Моделирование и анализ информационных систем. Т. 25, № 1 (2018), с. 33–53
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 25, No 1 (2018), pp. 33–53

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-33-53

УДК 517.9

Верхнее и нижнее решения для системы уравнений типа ФицХью–Нагумо

Быцюра С. В., Левашова Н. Т.[1]

получена 20 ноября 2017

Аннотация. Рассматривается решение вида движущегося фронта сингулярно возмущенной системы уравнений типа ФицХью–Нагумо. Решение содержит внутренний переходный слой, то есть подобласть где происходит резкое изменение значений функций, описывающих решение. В начально-краевых задачах с решениями вида фронтов содержится естественный малый параметр, равный отношению ширины внутреннего переходного слоя к ширине рассматриваемой области. Учет малого параметра приводит к тому, что уравнения становятся сингулярно возмущенными, тем самым задачи относятся к разряду «жестких», численное решение которых встречает определенные трудности и не всегда дает достоверный результат. В связи с этим возрастает роль аналитического исследования таких задач и доказательства существования решения с внутренним переходным слоем. В этих целях особо эффективным является использование метода дифференциальных неравенств, который состоит в построении непрерывных функций, называемых верхним и нижним решениями. При этом важную роль играет так называемое «условие квазимонотонности» функций, описывающих реактивные слагаемые. В настоящей работе приведен алгоритм построения верхнего и нижнего решений системы параболических уравнений с одномасштабным внутренним переходным слоем, при этом условие квазимонотонности отличается от аналогичного условия в ранее опубликованных работах. Приведенный алгоритм может быть в дальнейшем обобщен на более сложные системы с двухмасштабными переходными слоями или на системы с разрывными реактивным слагаемыми. Подобные исследования имеют важное практическое значение для создания математически обоснованных моделей биофизики.

Ключевые слова: система параболических уравнений, внутренний переходный слой, малый параметр, верхнее и нижнее решения, метод дифференциальных неравенств, асимптотическое представление

Для цитирования: Быцюра С. В., Левашова Н.Т., "Верхнее и нижнее решения для системы уравнений типа ФицХью–Нагумо", *Моделирование и анализ информационных систем*, **25**:1 (2018), 33–53.

Об авторах:
Быцюра Светлана Владимировна, orcid.org/0000-0001-7787-437X, магистр,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: sv.bytcyura@physics.msu.ru

Левашова Наталия Тимуровна, orcid.org/0000-0002-1916-166X, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: natasha@npanalytica.ru

Благодарности:

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, проект №16-01-00437.

Введение

Интерес к параболическим системам уравнений типа реакция-диффузия возникает в связи с большим количеством различных биофизических явлений, которые можно описывать с помощью таких систем, например, возникновение пятен на шкурах животных [1], возбуждение в сердечной мышце [2], развитие урбоэкосистем [3–5]. В каждой из перечисленных моделей наибольший интерес представляют решения вида автоволновых фронтов. Такие решения описываются функциями с внутренними переходными слоями, то есть функциями, в области определения которых содержится подобласть, где происходит резкое изменение значений функций. В начально-краевых задачах с решениями вида движущихся фронтов содержится естественный малый параметр, равный отношению ширины внутреннего переходного слоя к ширине рассматриваемой области. Учет малого параметра приводит к тому, что уравнения становятся сингулярно возмущенными, тем самым задачи относятся к разряду «жестких», численное решение которых встречает определенные трудности и не всегда дает достоверный результат. В связи с этим возрастает роль аналитического исследования таких задач и доказательства существования решения с внутренним переходным слоем. В этих целях особо эффективным является использование метода дифференциальных неравенств [6] и его модификаций для задач с внутренними переходными слоями [7–10]. Асимптотический метод дифференциальных неравенств состоит в построении непрерывных функций, которые называются верхним и нижним решениями, как модификаций асимптотических приближений решений по малому параметру. При этом важную роль играет так называемое «условие квазимонотонности» функций, описывающих реактивные слагаемые [6]. Отметим, что в настоящей работе приводится алгоритм построения верхнего и нижнего решений для системы уравнений, в которой условие квазимонотонности отличается от аналогичного условия в ранее опубликованных работах [10–12].

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую систему уравнений типа ФицХью–Нагумо:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} = g(v) + u, \quad \varepsilon^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon^3 \frac{\partial u}{\partial t} = -v + \gamma u, \quad 0 < x < 1, \;\; 0 < t \le T; \\
&\frac{\partial v}{\partial x}(0,t,\varepsilon) = \frac{\partial v}{\partial x}(1,t,\varepsilon) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,t,\varepsilon) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t,\varepsilon) = 0; \quad 0 \le t \le T, \\
&v(x,0,\varepsilon) = v_{init}(x,\varepsilon), \quad u(x,0,\varepsilon) = u_{init}(x,\varepsilon), \quad 0 \le x \le 1,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $T > 0$, $\gamma > 0$, а функция $g(v)$ – достаточно гладкая в области I_v допустимых значений v.

1.1. Вырожденная система уравнений

Положив в (1) $\varepsilon = 0$, получим так называемую «вырожденную систему уравнений»:

$$g(v) + u = 0, \quad -v + \gamma u = 0.$$

Из второго уравнения получаем
$$u = v/\gamma.$$
Подставим это выражение для u в первое уравнение вырожденной системы, тогда получим $g(v) + v/\gamma = 0$.

Обозначим $h(v) := g(v) + v/\gamma$.

Условие A1. Пусть уравнение $h(v) = 0$ имеет ровно три изолированных корня $v = v^i \in I_v,\ \ i = 1, 2, 3$ причем выполнены неравенства $v^1 < v^2 < v^3$.

Условие A2. Пусть справедливо неравенство
$$\gamma g_v \left(v^{1,3}\right) - 1 > 0.$$

Заметим, что следствием условий **A1**, **A2** является выполнение неравенств
$$h_v(v^i) > 0,\ \ i = 1, 3;\ \ h_v(v^2) < 0. \tag{2}$$

Мы будем рассматривать решение вида движущегося фронта, локализованного в каждый момент времени в окрестности некоторой внутренней точки $x^*(t)$ отрезка $[0; 1]$, а именно пару функций (v, u), близкую к $(v^1, v^1/\gamma)$ слева от малой окрестности точки $x^*(t)$ и к $(v^3, v^3/\gamma)$ справа от малой окрестности точки $x^*(t)$, и претерпевающую резкое изменение от значений $(v^1, v^1/\gamma)$ до значений $(v^3, v^3/\gamma)$ в окрестности точки $x^*(t)$. Эту окрестность называют внутренним переходным слоем. Считаем, что в начальный момент времени фронт уже сформирован и сосредоточен в окрестности точки $x_{00} \in (0; 1)$.

1.2. Присоединенная система

На каждой из полупрямых $\xi \le 0$ и $\xi \ge 0$ рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $\tilde{v}(\xi, t)$
$$\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \xi^2} + W\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} = h(\tilde{v}). \tag{3}$$
Здесь W играет роль параметра.

Это уравнение эквивалентно системе двух дифференциальных уравнений первого порядка
$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} = \Phi, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = -W\Phi + h(\tilde{v}). \tag{4}$$
В силу неравенств (2) точки $(v^{1,3}, 0)$ являются точками покоя типа седла системы (4) на фазовой плоскости $(\tilde{v}, \Phi)$.

Разделим второе уравнение на первое, затем домножим полученное равенство на Φ и придем к уравнению первого порядка относительно функции $\Phi(\tilde{v}, W)$, которое описывает фазовые траектории системы (4) на фазовой плоскости $(\tilde{v}, \Phi)$ в зависимости от параметра W:
$$\Phi\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{v}} = -W\Phi + h(\tilde{v}).$$

Потребуем выполнения следующего условия:

Условие A3. Пусть существует такое множество вещественных чисел V, что при $W \in V$ определено решение следующих двух задач Коши:

$$\begin{aligned} &\Phi^{(-)}\frac{\partial \Phi^{(-)}}{\partial \tilde{v}} = -W\Phi^{(-)} + h(\tilde{v}), \quad v^1 < \tilde{v} \leq v^3, \\ &\Phi^{(-)}\left(v^1, W\right) = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

и

$$\begin{aligned} &\Phi^{(+)}\frac{\partial \Phi^{(+)}}{\partial \tilde{v}} = -W\Phi^{(+)} + h(\tilde{v}), \quad v^1 \leq \tilde{v} < v^3, \\ &\Phi^{(+)}\left(v^3, W\right) = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

причем выполняются неравенства:

$$\Phi^{(-)}(\tilde{v}, W) > 0, \;\; v^1 < \tilde{v} \leq v^3; \qquad \Phi^{(+)}(\tilde{v}, W) > 0, \;\; v^1 \leq \tilde{v} < v^3.$$

Условия существования решения задач типа (5) и (6) сформулированы в [13].

Условие **A3** гарантирует существование на фазовой плоскости $(\tilde{v}, \Phi)$ двух семейств сепаратрис $\Phi^{(-)}(\tilde{v}, W)$, $W \in V$, входящих в седло $(v^1, 0)$ при $\xi \to -\infty$ и $\Phi^{(+)}(\tilde{v}, W)$, $W \in V$, входящих в седло $(v^3, 0)$ при $\xi \to +\infty$.

Введем функцию

$$H_0(\tilde{v}, W) := \Phi^{(-)}(\tilde{v}, W) - \Phi^{(+)}(\tilde{v}, W). \tag{7}$$

Условие A4. Пусть существует величина $W_0 \in V$ – решение уравнения

$$H_0(v^2, W_0) = \Phi^{(-)}(v^2, W_0) - \Phi^{(+)}(v^2, W_0) = 0,$$

где значение v^2 определено в условии **A1**, и пусть выполняется неравенство

$$\frac{\partial H_0}{\partial W}(v^2, W_0) > 0. \tag{8}$$

Равенство $H_0(v^2, W_0) = 0$ в условии **A4** означает пересечение сепаратрис $\Phi^{(-)}(v^2, W_0)$ и $\Phi^{(+)}(v^2, W_0)$ на фазовой плоскости $(\tilde{v}, \Phi)$.

2. Асимптотическое представление решения

В настоящей работе мы будем строить асимптотическое приближение решения третьего порядка по ε.

