
©Глызин С. Д., Лоханин М. В., Сиротин Д. М., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-54-62

УДК 517.9

Инвариантные характеристики вынужденных колебаний балки с продольным сжатием

Глызин С. Д., Лоханин М. В., Сиротин Д. М.

получена 18 ноября 2017

Аннотация. Рассматриваются колебания упругой балки с продольным сжатием. Такая балка может быть реализована из двух упругих стальных полос, соединённых на свободных концах. Сжатие в балке происходит за счет натянутой нити. Возбуждение колебаний осуществляется воздействием переменного магнитного поля на магнит, установленный на конце балки. Регистрировался закон движения при изменении частоты гармонического воздействия. В результате натурного эксперимента был получен большой массив данных, представляющих собой как упорядоченные периодические колебания, так и неупорядоченные колебания, характерные для динамических систем с хаотическим поведением. Для изучения инвариантных числовых характеристик аттрактора соответствующей динамической системы вычислялись корреляционный интеграл и корреляционная размерность, а также β -статэнтропия. Объемный численный эксперимент показал, что вычисление β -статэнтропии предпочтительнее расчёта корреляционного показателя. На основе разработанных алгоритмов построена зависимость β -статэнтропии от частоты внешнего воздействия. Эта зависимость может служить эффективным инструментом для оценки адекватности математической модели вынужденных колебаний балки с потерей устойчивости.

Ключевые слова: балка с продольным сжатием, устойчивость, бифуркации, уравнение Дуффинга, аттрактор Уэды, хаотические колебания, энтропия, ляпуновские показатели

Для цитирования: Глызин С. Д., Лоханин М. В., Сиротин Д. М., "Инвариантные характеристики вынужденных колебаний балки с продольным сжатием", *Моделирование и анализ информационных систем*, **25:1** (2018), 54–62.

Об авторах:

Глызин Сергей Дмитриевич, orcid.org/0000-0002-6403-4061, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой компьютерных сетей, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, ведущий научный сотрудник, НЦЧ РАН, ул. Лесная, д. 9, г. Черноголовка, Московская область, 142432 Россия, e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

Лоханин Михаил Владимирович, старший преподаватель, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: lokhaninmv@mail.ru

Сиротин Дмитрий Михайлович, старший лаборант-исследователь, НЦЧ РАН, ул. Лесная, д. 9, г. Черноголовка, Московская область, 142432 Россия, e-mail: hhiks@yandex.ru

Благодарности:

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00158).

1. Описание эксперимента. Постановка задачи

Механические и электро-механические системы с хаотическим поведением достаточно давно находятся в сфере пристального интереса как теоретиков, так и создателей экспериментальных устройств с хаотическим поведением. Вместе с тем, в последнее время активно изучаются балочные колебательные системы с несколькими минимумами потенциала под воздействием внешних периодических сил. Магнито-эластическим балкам с эйлеровой неустойчивостью посвящена довольно значительная литература, сошлемся лишь на статьи [1, 2] и классическую книгу по теории колебаний [3], а также на недавнюю статью [4].

В ходе выполненного авторами натурного эксперимента рассматривались колебания упругой балки с продольным сжатием. Балки такого типа могут быть реализованы на основе пары стальных полос, соединённых на свободных концах и сжатых в продольном направлении натянутой кевларовой нитью. На свободном конце при помощи отверстий в накладках и полосах крепятся шторка из алюминиевой фольги, служащая основным элементом сенсора отклонения балки, и алюминиевая стойка с маленьким SmCo_5 магнитом, который, взаимодействуя с магнитным полем катушки, является источником силового воздействия, их масса достаточно мала (менее 10% от массы полос) и практически не влияет на движение системы. Через отверстия в пластинах проходят болты, которые крепят всю конструкцию к массивной (≈ 5 кг) стальной плите и сжимают верхнюю и нижнюю пластины, фиксируя тем самым заделанные концы (Рис. 1).

