

©Горюнов В. Е., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-63-70

УДК 517.9

Бифуркация Андронова–Хопфа в одной биофизической модели реакции Белоусова

Горюнов В. Е.

получена 20 ноября 2017

Аннотация. В работе рассматривается задача математического моделирования окислительно-восстановительных колебательных химических реакций, в основе которых лежит широко известный механизм реакции Белоусова. Процесс взаимодействия основных компонентов в такой реакции может быть интерпретирован феноменологически близкой к ней моделью «хищник – жертва». В связи с этим рассматривается параболическая краевая задача, состоящая из трех уравнений вольтерровского типа, которая представляет собой математическую модель этой реакции. Сначала проводится локальное исследование окрестности нетривиального состояния равновесия системы, определяется критический параметр, при котором в окрестности нетривиального решения колебательным образом теряется устойчивость. С помощью стандартных замен строится нормальная форма изучаемой системы, приводится вид ее коэффициентов, по которым определяется качественное поведение модели, кроме того, построено их графическое представление в зависимости от параметров задачи. Полученная нормальная форма позволяет доказать теорему о существовании орбитально асимптотически устойчивого предельного цикла, ответвляющегося от состояния равновесия, и найти его асимптотику. Для выяснения границ применимости найденной асимптотики проводится сравнение амплитуд колебаний одной из компонент периодического решения, полученных на основе асимптотических формул и путем численного интегрирования модельной системы. Наряду с основным случаем бифуркации Андронова–Хопфа рассмотрены различные комбинации значений коэффициентов нормальной формы, получающиеся при изменении параметров исследуемой системы, и изучено соответствующее им поведение решений вблизи рассматриваемого состояния равновесия. Далее рассмотрена задача о диффузионной потере устойчивости полученного на первом этапе пространственно однородного цикла. Найдено критическое значение параметра диффузии, при котором этот цикл распределенной системы теряет устойчивость.

Ключевые слова: реакция Белоусова, параболическая система, диффузия, нормальная форма, асимптотика, бифуркация Андронова–Хопфа

Для цитирования: Горюнов В. Е., "Бифуркация Андронова–Хопфа в одной биофизической модели реакции Белоусова", *Моделирование и анализ информационных систем*, **25**:1 (2018), 63–70.

Об авторе:

Горюнов Владимир Евгеньевич, orcid.org/0000-0002-0512-6986, старший лаборант-исследователь, ИЦЧ РАН, ул. Лесная, д. 9, г. Черноголовка, Московская область, 142432 Россия, e-mail: salkar@ya.ru

Благодарности:

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00158).

Введение

Интересующая нас реакция была открыта Б.П. Белоусовым в 1951 г., но широкую известность она получила значительно позже — в сокращенном виде результаты исследований колебательной реакции были опубликованы через 8 лет в ведомственном сборнике, выходявшем небольшим тиражом (см. [1]), а подробная статья на эту тему вышла лишь спустя 30 лет (см. [2]). Экспериментальный анализ данной реакции и первая соответствующая математическая модель были опубликованы в работах А.М. Жаботинского (см. [3]).

Мы изучаем достаточно упрощенную математическую модель с точки зрения состава компонентов реакции. Связь между рассматриваемыми нами веществами, вступающими в реакцию Белоусова, а именно: бромистой кислотой HBrO_2 , церием Ce^{4+} и бромидом Br^- (см. [3]), — наглядно можно описать следующей схемой (см. рис. 1), где знак “+” означает, что наличие одного вещества способствует появлению другого, а знак “−” свидетельствует об угнетении одного вещества другим. Исходя из феноменологической близости получившейся схемы взаимодействия веществ к задаче «хищник – жертва», в [4] для описания этой реакции была предложена система дифференциальных уравнений, а в [5] система была модифицирована для более точного моделирования протекающих химических процессов.