Положение точки $x^*(t)$ в каждый момент времени не известно. Мы будем искать его в виде асимптотического приближения

$$x^*(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \ldots \tag{9}$$

Обозначим через W скорость движения фронта:

$$W = \frac{dx^*}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + \varepsilon\frac{dx_1}{dt} + \ldots = W_0 + \varepsilon W_1 + \ldots \tag{10}$$

Кривая $x = x^*(t, \varepsilon)$ делит область $\bar{D} := \{(x, t) \in [0; 1] \times [0; T]\}$ на плоскости (x, t) на две подобласти: $\bar{D}^{(-)} := \{(x, t) \in [0; x^*] \times [0; T]\}$ и $\bar{D}^{(+)} := \{(x, t) \in [x^*; 1] \times [0; T]\}$.

Асимптотическое представление решения задачи (1) в каждый момент времени строится отдельно в каждой из этих подобластей:

$$V = \begin{cases} v^{(-)}, \ (x, t) \in \bar{D}^{(-)}, \\ v^{(+)}, \ (x, t) \in \bar{D}^{(+)}; \end{cases} \quad U = \begin{cases} u^{(-)}, \ (x, t) \in \bar{D}^{(-)}, \\ u^{(+)}, \ (x, t) \in \bar{D}^{(+)}. \end{cases}$$

Для подробного описания решения в области переходного слоя введем растянутую переменную

$$\xi = \frac{x - x^*(t, \varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Каждую из функций $v^{(\mp)}$ и $u^{(\mp)}$ будем искать как сумму двух слагаемых:

$$v^{(\mp)} = v^{1,3} + Q^{(\mp)}v\left(\xi, t, \varepsilon\right), \quad u^{(\mp)} = v^{1,3}/\gamma + Q^{(\mp)}u\left(\xi, t, \varepsilon\right), \tag{11}$$

где $Q^{(\mp)}v\left(\xi, t, \varepsilon\right)$, $Q^{(\mp)}u\left(\xi, t, \varepsilon\right)$ – функции, описывающие решение в области переходного слоя. Эти функции мы будем представлять в виде разложения по степеням малого параметра ε :

$$Q^{(\mp)}v(\xi, t, \varepsilon) = Q_0 v^{(\mp)}(\xi, t) + \varepsilon Q_1 v^{(\mp)}(\xi, t) + \ldots, \tag{12}$$

$$Q^{(\mp)}u(\xi, t, \varepsilon) = Q_0 u^{(\mp)}(\xi, t) + \varepsilon Q_1 u^{(\mp)}(\xi, t) + \ldots \tag{13}$$

Функции $v^{(-)}$ и $v^{(+)}$, как и функции $u^{(-)}$ и $u^{(+)}$, будем гладко сшивать в точке $x^*(t, \varepsilon)$ в каждый момент времени t, считая, что выполняются равенства

$$v^{(-)}(x^*(t, \varepsilon)) = v^{(+)}(x^*(t, \varepsilon)) = v^2, \quad u^{(-)}(x^*(t, \varepsilon)) = u^{(+)}(x^*(t, \varepsilon)) = v^2/\gamma; \tag{14}$$

$$\frac{\partial v^{(-)}}{\partial x}(x^*(t, \varepsilon)) = \frac{\partial v^{(+)}}{\partial x}(x^*(t, \varepsilon)), \quad \frac{\partial u^{(-)}}{\partial x}(x^*(t, \varepsilon)) = \frac{\partial u^{(+)}}{\partial x}(x^*(t, \varepsilon)). \tag{15}$$

2.1. Функции переходного слоя

Перепишем дифференциальные операторы, входящие в уравнения (1), в переменных ξ и t :

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{dx^*}{dt}\frac{\partial}{\partial \xi} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t},$$
$$\varepsilon^4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \varepsilon \frac{dx^*}{dt}\frac{\partial}{\partial \xi} - \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial t}.$$

Уравнения для коэффициентов разложений (12) и (13), функций $Q_i^{(\mp)}v(\xi, t)$, $Q_i^{(\mp)}u(\xi, t)$, $i = 0, 1, ...$ получаются, если приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε в разложении Тейлора по степеням малого параметра равенств

$$\frac{\partial^2 Q^{(\mp)}v}{\partial \xi^2} + \frac{dx^*}{dt}\frac{\partial Q^{(\mp)}v}{\partial \xi} - \varepsilon \frac{\partial Q^{(\mp)}v}{\partial t} = g\left(v^{1,3} + Q^{(\mp)}v\right) + \left(v^{1,3}/\gamma + Q^{(\mp)}u\right), \tag{16}$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 Q^{(\mp)}u}{\partial \xi^2} + \varepsilon \frac{dx^*}{dt}\frac{\partial Q^{(\mp)}u}{\partial \xi} - \varepsilon^3 \frac{\partial Q^{(\mp)}u}{\partial t} = -Q^{(\mp)}v + \gamma Q^{(\mp)}u. \tag{17}$$

Для того, чтобы получить граничные условия для функций $Q_i^{(\mp)}v$, $Q_i^{(\mp)}u$, подставим суммы (11) с учетом разложений (12) и (13) в равенства (14):

$$v^1 + Q_0 v^{(-)}(0,t) + \varepsilon Q_1 v^{(-)}(0,t) + \dots = v^3 + Q_0 v^{(+)}(0,t) + \varepsilon Q_1 v^{(+)}(0,t) + \dots = v^2, \tag{18}$$

$$v^1/\gamma + Q_0 u^{(-)}(0,t) + \varepsilon Q_1 u^{(-)}(0,t) + \dots =$$
$$= v^3/\gamma + Q_0 u^{(+)}(0,t) + \varepsilon Q_1 u^{(+)}(0,t) + \dots = v^2/\gamma$$

и приравняем в этих суммах коэффициенты при одинаковых степенях ε.

Также потребуем выполнения стандартного для функций переходного слоя условия убывания на бесконечности:

$$Q_i^{(\mp)}v(\mp\infty,t) = 0, \quad Q_i^{(\mp)}u(\mp\infty,t) = 0, \quad i = 0, 1, \dots$$

2.1.1. Функции переходного слоя нулевого порядка

Объединяя в равенствах (17) коэффициенты при ε^0, получим уравнения

$$-Q_0^{(\mp)}v + \gamma Q_0^{(\mp)}u = 0,$$

решая которые получим выражения

$$Q_0^{(\mp)}u = Q_0^{(\mp)}v/\gamma. \tag{19}$$

Приравнивая в равенствах (16) и (18) коэффициенты при ε^0 и учитывая выражения (19), получим следующие задачи для функций $Q_0^{(\mp)}v(\xi,t)$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 Q_0^{(\mp)}v}{\partial\xi^2} + \frac{dx^*}{dt}\frac{\partial Q_0^{(\mp)}v}{\partial\xi} = g\left(v^{1,3} + Q_0^{(\mp)}v\right) + \left(v^{1,3} + Q_0^{(\mp)}v\right)/\gamma,\\ v^1 + Q_0 v^{(-)}(0,t) = v^3 + Q_0 v^{(+)}(0,t) = v^2, \quad Q_0^{(\mp)}v(\mp\infty,t) = 0.\end{gathered} \tag{20}$$

Введем обозначение

$$\tilde v(\xi,t) = \begin{cases} v^1 + Q_0 v^{(-)}(\xi,t), & \xi \le 0,\ 0 \le t \le T;\\ v^3 + Q_0 v^{(+)}(\xi,t), & \xi \ge 0,\ 0 \le t \le T.\end{cases} \tag{21}$$

Перепишем уравнения и условия при $\xi = 0$ в (20) с использованием обозначения (21):

$$\frac{\partial^2\tilde v}{\partial\xi^2} + W\frac{\partial\tilde v}{\partial\xi} = h(\tilde v); \qquad \tilde v(0,t) = v^2. \tag{22}$$

Здесь W – скорость движения фронта (10), а переменная t играет роль параметра, который входит в выражение для функции $\tilde v$ через переменную $\xi(t)$. Будем решать уравнение (22) отдельно на полупрямой $\xi \le 0$ с условием $\tilde v(-\infty,t) = v^1$, и на полупрямой $\xi \ge 0$ с условием $\tilde v(+\infty,t) = v^3$.

Уравнение (22) совпадает с уравнением (3). Введем следующие функции:

$$\begin{aligned}
&\Phi^{(-)}(\tilde{v}(\xi,t),W)=\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi},\quad \xi\le 0,\ 0\le t\le T;\\
&\Phi^{(+)}(\tilde{v}(\xi,t),W)=\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi},\quad \xi\ge 0,\ 0\le t\le T.
\end{aligned}\tag{23}$$

Тем же способом, что и в пункте 1.2, перейдем от уравнения (22) к дифференциальным уравнениям первого порядка относительно функций $\Phi^{(-)}(\tilde{v}(\xi,t),W)$ при $\xi\le 0$ и $\Phi^{(+)}(\tilde{v}(\xi,t),W)$ при $\xi\ge 0$, в которых переменная t будет играть роль параметра. В каждый момент времени $t\in(0;T]$ уравнения первого порядка для функций $\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}(\xi,t),W)$ совпадают с уравнениями из задач Коши (5) и (6) соответственно. Определим эти функции как решения указанных задач Коши. Существование этих решений гарантировано условием **A3**.

Из существования функций $\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}(\xi,t),W)$ вытекает существование решений начальных задач

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi}=\Phi^{(-)}(\tilde{v}(\xi,t),W),\ \ \xi<0,\quad \tilde{v}(0,t)=v^2,\\
&\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi}\xi=\Phi^{(+)}(\tilde{v}(\xi,t),W),\ \ \xi>0,\quad \tilde{v}(0,t)=v^2,
\end{aligned}$$

для которых справедливы предельные равенства

$$\lim_{\xi\to\mp\infty}\left|\tilde{v}(\xi,t)-v^{1,3}\right|=0.$$

Кроме того, можно доказать справедливость следующих оценок [14]:

$$\left|\tilde{v}(\xi,t)-v^{1,3}\right|<Ce^{-\varkappa_0|\xi|},$$

где C, $\varkappa_0$ – положительные константы.

Для функций $Q_0^{(\mp)}v(\xi,t)$ (см. (21)) и $Q_0^{(\mp)}u(\xi,t)$, (см. (19)) справедливы оценки

$$Q_0^{(\mp)}v(\xi,t)<Ce^{-\varkappa_0|\xi|},\quad Q_0^{(\mp)}u(\xi,t)<Ce^{-\varkappa_0|\xi|},$$

и аналогичные оценки имеют место для функций $\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}(\xi,t),W)$.