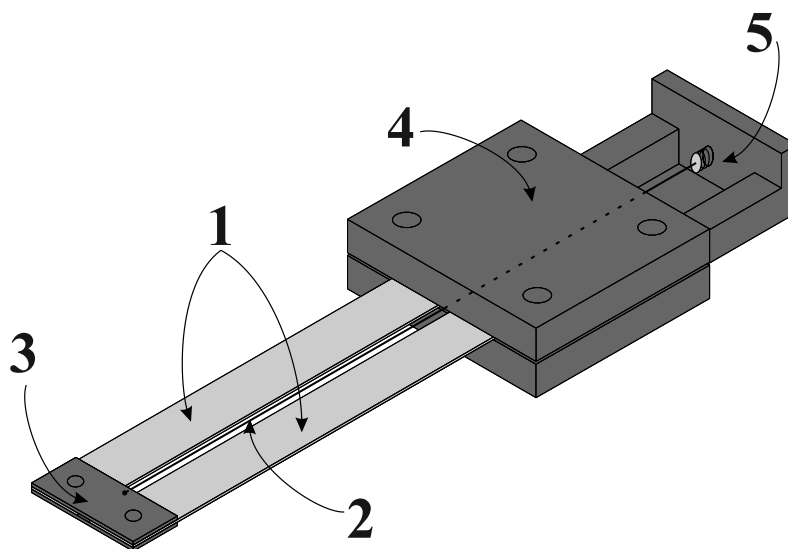


Рис. 1. Конструкция экспериментального устройства:

- 1 — упругие стальные полосы; 2 — кевларовая нить; 3 — накладки, соединяющие полосы;
4 — пластины, фиксирующие конструкцию; 5 — пружинный механизм натяжения нити.
На свободном конце крепятся шторка из алюминиевой фольги (основной элемент сенсора отклонения) и маленький магнит

Fig.1. Design of experimental device:

- 1 — elastic steel strips; 2 — Kevlar thread; 3 — overlays connecting strips; 4 — plates that fix the structure; 5 — spring mechanism of thread tension. At the free end, a curtain made of aluminum foil (the main element of the deflection sensor) and a small magnet

Электронные устройства, которые приводят балку в движение и регистрируют отклонение конца балки, базируются на измерительной карте DAS-16, работающей в составе компьютера и имеющей аналого-цифровые и цифро-аналоговые преобразователи, а также таймеры. Программно 512 чисел, представляющих собой точки одного периода синусоиды, выводятся на цифро-аналоговый преобразователь и через усилитель на катушку, которая создает магнитное поле и, взаимодействуя с магнитом, определяет закон изменения силы, действующей на балку. Темп вывода этих точек определяется таймером и задает частоту силового воздействия. После каждой смены числа в цифро-аналоговом преобразователе аналого-цифровой преобразователь производит измерение положения шторки, перекрывающей оптический канал между источником света (мощный инфракрасный светодиод) и фотоприемником по сигналу фотоприемника, который записывается в массив в оперативной памяти компьютера. При многократном повторении описанной процедуры накапливается числовой массив, представляющий собой закон вынужденных колебаний балки.

Полученный числовой массив позволяет выявить динамические особенности колебательных режимов балки при различных значениях частоты внешнего сигнала. Рассматривая полученные данные как проявления некоторой динамической системы поставим задачу определения инвариантных числовых характеристик аттрактора этой системы. В связи с этим возникает необходимость обработки массива данных и определения этих характеристик. Второй, более сложной задачей, является построение математической модели данного колебательного процесса. В качестве критерия, по которому можно сравнивать поведение модельной динамической системы и экспериментальные данные, могут выступать как раз инвариантные числовые характеристики аттракторов соответствующих систем.

2. Числовые характеристики экспериментальных данных

В первую очередь рассмотрим проблему визуализации полученных в эксперименте данных. Для каждой из частот внешнего воздействия в ходе эксперимента получался массив данных, представляющий собой набор целых положительных чисел. Для получения более наглядных результатов среди них вычислялся минимум и максимум и выполнялось нормирование так, чтобы они все принадлежали отрезку $[-1, 1]$, далее к ним применялся сглаживающий фильтр