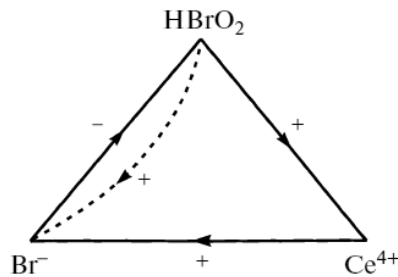


Рис. 1. Условная схема взаимодействия веществ в моделируемой реакции
 Fig. 1. The nominal scheme of substances interaction in the modeling reaction

1. Постановка задачи

Рассматривается краевая задача следующего вида:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= D_1 \Delta x + r_1(1 + a(1 - z) - x)x, & \frac{\partial x}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} &= 0, \\
 \dot{y} &= D_2 \Delta y + r_2(x - y)y, & \frac{\partial y}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} &= 0, \\
 \dot{z} &= D_3 \Delta z + r_3(\alpha x + (1 - \alpha)y - z)z, & \frac{\partial z}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} &= 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где функции $x(t, s), y(t, s), z(t, s)$ отвечают за плотности концентраций $\text{HBrO}_2, \text{Ce}^{4+}$ и Br^- соответственно, $s \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, t > 0$; Δ — оператор Лапласа; Ω — ограниченная плоская область с гладкой границей $\partial \Omega$ и мерой, равной единице, ν — направление

внешней нормали к $\partial\Omega$; параметры $r_1, r_2, r_3, a, D_1, D_2, D_3$ положительны; $\alpha \in (0, 1)$; $(D_1, D_2, D_3) = d(D_1^0, D_2^0, D_3^0)$, $d > 0$.

Наша задача состоит в нахождении условия потери устойчивости предельного цикла в окрестности нетривиального состояния равновесия системы (1) при значении параметра a , близком к критическому a_{cr} , и изменении параметров диффузии. Для этого мы должны предварительно построить асимптотику этого цикла. Отметим, что в [5] для случая $a \gg 1$ соответствующий цикл был исследован с помощью метода большого параметра.

Введем для дальнейшего анализа вспомогательные обозначения: $r = r_1 + r_2 + r_3$, $p = r_1 r_2 r_3$, $q = r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3$. Локальный анализ задачи (1) будет выполняться вблизи состояния равновесия $(1, 1, 1)$, поскольку при

$$a > a_{cr} = (qr - p)/(r_1 r_3 (r_2 - \alpha r)) \quad (2)$$

система без диффузионных слагаемых теряет устойчивость колебательным образом.

2. Локальный анализ окрестности состояния равновесия $(1, 1, 1)$ при a , близком к критическому

Уточним постановку задачи для данного случая. Рассмотрим задачу для пространственно однородного решения системы (1), в которой будем считать, что $a = a_{cr} + \varepsilon$, где ε — положительный малый параметр, $a_{cr} > 0$ определяется формулой (2), и при этом значении состояние равновесия $(1, 1, 1)$ колебательным образом теряет устойчивость. Для этого сделаем замены: $x = u + 1$, $y = v + 1$, $z = w + 1$. Получившаяся система имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= r_1(u + 1)(-u - (a_{cr} + \varepsilon)w), \\ \dot{v} &= r_2(v + 1)(u - v), \\ \dot{w} &= r_3(w + 1)(\alpha u + (1 - \alpha)v - w). \end{aligned} \quad (3)$$

Выполнив в (3) стандартную замену метода нормальных форм (см., например, [6]), решение будем искать в виде

$$(u, v, w)^T = \sqrt{\varepsilon}(\xi(\tau)e^{i\omega\tau}h + \text{к.с.}) + \varepsilon U_1(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} U_2(t, \tau) + \dots, \quad (4)$$

где под к.с. подразумевается комплексно сопряженное к данному в тех же скобках выражению; $\tau = \varepsilon t$ — медленное время; $U_j(t, \tau)$ ($j \geq 1$) — тригонометрические полиномы по t ; $h = (h_1, h_2, h_3)^T$ — собственный вектор матрицы линеаризованной системы (3), соответствующий собственному числу $i\omega$, $\omega = \sqrt{q + r_1 r_3 a \alpha}$; медленно меняющаяся комплексная амплитуда $\xi(\tau)$ подлежит определению.

После приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$ на третьем шаге из условия разрешимости задачи для U_2 в классе тригонометрических полиномов приходим к уравнению на $\xi(\tau)$:

$$\xi' = (\varphi_0 + i\psi_0)\xi + (d_0 + ic_0)|\xi|^2\xi,$$

у которого имеется автомодельное решение вида $\xi = \rho e^{i\varphi}$, где $\rho(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ удовлетворяют следующим уравнениям: $\rho' = \varphi_0 \rho + d_0 \rho^3$, $\varphi' = \psi_0 + c_0 \rho^2$. Здесь ρ определяет амплитуду, а φ — поправку к частоте колебаний. Параметры φ_0 , ψ_0 и d_0 имеют вид:

$$\varphi_0 = r_1 r_3 (r_2 - \alpha r)^2 / (2(r_2(r^2 + q) - \alpha(r^3 + p))),$$

$$\psi_0 = p(r_2 r - \alpha(r^2 - q + \alpha r_1 r_3)) / (2\sqrt{r_2(q - \alpha r_1 r_3) / (r_2 - \alpha r)}(r_2(r^2 + q) - \alpha(r^3 + 4p))),$$

$$d_0 = r_2^3 r (1 - \alpha)^2 (r_1 + r_2)^4 (r_1 + r_3)^2 (r_2 + r_3)^3 ((1 + \alpha)r_1 + (\alpha - 3)r_2 + (3\alpha - 1)r_3) \cdot \\ \cdot (q - r_1 r_3 \alpha)^2 / (2r_3^2 (r_2 - \alpha r)^3 (r_2(r^2 + q) - \alpha(r^3 + p))(r_2(r^2 + 4q) - \alpha(r^3 + 4p))).$$

В дальнейшем нас будет интересовать только амплитуда колебательного режима, поэтому c_0 в силу громоздкости здесь приводить не будем.

Для случая $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$ зависимость φ_0 и d_0 от параметра α представлена на рис. 2. Здесь сплошная линия обозначает зону положительных значений, а пунктирная — зону отрицательных значений.

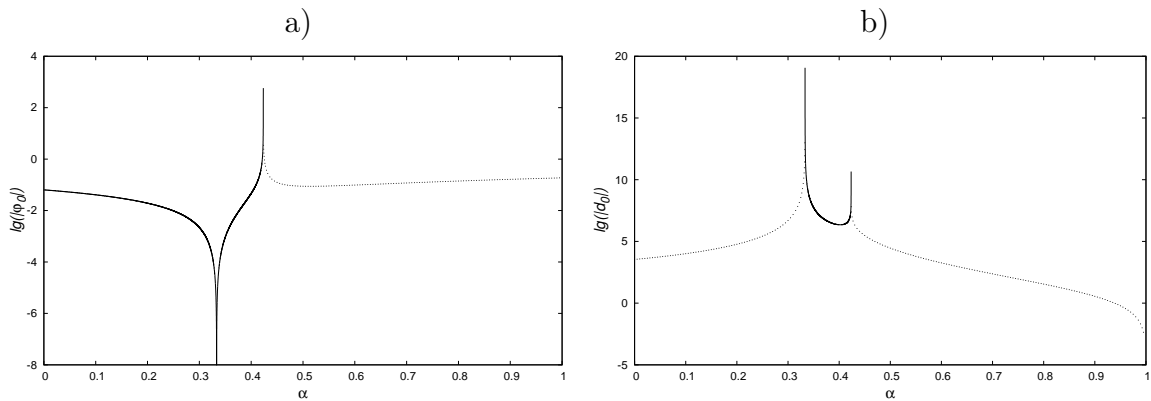


Рис. 2. Зависимость φ_0 (а) и d_0 (б) от α при $r_1 = 1.0$, $r_2 = 2.0$, $r_3 = 3.0$
 Fig. 2. Dependence of φ_0 (а) and d_0 (б) on α at $r_1 = 1.0$, $r_2 = 2.0$, $r_3 = 3.0$

Основываясь на формулах для φ_0 и d_0 и учитывая требование положительности параметра $a > a_{cr}$, мы можем выделить следующие множители, которые определяют знаки этих величин: $r_2(r^2 + q) - \alpha(r^3 + p)$, $r_2(r^2 + 4q) - \alpha(r^3 + 4p)$, $\alpha(r_1 + r_2 + 3r_3) + r_1 - 3r_2 - r_3$. Учитывая, что при $\varphi_0 > 0$ и $d_0 < 0$ реализуется стандартная бифуркация Андронова–Хопфа (см. [6]), сформулируем основное утверждение данного пункта.