Далее для краткости будем использовать обозначение

$$\Phi^{(\mp)}(\xi,t,W):=\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}(\xi,t),W).\tag{24}$$

2.1.2. Функции переходного слоя первого порядка

Из равенств (17) в порядке ε^1 получим уравнения

$$\frac{dx^*}{dt}\frac{\partial Q_0^{(\mp)}u}{\partial\xi}=-Q_1^{(\mp)}v+\gamma Q_1^{(\mp)}u,$$

решая которые получим выражения

$$Q_1^{(\mp)}u=\frac{1}{\gamma}\left(Q_1^{(\mp)}v+W\Phi^{(\mp)}(\xi,t,W)/\gamma\right).\tag{25}$$

Здесь было учтено выражение (19) и обозначения (21) и (23).

Объединяя в равенствах (16) и (18) коэффициенты при ε^1 и учитывая выражения (25), получим следующие задачи для функций $Q_1^{(\mp)}v(\xi,t)$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 Q_1^{(\mp)}v}{\partial\xi^2} + W\frac{\partial Q_1^{(\mp)}v}{\partial\xi} = \left(g_v(\tilde v(\xi,t)) + 1/\gamma\right) Q_1^{(\mp)}v + W\Phi^{(\mp)}(\xi,t,W)/\gamma^2, \\ &Q_1v^{(-)}(0,t) = Q_1v^{(+)}(0,t) = 0, \quad Q_1^{(\mp)}v(\mp\infty,t) = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Заметим, что функции $\Phi^{(\mp)}(\xi,t,W)$ являются решениями однородных уравнений (26). В этом нетрудно убедиться, продифференцировав по ξ уравнение (20):

$$\frac{\partial^2\Phi^{(\mp)}}{\partial\xi^2} + W\frac{\partial\Phi^{(\mp)}}{\partial\xi} - \left(g_v(\tilde v(\xi,t)) + 1/\gamma\right)\Phi^{(\mp)} = 0. \tag{27}$$

Используя известные решения однородных уравнений, можно понизить порядок уравнения (26) и получить решения задач (26) в явном виде:

$$Q_1^{(\mp)}v(\xi,t) = \frac{W}{\gamma^2}\Phi^{(\mp)}(\xi,t,W)\int\limits_0^{\xi}\frac{\mathrm{e}^{-Ws}ds}{(\Phi^{(\mp)}(s,t,W))^2}\int\limits_{\mp\infty}^{s}\mathrm{e}^{W\eta}\left(\Phi^{(\mp)}(\eta,t,W)\right)^2 d\eta.$$

2.1.3. Функции переходного слоя старших порядков

Из равенств (17) в порядке ε^i, $\;i = 2,3$, можно получить выражения для функций $Q_i^{(\mp)}u$, через функции $Q_i^{(\mp)}v$, соответственно, подставить их в уравнения, которые получаются из (16) в порядке ε^i, добавить краевые условия, полученные из (18) в порядке ε^i, а также условия на бесконечности, и получить следующие задачи для функций $Q_i^{(\mp)}v(\xi,t)$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 Q_i^{(\mp)}v}{\partial\xi^2} + W\frac{\partial Q_i^{(\mp)}v}{\partial\xi} = \left(g_v(\tilde v(\xi,t)) + 1/\gamma\right) Q_i^{(\mp)}v + Q_ig(\xi,t), \\ &Q_iv^{(-)}(0,t) = Q_iv^{(+)}(0,t) = 0, \quad Q_i^{(\mp)}v(\mp\infty,t) = 0, \end{aligned}$$

где $Q_ig(\xi,t)$ – известные функции.

Решения этих задач можно выписать в явном виде, так же как это было сделано для функций $Q_1v^{(\mp)}(\xi,t)$.

2.2. Асимптотическое приближение положения фронта

Неизвестные коэффициенты $x_i(t)$, $\quad i = 0,1,2,3$, разложения (9) будем определять из условий гладкого сшивания (15).

С учетом равенств (11) и разложений (12) и (13) перепишем условия сшивания производных (15) в следующем виде:

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial Q_0^{(-)}v}{\partial\xi}(0,t)+\frac{\partial Q_1^{(-)}v}{\partial\xi}(0,t)+\dots=\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial Q_0^{(+)}v}{\partial\xi}(0,t)+\frac{\partial Q_1^{(+)}v}{\partial\xi}(0,t)+\dots;$$
$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial Q_0^{(-)}u}{\partial\xi}(0,t)+\frac{\partial Q_1^{(-)}u}{\partial\xi}(0,t)+\dots=\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial Q_0^{(+)}u}{\partial\xi}(0,t)+\frac{\partial Q_1^{(+)}u}{\partial\xi}(0,t)+\dots$$

Заметим, что из выполнения первого из этих равенств следует выполнение второго равенства в силу выражений (19), (25) и аналогичных выражений для функций $Q_iu^{(\mp)}(\xi,t)$ через функции $Q_iv^{(\mp)}(\xi,t)$ при $i=2,3$.

Введем функцию $H(W,\varepsilon)$:

$$H(W,\varepsilon):=H_0(v^2,W)+\varepsilon H_1(W)+\dots, \tag{28}$$

где функция $H_0(\tilde{v},W)$ определена выражением (7), а

$$H_1(W)=\frac{\partial Q_1^{(-)}v}{\partial\xi}(0,t)-\frac{\partial Q_1^{(+)}v}{\partial\xi}(0,t),$$

и т. д.

Условие (15) гладкого сшивания выражается равенством

$$H(W,\varepsilon)=0. \tag{29}$$

В порядке ε^0 с учетом обозначений (24), условий (18) и разложения (10) это условие дает равенство

$$H_0(v^2,W_0)=\Phi^{(-)}(0,t,W_0)-\Phi^{(+)}(0,t,W_0)=0. \tag{30}$$

Согласно условию **A4** существует величина W_0 – решение этого уравнения. Будем считать, что коэффициент $x_0(t)$ разложения (9) определяется из задачи Коши

$$\frac{dx_0}{dt}=W_0,\quad x_0(0)=x_{00},$$

где x_{00} – начальное положение фронта. Решение этой задачи: $x_0(t)=W_0t+x_{00}$.

Запишем условия сшивания (29) в порядке ε^1 с учетом разложений (28) и (10):

$$\frac{\partial H_0}{\partial W}(v^2,W_0)W_1+H_1(W_0)=0.$$

Решение этого уравнения существует в силу неравенства (8).

Будем считать, что коэффициент $x_1(t)$ разложения (9) определяется из задачи Коши $\dfrac{dx_1}{dt}=W_1,\quad x_1(0)=0$. Решение этой задачи: $x_1(t)=W_1t$.

Аналогично получим выражения для коэффициентов $x_i(t),\quad i=2,3: x_i(t)=W_it$, где величины W_i определяются из равенств вида

$$\frac{\partial H_0}{\partial W}(v^2,W_0)W_i+G_i=0,$$

а G_i – известные функции.

2.3. Асимптотическое приближение решения третьего порядка

Введем обозначение

$$X_3(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{3} \varepsilon^i x_i(t).$$

Составим суммы

$$V_3^{(-)}(\xi,t,\varepsilon) = v^1 + \sum_{i=0}^{3} \varepsilon^i Q_i^{(-)} v(\xi,t), \;\; U_3^{(-)}(\xi,t,\varepsilon) = v^1/\gamma + \sum_{i=0}^{3} \varepsilon^i Q_i^{(-)} u(\xi,t),$$
$$\xi \le 0, \;\; 0 \le t \le T;$$
$$V_3^{(+)}(\xi,t,\varepsilon) = v^3 + \sum_{i=0}^{3} \varepsilon^i Q_i^{(+)} v(\xi,t), \;\; U_3^{(+)}(\xi,t,\varepsilon) = v^3/\gamma + \sum_{i=0}^{3} \varepsilon^i Q_i^{(+)} u(\xi,t),$$
$$\xi \ge 0, \;\; 0 \le t \le T.$$

Положим

$$V_3(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} V_3^{(-)}(\xi,t,\varepsilon), & 0 \le x \le X_3(t,\varepsilon),\ \xi \le 0,\ 0 \le t \le T, \\ V_3^{(+)}(\xi,t,\varepsilon), & X_3(t,\varepsilon) \le x \le 0,\ \xi \ge 0,\ 0 \le t \le T; \end{cases}$$
$$U_3(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} U_3^{(-)}(\xi,t,\varepsilon), & 0 \le x \le X_3(t,\varepsilon),\ \xi \le 0,\ 0 \le t \le T, \\ U_3^{(+)}(\xi,t,\varepsilon), & X_3(t,\varepsilon) \le x \le 0,\ \xi \ge 0,\ 0 \le t \le T. \end{cases} \qquad (31)$$

Построенное асимптотическое приближение решения $(V_3(x,t,\varepsilon), U_3(x,t,\varepsilon))$ по своему построению удовлетворяет уравнению и граничным условиям задачи (1) с точностью $O(\varepsilon^4)$ всюду в области $\bar{D}$, за исключением кривой $x^*(t,\varepsilon)$, на которой функции V_3 и U_3 претерпевают разрывы – скачки порядка $O\left(\varepsilon^4\right)$.

3. Обоснование асимптотического представления решения

Доказательство существования решения, которое приближается парой функций $(V_3(x,t,\varepsilon), U_3(x,t,\varepsilon))$, проведем, используя асимптотический метод дифференциальных неравенств. Суть метода заключается в построении для задачи (1) двух пар непрерывных функций $\overline{V}$, $\overline{U}$ и $\underline{V}$, $\underline{U}$, называемых соответственно верхним и нижним решениями и удовлетворяющих следующей системе дифференциальных неравенств:

Условие У1. Упорядоченность.

$$\underline{V} \le \overline{V}; \;\; \underline{U} \le \overline{U}; \;\; (x,t) \in [0;1] \times (0;T].$$

Условие У2. Действие оператора на верхнее и нижнее решения.

$$L_{v\varepsilon}(\overline{V},u) := \varepsilon^2 \overline{V}_{xx} - \varepsilon \overline{V}_t - g\left(\overline{V},x,\varepsilon\right) - u < 0 < L_{v\varepsilon}(\underline{V},u), \;\; \underline{U} \le u \le \overline{U},$$
$$L_{u\varepsilon}(\overline{U},v) := \varepsilon^4 \overline{U}_{xx} - \varepsilon^3 \overline{U}_t + v - \gamma \overline{U} < 0 < L_{u\varepsilon}(\underline{U},v), \;\; \underline{V} \le v \le \overline{V}$$

для почти всех точек области $(x,t) \in [0;1] \times (0;T]$, за исключением множеств нулевой меры, на которых верхнее и нижнее решения не являются гладкими.