$$y(n) = \frac{1}{2k+1} \left(x(n) + x(n-1) + \dots + x(n-2k) \right),$$

где $k = 10$. Затем из обработанных данных формировался набор векторов (x_n, x_{n+p}) . Отображая эти пары на плоскости, получаем псевдофазовый портрет системы. Экспериментальный подбор величины p показал, что наиболее информативно фазовые портреты системы выглядят при $p = 75$. В зависимости от частоты внешнего воздействия псевдофазовые траектории могут выглядеть как упорядоченные периодические колебания, а также как системы с хаотическим поведением. При этом удается показать, что переход от периодических колебаний к хаотическим осуществляется через бифуркацию удвоения периода. На рис. 2а — 2б показаны результаты экспериментов с частотами внешнего воздействия 12.0192 Гц и 10.7759 Гц соответственно,

нетрудно видеть, что на рис. 2b период колебательного режима примерно двойной по сравнению с изображенным на рис. 2a.

На рис. 2c — 2d приведены псевдофазовые траектории для частот 8.9286 Гц и 8.2237 Гц соответственно, в этом случае экспериментальные данные демонстрируют неупорядоченное поведение. Перейдем теперь к задаче оценки степени неупорядоченности колебаний и вычислению соответствующих инвариантных характеристик.

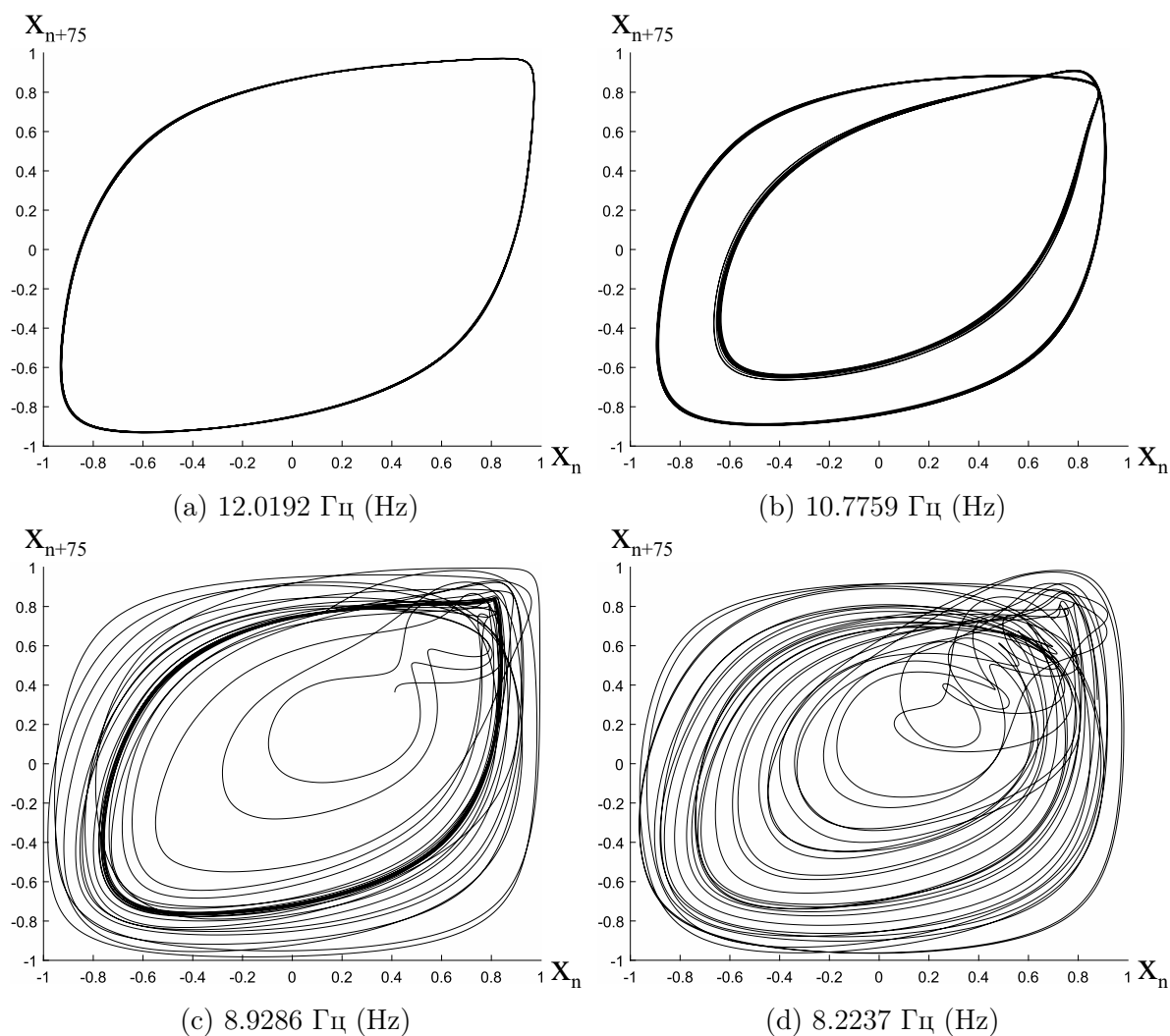


Рис. 2. Фазовые портреты при различной частоте внешнего воздействия
Fig.2. Phase portraits at various frequencies

