)\frac{\partial Q_1^{(\mp)}}{\partial \xi} +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2(l,t)}}\Phi^{(\mp)}(\xi, h(l,t))Q_1 = f_1^{(\mp)}(\xi, l, t), \quad (31)$$

где

$$f_1^{(\mp)}(\xi,l,t)=\frac{\partial Q_0^{(\mp)}}{\partial t}(\xi,l,h(l,t),t)+\frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{\frac{3}{2}}}\Phi^{(\mp)}(\xi,h(l,t))+$$
$$+\frac{1}{1+h_x^2}\left(h_th_x+A(l,h(l,t))-\tilde{u}(\xi,h(l,t))h_x\right)\frac{\partial Q_0^{(\mp)}}{\partial l}(\xi,l,h(l,t),t)-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{1+h_x^2(l,t)}}\Phi^{(\mp)}(\xi,h(l,t))\times$$
$$\times\left(\bar{u}_1^{(\mp)}(l,h(l,t))-\frac{h_x}{\sqrt{1+h_x^2}}\frac{\partial\varphi^{(\mp)}}{\partial x}(l,h(l,t))\xi+\frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}}\frac{\partial\varphi^{(\mp)}}{\partial y}(l,h(l,t))\xi\right)-$$
$$-\frac{1}{1+h_x^2}\left(-h_x^2\frac{\partial A}{\partial x}(l,h(l,t))+h_x\frac{\partial A}{\partial y}(l,h(l,t))\right)\Phi^{(\mp)}(\xi,h(l,t))\xi+$$
$$+A(l,h(l,t))\frac{\partial\varphi^{(\mp)}}{\partial x}(l,h(l,t))-\tilde{u}(\xi,h(l,t))\frac{\partial\varphi^{(\mp)}}{\partial y}(l,h(l,t))+\tilde{B}(\xi,l,t),$$

а производные функции $h(x,t)$ берутся при $x=l$. Из равенств (26) в порядке $\varepsilon^1$ следуют краевые условия

$$Q_1^{(\mp)}(0,l,h(l,t),t)+\bar{u}_1^{(\mp)}(l,h(l,t))=0. \tag{32}$$

Добавим также условия на бесконечности

$$Q_1^{(\mp)}(\mp\infty,l,h(l,t),t)=0. \tag{33}$$

Решения задач (31) – (33) можно выписать в явном виде:

$$Q_1^{(\mp)}(\xi,l,h(l,t),t)=-\bar{u}_1^{(\mp)}(l,h(l,t))\frac{\Phi^{(\mp)}(\xi,h(l,t))}{\Phi^{(\mp)}(0,h(l,t))}+$$
$$+\Phi^{(\mp)}(\xi,h(l,t))\int\limits_0^{\xi}\frac{ds}{\Phi^{(\mp)}(s,h(l,t))}\int\limits_{\mp\infty}^{s}f_1^{(\mp)}(\eta,l,t)d\eta.$$

Из экспоненциального убывания функций $Q_0^{(\mp)}(\xi,l,h(l,t),t)$ при $\xi\to\mp\infty$ (см. (30)) следует экспоненциальное убывание функций $Q_1^{(\mp)}(\xi,l,h(l,t),t)$ при $\xi\to\mp\infty$.

### 2.2.3. Функции переходного слоя произвольного порядка

Функции переходного слоя произвольного порядка $k=2,3,\dots$ определяются как решения задач

$$\frac{\partial^2Q_k^{(\mp)}}{\partial\xi^2}-\frac{1}{\sqrt{1+h_x^2(l,t)}}\left(h_t(l,t)-h_x(l,t)A(l,h(l,t))-\tilde{u}(\xi,h(l,t))\right)\frac{\partial Q_k^{(\mp)}}{\partial\xi}+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{1+h_x^2(l,t)}}\Phi^{(\mp)}(\xi,h(l,t))Q_k=f_k^{(\mp)}(\xi,l,t),$$
$$Q_k^{(\mp)}(0,l,h(l,t),t)+\bar{u}_k^{(\mp)}(l,h(l,t))=0,\quad Q_k^{(\mp)}(\mp\infty,l,h(l,t),t)=0$$

с известными выражениями для $f_k^{(\mp)}(\xi,l,t)$. Функции $Q_k^{(\mp)}$, $k=2,3,...$ экспоненциально убывают при $\xi\to\mp\infty$.

# 3. Асимптотическое приближение положения фронта

Неизвестные коэффициенты $h_i(l,t)\quad i=1,2,\ldots$ разложения (16) будем определять из условия сшивания (18) производных по направлению нормали к кривой $h(x,t)$.