Условие У3. Если верхнее решение не является гладким в некоторой точке $x = \bar{x}(t)$, в момент времени t, то выполняются следующие неравенства:

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial x}(\bar{x}(t)-0,t,\varepsilon) - \frac{\partial \overline{V}}{\partial x}(\bar{x}(t)+0,t,\varepsilon) \geq 0, \quad \frac{\partial \overline{U}}{\partial x}(\bar{x}(t)-0,t,\varepsilon) - \frac{\partial \overline{U}}{\partial x}(\bar{x}(t)+0,t,\varepsilon) \geq 0;$$

аналогично, если нижнее решение не является гладким при $x = \underline{x}(t)$, то выполняются неравенства

$$\frac{\partial \underline{V}}{\partial x}(\underline{x}(t)-0,t,\varepsilon) - \frac{\partial \underline{V}}{\partial x}(\underline{x}(t)+0,t,\varepsilon) \leq 0, \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial x}(\underline{x}(t)-0,t,\varepsilon) - \frac{\partial \underline{U}}{\partial x}(\underline{x}(t)+0,t,\varepsilon) \leq 0.$$

Условие У4. В граничных точках выполняются неравенства

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \overline{V}}{\partial x}(0,t,\varepsilon) \leq 0 \leq \frac{\partial \underline{V}}{\partial x}(0,t,\varepsilon), \quad \frac{\partial \overline{U}}{\partial x}(0,t,\varepsilon) \leq 0 \leq \frac{\partial \underline{U}}{\partial x}(0,t,\varepsilon), \\
\frac{\partial \underline{V}}{\partial x}(1,t,\varepsilon) \leq 0 \leq \frac{\partial \overline{V}}{\partial x}(1,t,\varepsilon), \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial x}(1,t,\varepsilon) \leq 0 \leq \frac{\partial \overline{U}}{\partial x}(1,t,\varepsilon).
\end{gathered}$$

Как показано в работе [6] классическое решение $(v(x,t,\varepsilon), u(x,t,\varepsilon))$ задачи (1) существует, и для всех $(x,t) \in [0;1] \times (0;T]$ выполняются неравенства

$$\underline{V}(x,t,\varepsilon) < v(x,t,\varepsilon) < \overline{V}(x,t,\varepsilon), \quad \underline{U}(x,t,\varepsilon) < u(x,t,\varepsilon) < \overline{U}(x,t,\varepsilon),$$

если существуют верхнее и нижнее решения задачи (1) и в начальный момент времени начальная функция заключена между этими верхним и нижним решениями:

$$\underline{V}(x,0,\varepsilon) < v_{init}(x,\varepsilon) < \overline{V}(x,0,\varepsilon), \;\; \underline{U}(x,0,\varepsilon) < u_{init}(x,\varepsilon) < \overline{U}(x,0,\varepsilon), \;\; x \in [0;1].$$

3.1. Верхнее и нижнее решения

Введем обозначения

$$\begin{gathered}
\bar{x}(t) = X_3(t,\varepsilon) - \varepsilon^3\delta(t), \;\; \bar{\xi} = \frac{x-\bar{x}(t)}{\varepsilon}, \;\; \overline{W} = \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{dX_3}{dt} - \varepsilon^3\frac{d\delta}{dt}; \\
\underline{x}(t) = X_3(t,\varepsilon) + \varepsilon^3\delta(t), \;\; \underline{\xi} = \frac{x-\underline{x}(t)}{\varepsilon}, \;\; \underline{W} = \frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{dX_3}{dt} + \varepsilon^3\frac{d\delta}{dt}.
\end{gathered}$$

Кривая $\bar{x}(t)$ делит область $\bar{D}$ на подобласти $\bar{D}^{(-)}_{up} := \{(x,t) \in [0;\bar{x}(t,\varepsilon)] \times [0;T]\}$ и $\bar{D}^{(+)}_{up} := \{(x,t) \in [\bar{x}(t,\varepsilon);1] \times [0;T]\}$, а кривая $\underline{x}(t)$ – на подобласти $\bar{D}^{(-)}_{low} := \{(x,t) \in [0;\underline{x}(t,\varepsilon)] \times [0;T]\}$ и $\bar{D}^{(+)}_{low} := \{(x,t) \in [\underline{x}(t,\varepsilon);1] \times [0;T]\}$.

В области $\bar{D}^{(-)}_{up}$ будем строить функции $\overline{V}^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $\overline{U}^{(-)}(x,\varepsilon)$, в области $\bar{D}^{(+)}_{up}$ – функции $\overline{V}^{(+)}(x,\varepsilon)$ и $\overline{U}^{(+)}(x,\varepsilon)$; а нижнее решение – функции $\underline{V}^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ и $\underline{U}^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ будем строить соответственно в областях $\bar{D}^{(\mp)}_{low}$.

Функция $\delta(t)$ выбирается таким образом, чтобы выполнялись условия **У1** и **У3** для верхнего и нижнего решений. Верхнее и нижнее решения строятся путем модификации асимптотических представлений решения $(V_3,\ U_3)$ в порядке ε^2 :

$$\begin{aligned}
\overline{V}^{(\mp)} &= V_3^{(\mp)}(\bar{\xi},t,\varepsilon)+\varepsilon^2\bar{q}_2^{(\mp)}v(\bar{\xi},t)+\varepsilon^3\left(\beta^{(\mp)}+\bar{q}_3^{(\mp)}v(\bar{\xi},t)+R\mathrm{e}^{-\varkappa\rho^{(\mp)}}\right),\\
\overline{U}^{(\mp)} &= U_3^{(\mp)}(\bar{\xi},t,\varepsilon)+\varepsilon^2\bar{q}_2^{(\mp)}u(\bar{\xi},t)+\varepsilon^3\left(\alpha^{(\mp)}+\bar{q}_3^{(\mp)}u(\bar{\xi},t)+R\mathrm{e}^{-\varkappa\rho^{(\mp)}}\right),\\
\underline{V}^{(\mp)} &= V_3^{(\mp)}(\underline{\xi},t,\varepsilon)+\varepsilon^2\underline{q}_2^{(\mp)}v(\underline{\xi},t)+\varepsilon^3\left(-\beta^{(\mp)}+\underline{q}_3^{(\mp)}v(\underline{\xi},t)-R\mathrm{e}^{-\varkappa\rho^{(\mp)}}\right),\\
\underline{U}^{(\mp)} &= U_3^{(\mp)}(\underline{\xi},t,\varepsilon)+\varepsilon^2\underline{q}_2^{(\mp)}u(\underline{\xi},t)+\varepsilon^3\left(-\alpha^{(\mp)}+\underline{q}_3^{(\mp)}u(\underline{\xi},t)-R\mathrm{e}^{-\varkappa\rho^{(\mp)}}\right).
\end{aligned} \tag{32}$$

Здесь через $U_3^{(\mp)}(\bar{\xi},t,\varepsilon), V_3^{(\mp)}(\bar{\xi},t,\varepsilon)$ обозначены суммы (31), в которых аргумент ξ заменен на $\bar{\xi}$, а через $U_3^{(\mp)}(\underline{\xi},t,\varepsilon), V_3^{(\mp)}(\underline{\xi},t,\varepsilon)$ – суммы (31), в которых аргумент ξ заменен на $\underline{\xi}$; коэффициенты R и $\varkappa$ – положительные постоянные, $\rho^{(-)}=\dfrac{x}{\varepsilon}$, $\rho^{(+)}=\dfrac{1-x}{\varepsilon}$.

Величины $\alpha^{(\mp)}$ и $\beta^{(\mp)}$ представляют собой модификацию регулярной части. Они определяются как решения системы уравнений

$$\gamma\alpha^{(\mp)}-\beta^{(\mp)}=A;\quad -\alpha^{(\mp)}+g_v(v^{1,3})\beta^{(\mp)}=B, \tag{33}$$

где A и B – положительные константы, которые выберем достаточно большими, чтобы выполнялось условие **У2**. Решая систему, получим

$$\alpha^{(\mp)}=\frac{Ag_v(v^{1,3})+B}{\gamma g_v(v^{1,3})-1},\quad \beta^{(\mp)}=\frac{A+\gamma B}{\gamma g_v(v^{1,3})-1}.$$

В силу условия **A2** величины $\alpha^{(\mp)}$ и $\beta^{(\mp)}$ положительны.

Функции $\bar{q}_2^{(\mp)}u(\bar{\xi},t)$, $\bar{q}_2^{(\mp)}v(\bar{\xi},t)$, $\underline{q}_2^{(\mp)}u(\underline{\xi},t)$, $\underline{q}_2^{(\mp)}v(\underline{\xi},t)$ являются решением следующей системы уравнений:

$$-\bar{q}_2^{(\mp)}v(\bar{\xi},t)+\gamma\bar{q}_2^{(\mp)}u(\bar{\xi},t)=0, \tag{34}$$

$$-\underline{q}_2^{(\mp)}v(\underline{\xi},t)+\gamma\underline{q}_2^{(\mp)}u(\underline{\xi},t)=0, \tag{35}$$

$$\frac{\partial^2\bar{q}_2^{(\mp)}v}{\partial\bar{\xi}^2}+\overline{W}\frac{\partial\bar{q}_2^{(\mp)}v}{\partial\bar{\xi}}-g_v(\tilde{v}(\bar{\xi},t))\bar{q}_2^{(\mp)}v-\underline{q}_2^{(\mp)}u(\underline{\xi},t)+2\frac{\delta(t)}{\gamma}\Phi^{(\mp)}(\bar{\xi},t,\overline{W})=0, \tag{36}$$

$$\frac{\partial^2\underline{q}_2^{(\mp)}v}{\partial\underline{\xi}^2}+\underline{W}\frac{\partial\underline{q}_2^{(\mp)}v}{\partial\underline{\xi}}-g_v(\tilde{v}(\underline{\xi},t))\underline{q}_2^{(\mp)}v-\bar{q}_2^{(\mp)}u(\bar{\xi},t)-2\frac{\delta(t)}{\gamma}\Phi^{(\mp)}(\underline{\xi},t,\overline{W})=0. \tag{37}$$

Заметим, что $\underline{\xi}=\bar{\xi}+O(\varepsilon^2)$.