Сложность колебательных режимов для частот воздействия меньше, чем 8.9 Гц, подтверждается приведенными на рис. 3 итерациями отображения последования Пуанкаре через период внешнего воздействия. Нетрудно видеть, что для изучения геометрической структуры аттрактора задачи получено недостаточное число итераций отображения Пуанкаре. В связи с этим вычислялся целый спектр инвариантных числовых характеристик, в частности, вычислялись корреляционный интеграл, корреляционная размерность, а также β -статэнтропия.

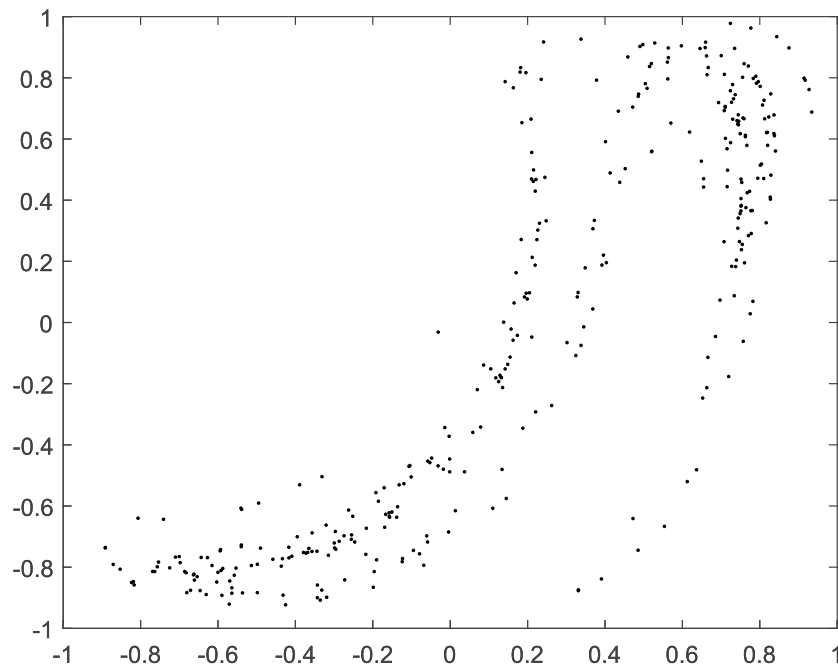


Рис. 3. Отображения последования Пуанкаре для внешнего воздействия с частотой 8.6806 Гц

Fig.3. Poincaré map for external influences at the frequency 8.6806 Hz

Численные эксперименты показали, что вычисление β -статэнтропии является наиболее предпочтительным критерием хаотичности. В соответствии с алгоритмом, изложенным в работе [5], β -статэнтропия вычисляется по следующим формулам:

$$\eta_n^{(k)}(\beta) = \begin{cases} \frac{\beta r_n^{(k)}(\beta)}{k(r_n^{(k+1)}(\beta) - r_n^{(k)}(\beta))}, & \beta \neq 0, \\ \frac{1}{k(r_n^{(k)}(0) - r_n^{(k+1)}(0))}, & \beta = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$r_n^{(k)}(\beta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \gamma \left(\min_{i:i \neq j}^{(k)} \rho(\xi_i, \xi_j) \right),$$

$$\gamma(t) = \begin{cases} t^\beta, & \beta \neq 0, \\ -\ln t, & \beta = 0, \end{cases}$$