Запишем производную по направлению нормали к кривой $h(x,t)$ в переменных $r$, $l$, $t$ и в переменных $x$, $y$, $t$ :

$$\frac{\partial}{\partial n} = (\mathbf{n}, \nabla) = \frac{\partial}{\partial r} = -\sin\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\alpha\frac{\partial}{\partial y}, \tag{34}$$

где $\sin\alpha, \cos\alpha$ определяются выражением (5).

В переменных $\xi, l, t$ эта производная имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \xi}.$$

С учетом равенств (34), представления (13) и разложений (14), (15) перепишем условия сшивания производных (18) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&-\sin\alpha\frac{\partial\varphi^{(-)}}{\partial x}(l,h(l,t)) + \cos\alpha\frac{\partial\varphi^{(-)}}{\partial y}(l,h(l,t)) - \varepsilon\sin\alpha\frac{\partial\bar{u}_1^{(-)}}{\partial x}(l,h(l,t)) +\\
&+\varepsilon\cos\alpha\frac{\partial\bar{u}_1^{(-)}}{\partial y}(l,h(l,t)) + \ldots + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial\xi}(0,l,h(l,t),t) + \frac{\partial Q_1^{(-)}}{\partial\xi}(0,l,h(l,t),t) + \ldots =\\
&-\sin\alpha\frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial x}(l,h(l,t)) + \cos\alpha\frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial y}(l,h(l,t)) - \varepsilon\sin\alpha\frac{\partial\bar{u}_1^{(+)}}{\partial x}(l,h(l,t)) +\\
&+\varepsilon\cos\alpha\frac{\partial\bar{u}_1^{(+)}}{\partial y}(l,h(l,t)) + \ldots + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial\xi}(0,l,h(l,t),t) + \frac{\partial Q_1^{(+)}}{\partial\xi}(0,l,h(l,t),t) + \ldots
\end{aligned} \tag{35}$$

Введем функцию $H(l,h(l,t),t,\varepsilon)$:

$$H(l,h(l,t),t,\varepsilon) := \varepsilon\frac{\partial U^{(-)}}{\partial n}(l,h(l,t),t,\varepsilon) - \varepsilon\frac{\partial U^{(+)}}{\partial n}(l,h(l,t),t,\varepsilon),$$

с помощью которой перепишем условие сшивания (18) как

$$H(l,h(l,t),t,\varepsilon) = 0.$$

Представим функцию $H(l,h(l,t),t,\varepsilon)$ в виде суммы

$$H(l,h(l,t),t,\varepsilon) = H_0(l,h(l,t),t) + \varepsilon H_1(l,h(l,t),t) + \varepsilon^2 H_2(l,h(l,t),t) + \ldots,$$

где

$$H_0(l,h(l,t),t) = \frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial\xi}(0,l,h(l,t),t) - \frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial\xi}(0,l,h(l,t),t),$$

$$\begin{aligned}
H_1(l,h(l,t),t) &= -\sin\alpha\frac{\partial\varphi^{(-)}}{\partial x}(l,h(l,t)) + \cos\alpha\frac{\partial\varphi^{(-)}}{\partial y}(l,h(l,t)) + \frac{\partial Q_1^{(-)}}{\partial\xi}(0,l,h(l,t),t) -\\
&-\left(-\sin\alpha\frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial x}(l,h(l,t)) + \cos\alpha\frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial y}(l,h(l,t)) + \frac{\partial Q_1^{(+)}}{\partial\xi}(0,l,h(l,t),t)\right) \text{ и т.д.}
\end{aligned}$$

Условия гладкого сшивания (35) в порядке $\varepsilon^0$ с учетом обозначений (28) и (29) дают равенство

$$H_0(l,h(l,t),t) = \Phi^{(-)}(\varphi^*(l,t),h(l,t)) - \Phi^{(+)}(\varphi^*(l,t),h(l,t)) = 0. \quad (36)$$

Выпишем выражение для функции $H_0(x,h(x,t),t)$ с учетом выражений (11):

$$H_0(x,h(x,t),t) = \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2(x,t)}}\Big((h_t(x,t) - h_x(x,t)A(x,h(x,t)))\times$$
$$\times\left(\varphi^{(+)}(x,h(x,t)) - \varphi^{(-)}(x,h(x,t))\right) - \frac{1}{2}\left(\left(\varphi^{(+)}(x,h(x,t))\right)^2 - \left(\varphi^{(-)}(x,h(x,t))\right)^2\right)\Big). \quad (37)$$

Выполнение условия **А3** (см. также (12)) означает, что равенство (36) выполняется при $h(l,t) = h_0(l,t)$. Будем считать, что функция $h_0(x,t)$ является первым слагаемым в разложении (16).