Сложим уравнения (34) и (35) отдельно для функций с верхним индексом «−» и с верхним индексом «+» и также сложим уравнения (36) и (37). Тогда получим:

$$\begin{gathered}
-\left(\bar{q}_2^{(\mp)}v(\bar{\xi},t)+\underline{q}_2^{(\mp)}v(\bar{\xi},t)\right)+\gamma\left(\bar{q}_2^{(\mp)}u(\bar{\xi},t)+\underline{q}_2^{(\mp)}u(\bar{\xi},t)\right)+O\left(\varepsilon^2\right)=0,\\
\frac{\partial^2}{\partial\bar{\xi}^2}\left(\bar{q}_2^{(\mp)}v+\underline{q}_2^{(\mp)}v\right)+\frac{dX_3}{dt}\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}}\left(\bar{q}_2^{(\mp)}v+\underline{q}_2^{(\mp)}v\right)-\\
-g_v(\tilde{v}(\bar{\xi},t))\left(\bar{q}_2^{(\mp)}v(\bar{\xi},t)+\underline{q}_2^{(\mp)}v(\bar{\xi},t)\right)-\left(\underline{q}_2^{(\mp)}u(\bar{\xi},t)+\bar{q}_2^{(\mp)}u(\bar{\xi},t)\right)+O\left(\varepsilon^2\right)=0.
\end{gathered} \tag{38}$$

Положим

$$\underline{q}_2^{(\mp)}v(\underline{\xi},t) = -\bar{q}_2^{(\mp)}v(\bar{\xi},t) + O\left(\varepsilon^2\right), \quad \underline{q}_2^{(\mp)}u(\underline{\xi},t) = -\bar{q}_2^{(\mp)}u(\bar{\xi},t) + O\left(\varepsilon^2\right), \tag{39}$$

тогда каждое из равенств (38) окажется выполненным с точностью $O\left(\varepsilon^2\right)$.

Используя равенства (39) и уравнения (34), перепишем уравнение (36) следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \bar{q}_2^{(\mp)}v}{d\bar{\xi}^2} + \overline{W}\frac{\partial \bar{q}_2^{(\mp)}v}{d\bar{\xi}} - g_v(\tilde{v}(\bar{\xi},t))\bar{q}_2^{(\mp)}v + \frac{1}{\gamma}\bar{q}_2^{(\mp)}v + 2\frac{\delta(t)}{\gamma}\Phi^{(\mp)}(\bar{\xi},t,\overline{W}) + O\left(\varepsilon^2\right) = 0.$$

Сравнивая последние уравнения с (27), убеждаемся, что их решениями являются функции $-\delta(t)\Phi^{(\mp)}(\bar{\xi},t,\overline{W})$.

Положим

$$\bar{q}_2^{(\mp)}v(\bar{\xi}) = -\delta(t)\Phi^{(\mp)}(\bar{\xi},t,\overline{W}), \quad \underline{q}_2^{(\mp)}v(\underline{\xi}) = \delta(t)\Phi^{(\mp)}(\underline{\xi},t,\underline{W}), \tag{40}$$

$$\bar{q}_2^{(\mp)}u(\bar{\xi}) = -\delta(t)\gamma^{-1}\Phi^{(\mp)}(\bar{\xi},t,\overline{W}), \quad \underline{q}_2^{(\mp)}u(\underline{\xi}) = \delta(t)\gamma^{-1}\Phi^{(\mp)}(\underline{\xi},t,\underline{W}). \tag{41}$$

Функции $\bar{q}_3^{(\mp)}u(\bar{\xi},t)$, $\bar{q}_3^{(\mp)}v(\bar{\bar{\xi}},t)$, $\underline{q}_3^{(\mp)}u(\underline{\xi},t)$, $\underline{q}_3^{(\mp)}v(\underline{\xi},t)$ являются решением следующей системы уравнений:

$$-\bar{q}_3^{(\mp)}v(\bar{\xi},t) + \gamma\bar{q}_3^{(\mp)}u(\bar{\xi},t) = 0, \tag{42}$$

$$-\underline{q}_3^{(\mp)}v(\underline{\xi},t) + \gamma\underline{q}_3^{(\mp)}u(\underline{\xi},t) = 0, \tag{43}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \bar{q}_3^{(\mp)}v}{\partial\bar{\xi}^2} + \overline{W}\frac{\partial \bar{q}_3^{(\mp)}v}{\partial\bar{\xi}} - g_v(\tilde{v}(\bar{\xi},t))\bar{q}_3^{(\mp)}v - \underline{q}_3^{(\mp)}u(\underline{\xi},t) - (g_v(\tilde{v}(\bar{\xi},t)) - g_v(v^{1,3}))\beta^{(\mp)} + \\ +2\delta(t)\frac{\partial Q_1^{(\mp)}u}{\partial\bar{\xi}}(\bar{\xi},t) - g_{vv}(\tilde{v}(\bar{\xi},t))\cdot Q_1^{(\mp)}v(\bar{\xi},t)\cdot\bar{q}_2^{(\mp)}v(\bar{\xi},t) + de^{-\lambda|\bar{\xi}|} = 0,\end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \underline{q}_3^{(\mp)}v}{\partial\underline{\xi}^2} + \underline{W}\frac{\partial \underline{q}_3^{(\mp)}v}{\partial\underline{\xi}} - g_v(\tilde{v}(\underline{\xi},t))\underline{q}_3^{(\mp)}v - \bar{q}_3^{(\mp)}u(\bar{\xi},t) + (g_v(\tilde{v}(\underline{\xi},t)) - g_v(v^{1,3}))\beta^{(\mp)} - \\ -2\delta(t)\frac{\partial Q_1^{(\mp)}u}{\partial\underline{\xi}}(\underline{\xi},t) - g_{vv}(\tilde{v}(\underline{\xi},t))\cdot Q_1^{(\mp)}v(\underline{\xi},t)\cdot\underline{q}_2^{(\mp)}v(\underline{\xi},t) - de^{-\lambda|\underline{\xi}|} = 0.\end{aligned} \tag{45}$$

Здесь d и λ – положительные величины, которые выбираются таким образом, чтобы было выполнено условие **У1** упорядоченности верхнего и нижнего решений.

Сложим уравнения (42) и (43) отдельно для функций с верхним индексом «$-$» и функций с верхним индексом «$+$», а также уравнения (44) и (45), учтем равенство (39) и получим для сумм $\left(\bar{q}_3^{(\mp)}u(\bar{\xi},t) + \underline{q}_3^{(\mp)}u(\bar{\xi},t)\right)$, $\left(\bar{q}_3^{(\mp)}v(\bar{\xi},t) + \underline{q}_3^{(\mp)}v(\bar{\xi},t)\right)$ такую же систему уравнений, что и (38).

Положим

$$\underline{q}_3^{(\mp)}v(\underline{\xi},t) = -\bar{q}_3^{(\mp)}v(\bar{\xi},t) + O\left(\varepsilon^2\right), \quad \underline{q}_3^{(\mp)}u(\underline{\xi},t) = -\bar{q}_3^{(\mp)}u(\bar{\xi},t) + O\left(\varepsilon^2\right). \tag{46}$$

Используя эти равенства, перепишем уравнение (44) следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \bar{q}_3^{(\mp)}v}{\partial\bar{\xi}^2} + \overline{W}\frac{\partial \bar{q}_3^{(\mp)}v}{\partial\bar{\xi}} - \left(g_v(\tilde{v}(\bar{\xi})) - \gamma^{-1}\right)\bar{q}_3^{(\mp)}v = \\ = -2\delta(t)\frac{\partial Q_1^{(\mp)}u}{\partial\bar{\xi}}(\bar{\xi},t) + q_3F^{(\mp)}(\bar{\xi},t) - de^{-\lambda|\bar{\xi}|} + O\left(\varepsilon^2\right),\end{aligned}$$

где

$$q_3 F^{(\mp)}(\bar{\xi},t) = (g_v(\tilde{v}(\bar{\xi},t)) - g_v(v^{1,3}))\beta^{(\mp)} + g_{vv}(\tilde{v}(\bar{\xi},t)) \cdot Q_1^{(\mp)} v(\bar{\xi},t) \cdot \bar{q}_2^{(\mp)} v(\bar{\xi},t).$$

Будем решать уравнение для $\bar{q}_3^{(\mp)} v(\bar{\xi},t)$ с условиями

$$\bar{q}_3^{(\mp)} v(0,t) + \beta^{(\mp)} = p, \quad \bar{q}_3^{(\mp)} v(\mp\infty,t) = 0.$$

Константу p выберем таким образом, чтобы выполнялось условие **У1** упорядоченности верхнего и нижнего решений.

В силу выполнения условия **А2** для каждого вещественного значения W существует пара функций $\Psi^{(-)}(\bar{\xi},t)$ и $\Psi^{(+)}(\bar{\xi},t)$ – решения однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 \Psi^{(\mp)}}{\partial \bar{\xi}^2} + W \frac{\partial \Psi^{(\mp)}}{\partial \bar{\xi}} - \left(g_v(\tilde{v}(\bar{\xi},t)) - \gamma^{-1}\right) \Psi^{(\mp)} = 0,$$

для которых справедливы следующие оценки [16, 17]:

$$\left|\Psi^{(\mp)}(\bar{\xi},t)\right| \le C e^{-\kappa|\bar{\xi}|},$$

где C и κ – некоторые положительные величины.

Зная решения однородного уравнения, можно, используя стандартные методы понижения порядка, получить функции $\bar{q}_3^{(\mp)} v(\bar{\xi},t)$ в явном виде:

$$\bar{q}_3^{(\mp)} v(\bar{\xi},t) = (p - \beta^{(\mp)}) \frac{\Psi^{(\mp)}(\bar{\xi},t)}{\Psi^{(\mp)}(0,t)} + \Psi^{(\mp)}(\bar{\xi},t) \times$$
$$\times \int\limits_0^{\bar{\xi}} \frac{e^{-\overline{W}s} ds}{(\Psi^{(\mp)}(s,t))^2} \int\limits_{\mp\infty}^{s} e^{\overline{W}\eta} \Psi^{(\mp)}(\eta,t) \left(-2\delta(t) \frac{\partial Q_1^{(\mp)} u}{\partial \eta}(\eta,t) + q_3 F^{(\mp)}(\eta,t) - d e^{-\lambda|\eta|}\right) d\eta. \tag{47}$$

Заметим, что выбирая достаточно большие числа p и d и достаточно малое число λ, можно добиться того, чтобы функции $\bar{q}_3^{(\mp)} v(\bar{\xi},t)$ принимали строго положительные значения при $\bar{\xi} \le 0$ или $\bar{\xi} \ge 0$ соответственно.