кроме того, $\min_{i:i \neq j}^{(k)} \rho(\xi_i, \xi_j)$ — k -е минимальное расстояние от точки ξ_j , а $\rho(\cdot, \cdot)$ — некоторая метрика в пространстве состояний. Наиболее наглядные результаты получились с применением формулы (1) при $\beta = 0$, $k = 0$ (Таблица 1). Периодическим колебаниям в данном случае соответствуют нулевые значения этой величины, а хаотическим — положительные.

Полученные численные результаты позволяют сделать предположение, что в качестве феноменологической модели для представленных экспериментальных результатов может служить уравнение Дуффинга с внешним воздействием, которое

Таблица 1. Показатели β -статэнтропии при $\beta = 0, k = 0$
Table 1. β -statentropy for $\beta = 0, k = 0$

	η_n
13.0208, ..., 9.1912 Гц	0
8.9286 Гц	0.1386
8.6806 Гц	0.1372
8.4459 Гц	0.136
8.2237 Гц	0.1351
8.0128 Гц	0.132
7.8125 Гц	0.1291
7.6220 Гц	0.1039
7.4405, ..., 6.9444 Гц	0

часто называется генератором Уэды [6]. Отметим, что итерации отображения последования Пуанкаре, приведённые в [6], схожи с полученными изображениями для экспериментальных данных (Рис. 3).

3. Феноменологическая модель

Предполагаемая модель является в значительной степени феноменологической. Рассуждения, аналогичные приведенным ниже, могут быть найдены в статьях [8–11]. Для построения модельного уравнения делается два наиболее важных допущения. Во-первых, движение упругой балки подменяется движением материальной точки в некотором силовом поле. Это может быть оправдано тем, что высшие собственные частоты системы лежат далеко от минимальной частоты. Во-вторых, вид потенциальной функции выбирался из следующих соображений: она должна иметь максимум при отклонении $x = 0$ и два минимума при $x = \pm x_0$, то есть положение равновесия при $x = 0$ неустойчиво, а равновесия при $x = \pm x_0$ — устойчивы. Простейшая реализация такого потенциала задается полиномом четвёртой степени вида

$$U(x) = Ax^4 - Bx^2. \quad (2)$$

Выписывая уравнение баланса сил, имеем уравнение

$$m\ddot{x} = F = F_{pot} + F_{diss} + F_{ext} = -\frac{dU}{dx} - \eta\dot{x} + F_{ext}, \quad (3)$$

где m — масса, F_{pot} — потенциальная сила, F_{diss} — сила трения и F_{ext} — внешняя сила. Учитывая вид потенциала (2), имеем

$$F_{pot} = -4Ax^3 + 2Bx = -4Ax(x^2 - \frac{B}{2A}) = -4Ax(x^2 - x_0^2),$$

причем $x = \pm x_0 = \pm\sqrt{\frac{B}{2A}}$ — точки устойчивого равновесия. В свою очередь, считаем, что сила внешнего воздействия F_{ext} задается формулой:

$$F_{ext} = F_0 \cos(\omega t),$$

тем самым, уравнение (3) записывается в виде

$$\ddot{x} = -\frac{\eta}{m}\dot{x} - \frac{4A}{m}(x^2 - x_0^2) + \frac{F_0}{m}\cos(\omega t). \quad (4)$$

Выберем для переменной x новый масштаб $y = x/x_0$, тогда

$$\ddot{y} = -\frac{\eta}{m}\dot{y} - \frac{4Ax_0^2}{m}y(y^2 - 1) + \frac{F_0}{mx_0}\cos(\omega t). \quad (5)$$