Запишем условия сшивания (35) в порядке $\varepsilon^1$ с учетом разложения (16):

$$\frac{1}{\sqrt{1+h_x^2(x,t)}}\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial H_0}{\partial h_x}(x,h_0(x,t),t)\frac{\partial h_1}{\partial x} +$$
$$+\frac{\partial H_0}{\partial h}(x,h_0(x,t),t)h_1 + H_1(l,h_0(l,t),t) = 0. \quad (38)$$

Определим функцию $h_1(x,t)$ как решение уравнения (38) с условиями

$$h_1(x,t) = h_1(x+L,t); \quad h_1(x,0) = 0,$$

где функция $H_0(x,h(x,t),t)$ дается выражением (37). Задача для функции $h_1(x,t)$ разрешима в силу того, что коэффициент при слагаемом $h_{1t}$ в уравнении (38) положительный (см. [15]).

Уравнения для коэффициентов $h_k(x,t)$, $k = 2,3,\ldots$ разложения (16) получают из условий гладкого сшивания (35) в порядке $\varepsilon^k$.

Функции $h_k(x,t)$ определяются как решения задач

$$\frac{1}{\sqrt{1+h_x^2(x,t)}}\frac{\partial h_k}{\partial t} + \frac{\partial H_0}{\partial h_x}(x,h_0(x,t),t)\frac{\partial h_k}{\partial x} +$$
$$+\frac{\partial H_0}{\partial h}(x,h_0(x,t),t)h_k + H_k(x,h(x,t),t) = 0; \quad h_k(x,t) = h_k(x+L,t), \quad h_k(x,0) = 0.$$

## 4. Асимптотическое представление решения

Определим члены рядов (14)–(16) до номера $k$ включительно и положим

$$\hat{h}_k(x,t) = \sum_{i=0}^{k}\varepsilon^i h_i(x,t).$$

В окрестности кривой $\hat{h}_k(x,t)$ перейдем к локальным координатам $(l,\hat{r})$ с помощью соотношений, аналогичных (4), и введем растянутую переменную $\hat{\xi} = \frac{\hat{r}}{\varepsilon}$. Кривая

$\hat{h}_k(x,t)$ в каждый момент времени разделяет область $\bar{D}$ на подобласти $\bar{D}_k^{(-)}$ и $\bar{D}_k^{(+)}$ ($\bar{D}_k^{(-)} : (x,y) \in \mathbb{R} \times [0; \hat{h}_k(x,t)]$ и $\bar{D}_k^{(+)} : (x,y) \in \mathbb{R} \times [\hat{h}_k(x,t), a]$).

Составим суммы

$$\begin{aligned}
U_k^{(-)}(x,y,t,\varepsilon) &= \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i \left( \bar{u}_i^{(-)}(x,y) + Q_i^{(-)}(\hat{\xi}, l, \hat{h}_k(l,t), t) \right), \ (x,y,t) \in \bar{D}_k^{(-)} \times [0;T], \ \xi \leqslant 0; \\
U_k^{(+)}(x,y,t,\varepsilon) &= \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i \left( \bar{u}_i^{(+)}(x,y) + Q_i^{(+)}(\hat{\xi}, l, \hat{h}_k(l,t), t) \right), \ (x,y,t) \in \bar{D}_k^{(+)} \times [0;T], \ \xi \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{39}$$

Переменные $x$ и $l$ в (39) связаны первым из соотношений (4) с заменой $r$ на $\hat{r}$.

Положим

$$U_k = \begin{cases} U_k^{(-)}(x,y,t,\varepsilon), & (x,y,t) \in \bar{D}_k^{(-)} \times [0;T], \\ U_k^{(+)}(x,y,t,\varepsilon), & (x,y,t) \in \bar{D}_k^{(+)} \times [0;T]. \end{cases}$$

Функция $U_k(x,y,t,\varepsilon)$ по своему построению удовлетворяет уравнению (1) с точностью $O(\varepsilon^{k+1})$ всюду в области $\bar{D}$, за исключением кривой $\hat{h}_k(x,t)$, а краевым и начальным условиям задачи (1) эта функция удовлетворяет точно.