3.2. Проверка дифференциальных неравенств

Покажем, что для построенных пар функций $\overline{V}, \overline{U}$ и $\underline{U}, \underline{V}$ выполняются условия **У1**–**У5**.

Проверка условия **У1** упорядоченности верхнего и нижнего решений.

В каждый момент времени рассмотрим три области, где разность верхнего и нижнего решений выражается различным образом:

$$\overline{V} - \underline{V} = \begin{cases} \overline{V}^{(-)} - \underline{V}^{(-)}, & 0 \le x < \bar{x}(t),\ t \in [0,T], \\ \overline{V}^{(+)} - \underline{V}^{(-)}, & \bar{x}(t) \le x \le \underline{x}(t),\ t \in [0,T], \\ \overline{V}^{(+)} - \underline{V}^{(+)}, & \underline{x}(t) < x \le 1,\ t \in [0,T]. \end{cases}$$

Сначала рассмотрим отрезок $\bar{x}(t) \le x \le \underline{x}(t)$. В этом случае

$$0 \le \bar{\xi} \le 2\varepsilon^2\delta(t); \quad -2\varepsilon^2\delta(t) \le \underline{\xi} \le 0,$$

а для разности верхнего и нижнего решений можно записать выражение:

$$\begin{aligned}\overline{V}^{(+)} - \underline{V}^{(-)} = v^3 + \sum_{i=0}^{3} \varepsilon^i Q_i^{(+)} v(\bar{\xi}, t) + \varepsilon^2 \bar{q}_2^{(+)} v(\bar{\xi}, t) + \varepsilon^3 \left(\bar{q}_3^{(+)} v(\bar{\xi}, t) + \beta^{(+)} \right) - \\ - v^1 - \sum_{i=0}^{3} \varepsilon^i Q_i^{(-)} v(\underline{\xi}, t) - \varepsilon^2 \underline{q}_2^{(-)} v(\underline{\xi}, t) - \varepsilon^3 \left(\underline{q}_3^{(-)} v(\underline{\xi}, t) - \beta^{(-)} \right).\end{aligned} \tag{48}$$

На рассматриваемом отрезке преобразуем часть слагаемых из (48) следующим образом:

$$\begin{aligned}&v^3 + Q_0^{(+)} v(\bar{\xi}, t) + \varepsilon^2 \bar{q}_2^{(+)} v(\bar{\xi}, t) - v^1 - Q_0^{(-)} v(\underline{\xi}, t) - \varepsilon^2 \underline{q}_2^{(-)} v(\underline{\xi}, t) = \\ &= v^3 + Q_0^{(+)} v(0, t) + \Phi^{(+)}(0, t, W_0)\bar{\xi} - \varepsilon^2\delta(t)\Phi^{(+)}(0, t, W_0) - v^1 - Q_0^{(-)} v(0, t) - \\ &- \Phi^{(-)}(0, t, W_0)\underline{\xi} - \varepsilon^2\delta(t)\Phi^{(-)}(0, t, W_0) - \varepsilon W_1 \frac{\partial H_0}{\partial W}(v^2, W_0)(\bar{\xi} - \varepsilon^2\delta) + O\left(\varepsilon^4\right) = \\ &= \Phi(0, t, W_0)\left(\bar{\xi} - \underline{\xi}\right) - 2\varepsilon^2\delta(t)\Phi(0, t, W_0) - \varepsilon W_1 \frac{\partial H_0}{\partial W}(v^2, W_0)(\bar{\xi} - \varepsilon^2\delta) + O\left(\varepsilon^4\right) = \\ &= -\varepsilon W_1 \frac{\partial H_0}{\partial W}(v^2, W_0)(\bar{\xi} - \varepsilon^2\delta) + O\left(\varepsilon^4\right).\end{aligned}$$

Здесь были использованы выражения (40) для функций $\bar{q}_2^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t)$, $\underline{q}_2^{(\mp)} v(\underline{\xi}, t)$ условия при $\xi = 0$ задачи (20), равенство

$$\bar{\xi} - \underline{\xi} = 2\varepsilon^2\delta(t), \tag{49}$$

равенство (30), выражение (7) и обозначено $\Phi(0, t, W_0) := \Phi^{(-)}(0, t, W_0) = \Phi^{(+)}(0, t, W_0)$. Учитывая условия при $\xi = 0$ задач (26), а также то, что на рассматриваемом отрезке $\bar{\xi} = O\left(\varepsilon^2\right)$ и $\underline{\xi} = O\left(\varepsilon^2\right)$, получаем оценку

$$\varepsilon\left(Q_1^{(+)} v(\bar{\xi}, t) - Q_1^{(-)} v(\underline{\xi}, t) \right) = \varepsilon \left(\frac{\partial Q_1^{(+)} v}{\partial \bar{\xi}}(0, t)\bar{\xi} - \frac{\partial Q_1^{(-)} v}{\partial \underline{\xi}}(0, t)\underline{\xi} \right) + O\left(\varepsilon^4\right),$$

аналогично

$$\sum_{i=2}^{3} \varepsilon^i \left(Q_i^{(+)} v(\bar{\xi}, t) - Q_i^{(-)} v(\underline{\xi}, t) \right) = O\left(\varepsilon^4\right).$$

Подставляя полученные оценки в выражение (48) для разности верхнего и нижнего решений в рассматриваемой области и учитывая равенство (46), получим равенство

$$\begin{aligned}&\overline{V}^{(+)} - \underline{V}^{(-)} = -\varepsilon W_1 \frac{\partial H_0}{\partial W}(v^2, W_0)(\bar{\xi} - \varepsilon^2\delta) + \\ &+ \varepsilon \left(\frac{\partial Q_1^{(+)} v}{\partial \bar{\xi}}(0, t)\bar{\xi} - \frac{\partial Q_1^{(-)} v}{\partial \underline{\xi}}(0, t)\underline{\xi} \right) + \varepsilon^3 \left(\bar{q}_3^{(+)} v(\bar{\xi}, t) + \bar{q}_3^{(-)} v(\bar{\xi}, t) + \beta^{(+)} + \beta^{(-)} \right) + O\left(\varepsilon^4\right).\end{aligned}$$

Выберем величины p и d в выражении (47) достаточно большими, а λ – достаточно малой, чтобы правая часть последнего выражения была положительна. Это возможно, поскольку на рассматриваемом отрезке $\bar{\xi} = O(\varepsilon^2)$ и $\underline{\xi} = O(\varepsilon^2)$. Тогда условие $\overline{V} - \underline{V} > 0$ окажется выполненным при $\bar{x}(t) \le x \le \underline{x}(t)$, $t \in [0, T]$.

Рассмотрим теперь множество $\underline{x}(t) \le x \le 1$, $t \in [0, T]$. На этом множестве для разности верхнего и нижнего решений можно записать выражение

$$\overline{V}^{(+)} - \underline{V}^{(+)} = v^3 + \sum_{i=0}^{3} \varepsilon^i Q_i^{(+)} v(\bar{\xi}, t) + \varepsilon^2 \bar{q}_2^{(+)} v(\bar{\xi}, t) + \varepsilon^3 \left(\bar{q}_3^{(+)} v(\bar{\xi}, t) + \beta^{(+)} + Re^{-\varkappa\rho^{(+)}} \right) -$$
$$- v^3 - \sum_{i=0}^{3} \varepsilon^i Q_i^{(+)} v(\underline{\xi}, t) - \varepsilon^2 \underline{q}_2^{(+)} v(\underline{\xi}, t) - \varepsilon^3 \left(\underline{q}_3^{(+)} v(\underline{\xi}, t) - \beta^{(+)} - Re^{-\varkappa\rho^{(+)}} \right). \tag{50}$$

Преобразуем часть слагаемых последнего равенства следующим образом:

$$Q_0^{(+)} v(\bar{\xi}, t) + \varepsilon^2 \bar{q}_2^{(+)} v(\bar{\xi}, t) - Q_0^{(+)} v(\underline{\xi}, t) - \varepsilon^2 \underline{q}_2^{(+)} v(\underline{\xi}, t) =$$
$$= \Phi^{(+)} \left(\bar{\xi}, t, \frac{dX_3}{dt} \right) (\bar{\xi} - \underline{\xi}) - 2\varepsilon^2 \delta(t) \Phi^{(+)} \left(\bar{\xi}, t, \frac{dX_3}{dt} \right) + O\left(\varepsilon^4\right) = O\left(\varepsilon^4\right).$$

Здесь были использованы выражения (40) и равенство (49).

Подставляя полученные оценки в выражение (50) для разности верхнего и нижнего решений в рассматриваемой области и учитывая равенство (46), придем к равенству

$$\overline{V}^{(+)} - \underline{V}^{(+)} = \varepsilon \frac{\partial Q_1^{(+)} v}{\partial \bar{\xi}} (\bar{\xi}, t)(\bar{\xi} - \underline{\xi}) + \varepsilon^3 \left(2\bar{q}_3^{(+)} v(\bar{\xi}, t) + 2\beta^{(+)} \right) + O\left(\varepsilon^4\right).$$

Выберем величины p и d в выражении (47) достаточно большими, а λ – достаточно малой, чтобы правая часть последнего выражения была положительна. Тогда условие $\overline{V} - \underline{V} > 0$ окажется выполненным при $\underline{x}(t) \le x \le 1$, $t \in [0, T]$.

Доказательство справедливости неравенства $\overline{V} - \underline{V} > 0$ при $0 \le x \le \bar{x}(t)$ $t \in [0, T]$ проводится так же, как и при $\underline{x}(t) \le x \le 1$, $t \in [0, T]$.

Упорядоченность функций $\overline{U}$ и $\underline{U}$ следует из вида U-компонент верхнего и нижнего решений (см.(32)), а также выражений (19), (25), аналогичных выражений для функций $Q_i^{(\mp)} u$, $i = 2, 3$, которые могут быть получены из равенств (17) в порядках ε^2 и ε^3 соответственно, а также равенств (41).