Рассмотрим колебания вблизи одной из точек $y = \pm 1$. Выполняя замену $y = 1 + \zeta$ или $y = -1 + \zeta$ и полагая внешние силы отсутствующими, линеаризуем полученное уравнение в нуле. В результате уравнение малых свободных колебаний возле точек равновесия будет иметь вид

$$\ddot{\zeta} = -\frac{\eta}{m}\dot{\zeta} - \frac{8Ax_0^2}{m}\zeta.$$

Частота этих колебаний оказывается равной

$$\omega_0^2 = \frac{8Ax_0^2}{m}.$$

Это позволяет пронормировать время $\tau = \omega_0 t$, в результате чего получаем уравнение

$$\ddot{y} = -\frac{\eta}{m\omega_0}\dot{y} - \frac{1}{2}y(y^2 - 1) + \frac{F_0}{mx_0\omega_0^2}\cos(\Omega\tau), \quad (6)$$

или в более привычной форме уравнение Дуффинга с внешним воздействием:

$$\ddot{y} + \alpha\dot{y} + \frac{1}{2}y(y^2 - 1) = f\cos(\Omega\tau), \quad (7)$$

где $\alpha = \eta\omega_0/m$ — параметр потерь, $f = F_0/(mx_0\omega_0^2)$ — параметр интенсивности внешнего воздействия, $\Omega = \omega/\omega_0$ — частота внешнего воздействия, нормированная на частоту малых свободных колебаний.

Модельное уравнение (7) довольно подробно изучено. Начиная со статьи [6] с его помощью исследуются задачи, функция потенциала которых имеет два симметричных минимума (см. [2, 4, 10]). В этом уравнении при изменении параметров реализуется хорошо известный фейгенбаумовский сценарий перехода к хаосу через цепочку бифуркаций удвоения. Это обстоятельство позволяет предложить следующий способ подбора параметров задачи (7) так, чтобы свойства аттрактора динамической системы (7) и экспериментальной модели, описанной в пункте 1, были близки. С этой целью в области, где реализуется фейгенбаумовский сценарий перехода к хаосу, фиксируются параметры α и f уравнения (7). Затем определяется частота Ω , при которой происходит первое удвоение периода, эта величина сопоставляется с частотой, при которой происходит удвоение периода в экспериментальной системе. Далее определяются значения Ω , при которых (7) имеет хаотический аттрактор. Эти значения можно определить на основе вычисления старшего ляпуновского показателя (используется алгоритм из [7]). Наконец, для значений частот, соответствующих эксперименту (см. таблицу 1), у аттрактора динамической системы (7)

вычисляется показатель β -статэнтропии. Степень удачности выбора параметров α и f будет определяться близостью значений β -статэнтропии модельной системы и экспериментальной реализации.

Описанный алгоритм авторы планируют применить к уравнению (7) и имеющимся экспериментальным данным, поскольку он может служить эффективным инструментом для оценки адекватности математической модели вынужденных колебаний балки с потерей устойчивости.