Для обоснования построенного асимптотического приближения можно воспользоваться методом дифференциальных неравенств, построив по аналогии с [7] нижнее ($\alpha(x,y,t,\varepsilon)$) и верхнее ($\beta(x,y,t,\varepsilon)$) решения задачи (1) и тем самым доказать следующую теорему.

**Теорема.** *При выполнении условий **A1**–**A3** для любой достаточно гладкой начальной функции $u_{init}(x,y,\varepsilon)$, лежащей между верхним и нижним решениями*

$$\alpha(x,y,0,\varepsilon) \leqslant u_{init}(x,y,\varepsilon) \leqslant \beta(x,y,0,\varepsilon),$$

*существует решение $u(x,y,t,\varepsilon)$ задачи (1), которое при любом $t \in [0;T]$ заключено между этими верхним и нижним решениями и для которого функция $U_n(x,y,t,\varepsilon)$ является равномерным в области $\bar{D} \times [0;T]$ асимптотическим приближением с точностью $O(\varepsilon^{n+1})$, то есть всюду в области $\bar{D} \times [0;T]$ справедлива оценка*

$$|u(x,y,t,\varepsilon) - U_n(x,y,t,\varepsilon)| < C\varepsilon^{n+1}, \quad C > 0.$$

# Заключение

В настоящей работе была рассмотрена задача, являющаяся примером более общей постановки, а именно задачи для уравнения

$$\varepsilon \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = (\mathbf{A}(u,x,y), \nabla)\, u + B(u,x,y),$$

где $\mathbf{A}(u,x,y) = \{A_1(u,x,y), A_2(u,x,y)\}$.

Выбранный в (1) специальный вид функций $A_1$ и $A_2$ позволяет получить явный вид для функций переходного слоя и уравнение для кривой локализации фронта. Эти сведения могут быть использованы для разработки математических моделей или численных алгоритмов для решения задач вида реакция-диффузия-адвекция.

## Список литературы / References

[1] Нефедов Н. Н., “Асимптотический метод дифференциальных неравенств в исследовании периодических контрастных структур: существование, асимптотика, устойчивость”, *Дифференц. уравнения*, **36**:2 (2000), 262–269; English transl.: Nefedov N. N., “An asymptotic method of differential inequalities for the investigation of periodic contrast structures: Existence, asymptotics, and stability”, *Differential Equations*, **36**:2 (2000), 298–305.

[2] Волков В. Т., Нефедов Н. Н., “Развитие асимптотического метода дифференциальных неравенств для исследования периодических контрастных структур в уравнениях реакция-диффузия”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46**:4 (2006), 615–623; English transl.: Volkov V. T., Nefedov N. N., “Development of the asymptotic method of differential inequalities for investigation of periodic contrast structures in reaction-diffusion equations”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **46**:4 (2006), 585–593.

[3] Божевольнов Ю. В., Нефедов Н. Н., “Движение фронта в параболической задаче реакция-диффузия”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:2 (2010), 276–285; English transl.: Bozhevol'nov Yu. V., Nefedov N. N., “Front motion in the parabolic reaction-diffusion problem”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **50**:2 (2010), 264–273.

[4] Антипов Е. А., Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., “Асимптотика движения фронта в задаче реакция-диффузия-адвекция”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **54**:10 (2014), 1594–1607; English transl.: Antipov E. A., Levashova N. T., Nefedov N.N., “Asymptotics of the front motion in the reaction-diffusion-advection problem”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **54**:10 (2014), 1536–1549.

[5] Nefedov N., Yagremtsev A., “On extension of asymptotic comparison principle for time periodic reaction-diffusion-advection systems with boundary and internal layers”, *Lecture Notes in Computer Science*, **9045** (2015), 62–71.

[6] Volkov V. T., Nefedov N. N., Antipov E. A., “Asymptotic-numerical method for moving fronts in two-dimensional r-d-a problems”, *Lecture Notes in Computer Science.*, **9045** (2015), 408–416.

[7] Антипов Е. А., Волков В. Т., Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., “Решение вида движущегося фронта двумерной задачи реакция-диффузия”, *Модел. и анализ информ. систем*, **24**:3 (2017), 259–279; [Antipov E. A., Volkov V. T., Levashova N. T., Nefedov N. N., “Moving Front Solution of the Reaction-Diffusion Problem”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:3 (2017), 259–279, (in Russian).]

[8] Liberman A., Ivanov M., Peil O., Valiev D, Eriksson L., “Numerical studies of curved stationary flames in wide tubes”, *Combustion Theory and Modelling*, **7**:4 (2003), 653–676.