Проверим выполнение условия **У2**. Заметим, что это условие выполняется, если справедливы следующие неравенства:

$$L_{u\varepsilon}(\overline{U}, \overline{V}) := \varepsilon^4 \overline{U}_{xx} - \varepsilon^3 \overline{U}_t + \overline{V} - \gamma \overline{U} < 0 < L_{u\varepsilon}(\underline{U}, \underline{V}) \quad (x, t) \in [0; 1] \times (0; T],$$
$$L_{v\varepsilon}(\overline{V}, \underline{U}) := \varepsilon^2 \overline{V}_{xx} - \varepsilon \overline{V}_t - g\left(\overline{V}, x, \varepsilon\right) - \underline{U} < 0 < L_{v\varepsilon}(\underline{V}, \overline{U}), \quad (x, t) \in [0; 1] \times (0; T].$$

Подставляя в оператор $L_{u\varepsilon}(\overline{U}, \overline{V})$ функции $\overline{U}$, $\overline{V}$, получим

$$L_{u\varepsilon}(\overline{U}, \overline{V}) = \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(Q_0^{(\mp)} u(\bar{\xi}, t) + \varepsilon Q_1^{(\mp)} u(\bar{\xi}, t) \right) + W \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(Q_0^{(\mp)} u(\bar{\xi}, t) + \varepsilon Q_1^{(\mp)} u(\bar{\xi}, t) \right) +$$
$$+ V_3^{(\mp)}(\bar{\xi}, t, \varepsilon) - \gamma U_3^{(\mp)}(\bar{\xi}, t, \varepsilon) + \varepsilon^2 \left(\bar{q}_2^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t) - \gamma \bar{q}_2^{(\mp)} u(\bar{\xi}, t) \right) +$$
$$+ \varepsilon^3 \left(\beta^{(\mp)} - \gamma \alpha^{(\mp)} + \bar{q}_3^{(\mp)} v(\bar{\xi}, t) - \gamma \bar{q}_3^{(\mp)} u(\bar{\xi}, t) \right) + O\left(\varepsilon^4\right) = -\varepsilon^3 A + O\left(\varepsilon^4\right).$$

Здесь мы использовали равенства (17), уравнения (34), (42) и первое из равенств (33).

Теперь подставим в оператор $L_{v\varepsilon}(\overline{V},\underline{U})$ функции $\overline{V}$, $\underline{U}$:

$$L_{v\varepsilon}(\overline{V},\underline{U}) = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}V_3^{(\mp)}(\bar{\xi},t,\varepsilon) + W\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial\xi}V_3^{(\mp)}(\bar{\xi},t,\varepsilon) - g\left(V_3^{(\mp)}(\bar{\xi},t,\varepsilon)\right) - U_3^{(\mp)}(\underline{\xi},t,\varepsilon)+$$
$$+\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\bar{q}_2^{(\mp)}v(\bar{\xi},t) + W\frac{\partial}{\partial\xi}\bar{q}_2^{(\mp)}v(\bar{\xi},t) - g_v\left(V_3^{(\mp)}(\bar{\xi},t,\varepsilon)\right)\bar{q}_2^{(\mp)}v(\bar{\xi},t) - \underline{q}_2^{(\mp)}u(\underline{\xi},t)\right)+$$
$$+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\bar{q}_3^{(\mp)}v(\bar{\xi},t) + W\frac{\partial}{\partial\xi}\bar{q}_3^{(\mp)}v(\bar{\xi},t) - g_v\left(V_3^{(\mp)}(\bar{\xi},t,\varepsilon)\right)\bar{q}_3^{(\mp)}v(\bar{\xi},t) - \underline{q}_3^{(\mp)}u(\underline{\xi},t)-\right.$$
$$\left.-g_v\left(V_3^{(\mp)}(\bar{\xi},t,\varepsilon)\right)\beta^{(\mp)} + \alpha^{(\mp)}\right) + O\left(\varepsilon^4\right).$$

В правой части добавим и вычтем слагаемые $g_v\left(v^{1,3}\right)\beta^{(\mp)}$, учтем также равенства

$$g\left(V_3^{(\mp)}(\bar{\xi},t,\varepsilon)\right) + U_3^{(\mp)}(\underline{\xi},t,\varepsilon) = g\left(V_3^{(\mp)}(\bar{\xi},t,\varepsilon)\right) + U_3^{(\mp)}(\bar{\xi},t,\varepsilon) - U_3^{(\mp)}(\bar{\xi},t,\varepsilon)+$$
$$+U_3^{(\mp)}(\underline{\xi},t,\varepsilon) = g\left(V_3^{(\mp)}(\bar{\xi},t,\varepsilon)\right) + U_3^{(\mp)}(\bar{\xi},t,\varepsilon)-$$
$$-2\varepsilon^2\delta(t)\gamma^{-1}\Phi^{(\mp)}\left(\bar{\xi},t,\overline{W}\right) - 2\varepsilon^3\delta(t)\frac{\partial Q_1^{(\mp)}u}{\partial\bar{\xi}}(\bar{\xi},t) + O\left(\varepsilon^4\right),$$
$$L_{v\varepsilon}(V_3^{(\mp)}(\bar{\xi},t,\varepsilon),U_3^{(\mp)}(\bar{\xi},t,\varepsilon)) = O\left(\varepsilon^4\right),$$
$$g_v\left(V_3^{(\mp)}(\bar{\xi},t,\varepsilon)\right)\bar{q}_2^{(\mp)}v(\bar{\xi},t) = \left(g_v(\tilde{v}(\bar{\xi},t)) + \varepsilon g_{vv}\left(\tilde{v}(\bar{\xi},t)\right)Q_1^{(\mp)}v\right)\bar{q}_2^{(\mp)}v(\bar{\xi},t) + O\left(\varepsilon^2\right),$$

тогда получим

$$L_{v\varepsilon}(\overline{V},\underline{U}) =$$
$$\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\bar{q}_2^{(\mp)}v(\bar{\xi},t) + W\frac{\partial}{\partial\xi}\bar{q}_2^{(\mp)}v(\bar{\xi},t) - g_v(\tilde{v}(\bar{\xi},t))\cdot\bar{q}_2^{(\mp)}v(\bar{\xi},t) - \underline{q}_2^{(\mp)}u(\underline{\xi},t) +\right.$$
$$\left.+2\frac{\delta(t)}{\gamma}\Phi^{(\mp)}(\bar{\xi},t,\overline{W})\right)+$$
$$+\varepsilon^3\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\bar{q}_3^{(\mp)}v(\bar{\xi},t) + W\frac{\partial}{\partial\xi}\bar{q}_3^{(\mp)}v(\bar{\xi},t) - g_v(\tilde{v}(\bar{\xi},t))\cdot\bar{q}_3^{(\mp)}v(\bar{\xi},t) - \underline{q}_3^{(\mp)}u(\underline{\xi},t)-\right.$$
$$\left.-\left(g_v(\tilde{v}(\bar{\xi},t)) - g_v\left(v^{1,3}\right)\right)\beta^{(\mp)} + 2\delta(t)Q_1^{(\mp)}u(\bar{\xi},t) - g_{vv}(\tilde{v}(\bar{\xi},t))\cdot Q_1^{(\mp)}v\cdot\bar{q}_2^{(\mp)}v\right)+$$
$$+\varepsilon^3\left(-g_v\left(v^{1,3}\right)\beta^{(\mp)} + \alpha^{(\mp)}\right) + O\left(\varepsilon^4\right) = -\varepsilon^3\left(B + d\mathrm{e}^{-\lambda|\xi|}\right) + O\left(\varepsilon^4\right).$$

Здесь мы учли уравнения (36) и (44) для функций $\bar{q}_2^{(\mp)}v(\bar{\xi},t)$ и $\bar{q}_3^{(\mp)}v(\bar{\xi},t)$ и второе равенство (33). Аналогично проверяется справедливость условий **У2** для нижнего решения.

Проверим выполнение условия **У3** на производную для верхнего решения.

$$\frac{\partial \overline{V}^{(-)}}{\partial x}(\bar{x}(t),t,\varepsilon)-\frac{\partial \overline{V}^{(+)}}{\partial x}(\bar{x}(t),t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\left(\Phi^{(-)}(0,t,\overline{W})-\Phi^{(+)}(0,t,\overline{W})\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\varepsilon^{i-1}\left(\frac{\partial Q_i^{(-)}v}{\partial \bar{\xi}}(0,t)-\frac{\partial Q_i^{(+)}v}{\partial \bar{\xi}}(0,t)\right)+$$
$$+\varepsilon\left(\frac{\partial \bar{q}_2^{(-)}v}{\partial \bar{\xi}}(0,t)-\frac{\partial \bar{q}_2^{(+)}v}{\partial \bar{\xi}}(0,t)\right)+\varepsilon^2\left(\frac{\partial \bar{q}_3^{(-)}v}{\partial \bar{\xi}}(0,t)-\frac{\partial \bar{q}_3^{(+)}v}{\partial \bar{\xi}}(0,t)\right)+O\left(\varepsilon^3\right).$$

Преобразуем первые три слагаемых в правой части, используя условие сшивания (29) в порядках $\varepsilon^i,\ \ i=0,1,2,3$:

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\Phi^{(-)}(0,t,\overline{W})-\Phi^{(+)}(0,t,\overline{W})\right)+\sum_{i=1}^{3}\varepsilon^{i-1}\left(\frac{\partial Q_i^{(-)}v}{\partial \bar{\xi}}(0,t)-\frac{\partial Q_i^{(+)}v}{\partial \bar{\xi}}(0,t)\right)=$$
$$=\varepsilon^2\frac{\partial H_0}{\partial W}(v^2,W_0)\frac{d\delta}{dt}+O\left(\varepsilon^3\right),$$

где функция $H_0(\tilde{v},W)$ определена равенством (7). Из первого равенства (40) и условия **А4** следует, что

$$\frac{\partial \bar{q}_2^{(-)}v}{\partial \bar{\xi}}(0,t)-\frac{\partial \bar{q}_2^{(+)}v}{\partial \bar{\xi}}(0,t)=O(\varepsilon).$$

Используя явные выражения (47) для функций $\bar{q}_3^{(\mp)}(\bar{\xi},t)$, можно представить разность производных этих функций при $\bar{\xi}=0$ в виде

$$\frac{\partial \bar{q}_3^{(-)}v}{\partial \bar{\xi}}(0,t)-\frac{\partial \bar{q}_3^{(+)}v}{\partial \bar{\xi}}(0,t)=K(t)\delta(t)+\overline{F}(t)+O(\varepsilon),$$

где

$$K(t)=-\frac{2}{\Psi^{(-)}(0,t)}\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{W_0\xi}\Psi^{(-)}(\xi,t)\frac{\partial Q_1^{(-)}u}{\partial \xi}(\xi,t)d\xi+\frac{2}{\Psi^{(+)}(0,t)}\int\limits_{+\infty}^{0}\mathrm{e}^{W_0\xi}\Psi^{(+)}(\xi,t)\frac{\partial Q_1^{(+)}u}{\partial \xi}(\xi,t)d\xi,$$

а функция $\overline{F}(t)$ не зависит от δ.