Список литературы

- [1] Moon F.C. and Holmes P.J., “A magnetoelastic strange attractor”, *Journal of Sound and Vibration*, **65**:2 (1979), 275 – 296.
- [2] Tam Jee Ian, Holmes Philip, “Revisiting a magneto-elastic strange attractor”, *Journal of Sound and Vibration*, **333**:6 (2014), 1767–1780.
- [3] Guckenheimer J. and Holmes P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Applied Mathematical Sciences, **42**, Springer, 1983.
- [4] Kumar K.Aravind, Ali Shaikh Faruque, Arockiarajan A., “Magneto-elastic oscillator: Modeling and analysis with nonlinear magnetic interaction”, *Journal of Sound and Vibration*, **393** (2017), 265–284.
- [5] Тимофеев Е. А., “Статистически оцениваемые инварианты мер”, *Алгебра и анализ*, **17**:3 (2005), 204–236; English transl.: Timofeev E. A., “Invariants of measures admitting statistical estimates”, *St. Petersburg Math. J.*, **17**:3 (2006), 527–551.
- [6] Yoshisuke Ueda, “Randomly transitional phenomena in the system governed by Duffing’s equation”, *Nagoya University Institute of Plasma Physics, Japan*, 1978, № IPPJ–341.
- [7] Глызин Д. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора”, *Дифференц. уравнения*, **41**:2 (2005), 268–273; English transl.: Glyzin D. S., Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “The Dynamic Renormalization Method for Finding the Maximum Lyapunov Exponent of a Chaotic Attractor”, *Differ. Equ.*, **41**:2 (2005), 284–289.
- [8] Смирнов Л. В., *Вывод уравнений динамики упругих систем*, Учебное пособие, ННГУ, Н. Новгород, 1997, 15 с.; [Smirnov L.V., *Vyvod uravneniy dinamiki uprugikh sistem*, Uchebnoe posobie, UNN, Nizhniy Novgorod, 1997, 15 pp., (in Russian)].
- [9] Капитанов Д.В., Овчинников В.Ф., Смирнов Л.В., “Динамика упругого продольного нагруженного стержня при потере устойчивости”, *Проблемы прочности и пластичности*, **76**:3 (2014), 205–216; [Kapitanov D.V., Ovchinnikov V.F., Smirnov L.V., “The dynamics of an axially loaded elastic bar after loss of stability”, *Problems of strength and plasticity*, **76**:3 (2014), 205–216, (in Russian)].
- [10] Саранин В.А., “О хаотическом поведении электростатического маятника при параметрическом воздействии”, *Вестник Пермского Университета. Серия: Физика*, **27–28** (2014), 18–23; [Saranin V.A., “About chaotic behaviour of an electrostatic pendulum at parametrical influence”, *Bulletin of Perm University. Series: Physics*, **27–28** (2014), 18–23 (in Russian)].
- [11] Лоханин М.В., Шибалова Ю.В., “Сжатый упругий мостик в качестве элемента энергонезависимой памяти”, *Вестник Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова. Серия Естественные и технические науки*, 2014, № 1, 34–37; [M. V. Lokhanin, Ju. V. Shibalova, “Buckling beam as nonvolatile memory cell”, *Vestnik Yaroslavl'skogo gosudarstvennogo universiteta im. P.G. Demidova. Seriya Yestestvennyye i tekhnicheskiye nauki*, 2014, № 1, 34–37 (in Russian)].

Glyzin S. D., Lokhanin M. V., Sirotin D. M. , "Invariant Characteristics of Forced Oscillations of a Beam with Longitudinal Compression", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:1 (2018), 54–62.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-54-62

Abstract. Oscillations of an elastic beam with longitudinal compression are considered. The beam consists of two steel strips connected on free ends and fixed on opposite ones. Compression is achieved by a strained string. Excitation of oscillations is performed by exposure of alternating magnetic field on a magnet placed on the loose end. The law of motion with a change in the frequency of the harmonic action is registered. As a result of the full-scale experiment a large set of data is obtained. This set contains ordered periodic oscillations as well as disordered oscillations specific to dynamical systems with chaotic behaviour. To study the invariant numerical characteristics of the attractor of the corresponding dynamical system, a correlation integral and a correlation dimensionality as well as β -statentropy are calculated. A large numerical experiment showed that the calculation of β -statentropy is preferable to the calculation of the correlation index. Based on the developed algorithms the dependence of β -statentropy on the frequency of the external action is constructed. The constructed dependence can serve as an effective tool for measuring the adequacy of the mathematical model of forced oscillations of buckling beam driven oscillations.

Keywords: buckling beam, stability, bifurcations, Duffing's equation, Ueda attractor, chaotic oscillations, entropy, Lyapunov exponents

On the authors:

Sergey D. Glyzin, orcid.org/0000-0002-6403-4061, Doctor, Professor,
P.G. Demidov Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia,
Scientific Center in Chernogolovka RAS, 9 Lesnaya str., Chernogolovka, Moscow region, 142432, Russia
e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

Lokhanin Mikhail Vladimirovich, senior lecturer,
P.G. Demidov Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia,
e-mail: lokhaninmv@mail.ru

Sirotin Dmitry Mikhailovich, senior laboratory assistant researcher,
Scientific Center in Chernogolovka RAS, 9 Lesnaya str., Chernogolovka, Moscow region, 142432, Russia,
e-mail: hhihs@yandex.ru

Acknowledgments:

This work was supported by the Russian Science Foundation (project nos. 14-21-00158).