[9] Руденко О. В., “Неоднородное уравнение бюргерса с модульной нелинейностью: возбуждение и эволюция интенсивных волн”, *Доклады Академии наук*, **474**:6 (2017), 671–674; English transl.: Rudenko O. V., “Inhomogeneous burgers equation with modular nonlinearity: Excitation and evolution of high-intensity waves”, *Doklady Mathematics*, **95**:3 (2017), 291–294.

[10] Lukyanenko D. V., Volkov V. T., Nefedov N. N., Recke L., Schneider K., “Analytic-numerical approach to solving singularly perturbed parabolic equations with the use of dynamic adapted meshes”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:3 (2016), 334–341.

[11] Volkov V., Lukyanenko D., Nefedov N., “Asymptotic-numerical method for the location and dynamics of internal layers in singular perturbed parabolic problems”, *Lecture Notes in Computer Science*, **10187** (2017), 721–729.

[12] Lukyanenko D., Nefedov N., Nikulin E., Volkov V., "Use of asymptotics for new dynamic adapted mesh construction for periodic solutions with an interior layer of reaction-diffusion-advection equations", *Lecture Notes in Computer Science*, **10187** (2017), 107–118.

[13] Lukyanenko D. V., Volkov V. T., Nefedov N. N., "Dynamically adapted mesh construction for the efficient numerical solution of a singular perturbed reaction-diffusion-advection equation", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:3 (2017), 322–338.

[14] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*, Высш. школа, М., 1990, 208 с.; [Vasil'eva A. B., Butuzov V. F., *Asimptoticheskie metody v teorii singuljarnyh vozmushhenij*, Vysshaja shkola, Moskva, 1990, 208 pp., (in Russian).]

[15] Нефедов Н. Н., Попов В. Ю., Волков В. Т., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Курс лекций, Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, М., 2016, 200 с.; [Nefedov N. N., Popov V. Ju., Volkov V. T., *Obyknovennye differencialnye uravnenija*, Kurs lekcij, Fizicheskij fakultet MGU im. M.V. Lomonosova, Moskva, 2016, 200 pp., (in Russian).]

---

**Antipov E. A., Levashova N. T., Nefedov N. N.**, "Asymptotic Approximation of the Solution of the Reaction-Diffusion-Advection Equation with a Nonlinear Advective Term", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:1 (2018), 18–32.

**DOI:** 10.18255/1818-1015-2018-1-18-32

**Abstract.** We consider a solution in a moving front form of the initial-boundary value problem for a singularly perturbed reaction-diffusion equation in a band with periodic conditions in one of the variables. Interest in solutions of the front type is associated with combustion problems or nonlinear acoustic waves. In the domain of the function which describes the moving front there is a subdomain where the function has a large gradient. This subdomain is called the internal transition layer. Boundary value problems with internal transition layers have a natural small parameter that is equal to the ratio of the transition layer width to the width of the region under consideration. The presence of a small parameter at the highest spatial derivative makes the problem singularly perturbed. The numerical solution of such problems meets certain difficulties connected with the choice of grids and initial conditions. To solve these problems the use of analytical methods is especially successful. Asymptotic analysis which uses Vasilieva's algorithm was carried out in the paper. That made it possible to obtain an asymptotic approximation of the solution, which can be used as an initial condition for a numerical algorithm. We also determined the conditions for the existence of a front type solution. In addition, the analytical methods used in the paper make it possible to obtain in an explicit form the front motion equation approximation. This information can be used to develop mathematical models or numerical algorithms for solving boundary value problems for the reaction-diffusion-advection type equations.

**Keywords:** reaction-diffusion-advection problem, two-dimensional moving front, internal transition layer asymptotic representation, small parameter

**On the authors:**
Evgeny A. Antipov, orcid.org/0000-0001-6734-683X,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
1 Leninskiye Gory, bld. 2, Moscow, 119991, Russia, e-mail: a.evgen.a@gmail.com

Natalia T. Levashova, orcid.org/0000-0002-1916-166X, PhD,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
1 Leninskiye Gory, bld. 2, Moscow, 119991, Russia, e-mail: natasha@npanalytica.ru

Nikolay N. Nefedov, orcid.org/0000-0002-3651-6434, PhD,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
1 Leninskiye Gory, bld. 2, Moscow, 119991, Russia, e-mail: natasha@npanalytica.ru

**Acknowledgments:**
This work was supported by Russian fund of basic researches, project No 16-01-00437.