Определим функцию $\delta(t)$ как решение следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial H_0}{\partial W}(v^2,W_0)\frac{d\delta}{dt}+K(t)\delta(t)=\sigma,\quad \delta(0)=\delta_0,$$

где σ и δ_0 – достаточно большие положительные числа.

В силу неравенства (8) из условия **А4** функция $\delta(t)$ принимает положительные значения при $t\geq 0$.

При таком выборе функции $\delta(t)$ для разности производных верхнего решения в точке $\bar{x}(t)$ в каждый момент времени получаем выражение

$$\frac{\partial \overline{V}^{(-)}}{\partial x}(\bar{x}(t), t, \varepsilon) - \frac{\partial \overline{V}^{(+)}}{\partial x}(\bar{x}(t), t, \varepsilon) = \varepsilon^2 \sigma + \varepsilon^2 \overline{F}(t) + O\left(\varepsilon^3\right).$$

Выбирая величину σ достаточно большой, можно добиться выполнения каждого из неравенств условия **У3**.

Условие **У4** оказываются выполненным за счет слагаемых $R\mathrm{e}^{-\varkappa \rho^{(\mp)}}$.

4. Основной результат

Опираясь на результат, полученный в [6], заключаем, что имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть выполнены условия **А1**–**А4**. Пусть начальные функции задачи (1), $(v_{init}(x, \varepsilon), u_{init}(x, \varepsilon))$ – гладкие при $x \in [0; 1]$ и заключены между верхним и нижним решениями (32) в начальный момент времени. Тогда при достаточно малых значениях ε задача (1) имеет единственное классическое решение $(v(x, t, \varepsilon), u(x, t, \varepsilon))$, для которого пара функций $(V_3(x, t, \varepsilon), U_3(x, t, \varepsilon))$ является равномерным в $\bar{D}$ асимптотическим приближением с точностью $O\left(\varepsilon^4\right)$:

$$|v(x, t, \varepsilon) - V_3(x, t, \varepsilon)| \leq \varepsilon^4 C \mathrm{e}^{-\kappa|\xi|}, \quad |u(x, t, \varepsilon) - U_3(x, t, \varepsilon)| \leq \varepsilon^4 C \mathrm{e}^{-\kappa|\xi|},$$

где C и κ – положительные константы, не зависящие от ε.

Заключение

В настоящей работе приведен алгоритм построения верхнего и нижнего решений системы параболических уравнений с одномасштабным внутренним переходным слоем. Этот алгоритм может быть в дальнейшем обобщен на более сложные системы с двухмасштабными переходными слоями или на системы с разрывными реактивными слагаемыми. Подобные исследования имеют важное практическое значение для создания математически обоснованных моделей биофизики.

Список литературы / References

[1] Murray J. D., *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*, Third Edition, Springer, 2003.

[2] FitzHugh R. A., “Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane”, *Biophys. J.*, **1**:6 (1961), 445–466.

[3] Сидорова А. Э., Левашова Н. Т., Мельникова А. А., Яковенко Л. В., “Популяционная модель урбоэкосистем в представлениях активных сред”, *Биофизика*, **60**:3 (2015), 574–582; English transl.: Sidorova A. E., Levashova N. T., Melnikova A. A., Yakovenko L. V, “A model of a human dominated urban ecosystem as an active medium”, *Biophysics*, **60**:3 (2015), 466–473.

[4] Сидорова А. Э., Левашова Н. Т., Мельникова А. А. и др., "Автоволновая самоорганизация в неоднородных природно-антропогенных экосистемах", *Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия*, 2016, № 6, 39–45; English transl.: Sidorova A. E., Levashova N. T., Melnikova A. A. et al., "Autowave self-organization in heterogeneous natural–anthropogenic ecosystems", *Moscow University Physics Bulletin*, **71**:6 (2016), 562—568.

[5] Сидорова А. Э., Левашова Н. Т., Мельникова А. А., Семина А. Е., "Модель структурообразования урбоэкосистем как процесс автоволновой самоорганизации в активных средах", *Математическая биология и биоинформатика*, **12**:1 (2017), 186–197; [Sidorova A.E., Levashova N.T., Melnikova A.A., Semina A.E., "The Model of Structurization of Urban Ecosystems as the Process of Self-Organization in Active Media", *Math. Biol. Bioinf.*, **12**:1 (2017), 186–197, (in Russian).]

[6] Pao C. V., *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*, Plenum Press, New York, 1992.

[7] Нефедов Н. Н., "Асимптотический метод дифференциальных неравенств в исследовании периодических контрастных структур: существование, асимптотика, устойчивость", *Дифференц. уравнения*, **36**:2 (2000), 262—269; English transl.: Nefedov N. N., "An asymptotic method of differential inequalities for the investigation of periodic contrast structures: Existence, asymptotics, and stability", *Differential Equations*, **36**:2 (2000), 298—305.

[8] Волков В. Т., Нефедов Н. Н., "Развитие асимптотического метода дифференциальных неравенств для исследования периодических контрастных структур в уравнениях реакция-диффузия", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46**:4 (2006), 615–623; English transl.: Volkov V. T., Nefedov N. N., "Development of the asymptotic method of differential inequalities for investigation of periodic contrast structures in reaction-diffusion equations", *Comput. Math. and Math. Phys.*, **46**:4 (2006), 585–593.

[9] Левашова Н. Т., Петровская Е. С., "Применение метода дифференциальных неравенств для обоснования асимптотики решения системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений в виде контрастной структуры типа ступеньки", *Ученые записки физического факультета Московского университета*, **1**:3(11) (2014), 1–13; [Levashova N. T., Petrovskaya E. S., "Application of the differential inequalities method for justification of asymptotics of the solution of a two ordinary differential equations system in the form of a step-like contrast structure", *Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*, **1**:3(11) (2014), 1–13 (in Russian).]

[10] Левашова Н. Т., Мельникова А. А., "Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе параболических уравнений", *Дифференциальные уравнения*, **51**:3 (2015), 339–358; English transl.: Levashova N.T., Mel'nikova A.A., "Step-like contrast structure in a singularly perturbed system of parabolic equations", *Differential Equations*, **51**:3 (2015), 342–361.

[11] Бутузов В. Ф., Левашова Н. Т., Мельникова А. А., "Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе уравнений с различными степенями малого параметра", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **52**:11 (2012), 1983–2003; English transl.: Butuzov V. F., Levashova N. T., Mel'nikova A.A., "Steplike contrast structure in a singularly perturbed system of equations with different powers of small parameter", *Comput. Math. and Math. Phys.*, **52**:11 (2012), 1526–1546.

[12] Бутузов В. Ф., Левашова Н. Т., Мельникова А. А., "Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе эллиптических уравнений", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **53**:9 (2013), 1427–1447; English transl.: Butuzov V. F., Levashova N. T., Mel'nikova A.A., "A Steplike Contrast Structure in a Singularly Perturbed System of Elliptic Equations", *Comput. Math. and Math. Phys.*, **53**:9 (2013), 1239–1259.

[13] Volpert A. I., Volpert V. A., Volpert V. A., *Traveling wave solutions of parabolic systems*, Translations of mathematical monographs, **140**, American Mathematical Soc., 1994.

[14] Давыдова М. А., Захарова С. А., Левашова Н. Т., "Об одной модельной задаче для уравнения реакция-диффузия-адвекция", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **57**:9 (2017), 1548–1559; English transl.: Davydova M. A., Zakharova S. A., Levashova N. T., "On one model problem for the reaction–diffusion–advection equation", *Comput. Math. and Math. Phys.*, **57**:9 (2017), 1528–1539.

[15] Бутузов В. Ф., Неделько И. В., "Контрастная структура типа ступеньки в системе двух сингулярно возмущенных параболических уравнений", *Матем. моделирование*, **13**:12 (2001), 23–42; [Butuzov V. F., Nedelko I. V., "Step-type contrast structure in a system of two singularly perturbed parabolic equations", *Matem. Mod.*, **13**:12 (2001), 23—42, (in Russian).]

[16] Omel'chenko O., Recke L., "Boundary layer solutions to singularly perturbed problems via the implicit function theorem", *Asymptotic Analysis*, **62**:3–4 (2009), 207—225.

[17] Palmer K.J., "Exponential dichotomies for almost periodic equations", *Proceedings of the American Mathematical Society*, **101**:2 (1987), 293—298.

Bytsyura S. V., Levashova N. T., "Upper and Lower Solutions for the FitzHugh–Nagumo Type System of Equations", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:1 (2018), 33–53.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-33-53

Abstract. We consider a moving front solution of a singularly perturbed FitzHugh–Nagumo type system of equations. The solution contains an internal transition layer, that is, a subdomain where a sharp change in the values of the functions describing the solution occurs. In initial-boundary value problems with moving front solutions, there naturally exists a small parameter that is equal to the ratio of the inner transition layer width to the width of the considered region. Taking into account this small parameter leads to the fact that the equations become singularly perturbed, thus the problems are classified as "hard", the numerical solution of which meets certain difficulties and does not always give a reliable result. In connection with this, the role of an analytical investigation of the existence of a solution with an internal transition layer increases. For these purposes the use of differential inequalities method is especially effective. The method consists in constructing continuous functions, which are called upper and lower solutions. An important role is played by the so-called "quasimonotonicity condition" for functions which describe reactive terms. In this paper, we present an algorithm for constructing the upper and the lower solutions of a parabolic system with a single-scale internal transition layer. It should be mentioned that the quasimonotonicity condition in the present paper differs from the analogous condition in previous publications. The above algorithm can be further generalized to more complex systems with two-scale transition layers or to systems with discontinuous reactive terms. The study is of great practical importance for creating mathematically grounded models in biophysics.

Keywords: system of parabolic equations, internal transition layer, small parameter, upper and lower solutions, differential inequalities method, asymptotic representation

On the authors:
Svetlana V. Bytsyura, orcid.org/0000-0001-7787-437X, past master,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
1 Leninskiye Gory, bld. 2, Moscow, 119991, Russia, e-mail: sv.bytcyura@physics.msu.ru

Natalia T. Levashova, orcid.org/0000-0002-1916-166X, PhD,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
1 Leninskiye Gory, bld. 2, Moscow, 119991, Russia, e-mail: natasha@npanalytica.ru

Acknowledgments:
[1]This work was supported by Russian fund of basic researches, project No 16-01-00437.