Теорема 1. Пусть выполнены неравенства:

$$r_1, r_2, r_3 > 0, \quad r_2 - \alpha r > 0, \quad r_2(r^2 + q) - \alpha(r^3 + p) > 0, \\ r_2(r^2 + 4q) - \alpha(r^3 + 4p) > 0, \quad \alpha(r_1 + r_2 + 3r_3) + r_1 - 3r_2 - r_3 < 0, \quad (5)$$

а также $a = a_{cr} + \varepsilon$, где a_{cr} определяется формулой (2). Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ в некоторой достаточно малой окрестности нуля существует ответвляющийся от него орбитально асимптотически устойчивый предельный цикл системы (3) с асимптотикой (4).

В случае, если $\varphi_0 > 0$ и $d_0 > 0$, нулевое состояние равновесия системы (3) жестко теряет устойчивость, к нему при $a < a_{cr}$ приближается неустойчивый цикл, который

при $a = a_{cr}$ сливается с данным состоянием равновесия и отбирает у него устойчивость. Такая бифуркация реализуется у системы (3), если выполнены следующие неравенства:

$$\begin{aligned} r_1, r_2, r_3 > 0, \quad r_2 - \alpha r > 0, \quad r_2(r^2 + q) - \alpha(r^3 + p) > 0, \\ r_2(r^2 + 4q) - \alpha(r^3 + 4p) > 0, \quad \alpha(r_1 + r_2 + 3r_3) + r_1 - 3r_2 - r_3 > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Множества, определяемые условиями (5) или (6), непусты, поскольку реализуются, например, при $r_1 = 1.0, r_2 = 1.0, r_3 = 2.0, \alpha = 0.2$ и $r_1 = 4.0, r_2 = 1.0, r_3 = 1.0, \alpha = 0.1$ соответственно.

Отметим, что величина амплитуды колебаний предельного цикла системы определяется значением $\sqrt{-\varepsilon\varphi_0/d_0}$. С целью выяснения границ применимости теоремы 1 был проведен расчет амплитуды колебаний для фиксированного набора параметров по аналитическому результату и в численном эксперименте. Через A_{num} обозначим амплитуду, полученную численным путем. Исходя из таблицы 1 нетрудно заметить, что асимптотические формулы сохраняют точность в широких пределах изменения параметра ε .

Таблица 1. Значения амплитуд колебаний цикла при $r_1 = 1.0, r_2 = 2.0, r_3 = 3.0$
Table 1. Values of the cycle oscillation amplitudes at $r_1 = 1.0, r_2 = 2.0, r_3 = 3.0$

α	ε	$\sqrt{-\varepsilon\varphi_0/d_0}$	A_{num}
0.1	0.01	0.22090794	0.22116161
0.1	0.1	0.69869911	0.69937442
0.3	0.01	0.08908736	0.08855718
0.3	0.1	0.28086436	0.28004238

3. Диффузионная потеря устойчивости пространственно однородного цикла краевой задачи (1)

Дальнейшие рассуждения будем проводить в случае $\varphi_0 > 0$ и $d_0 < 0$, т.е. если выполнены неравенства (5). Предположим, что

$$D_1 = \varepsilon d D_1^0, \quad D_2 = \varepsilon d D_2^0, \quad D_3 = \varepsilon d D_3^0. \quad (7)$$

Тогда методами локального анализа можно найти значение d , при котором построенный нами пространственно однородный цикл с асимптотикой (4) теряет устойчивость. Для определения такого критического значения d_* и природы пространственно неоднородного цикла, ответвляющегося от однородного, мы будем действовать по аналогии с выкладками статей [7–10].

Выполнив в краевой задаче (1) с условием (7) замену

$$(u(t, s), v(t, s), w(t, s))^T = \sqrt{\varepsilon}(he^{i\omega t}\xi(\tau, s) + \text{к.с.}) + \varepsilon U_1(t, \tau, s) + \varepsilon^{3/2}U_2(t, \tau, s) + \dots, \quad (8)$$

приходим к квазинормальной форме вида:

$$\xi' = d(Dh, g)\Delta\xi + (\varphi_0 + i\psi_0)\xi + (d_0 + ic_0)|\xi|^2\xi, \quad \frac{\partial\xi}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (9)$$

где $\xi \equiv \xi(\tau, s)$, вектор g такой, что $(h, g) = 1$, а матрица D имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} D_1^0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2^0 & 0 \\ 0 & 0 & D_3^0 \end{pmatrix}.$$

Сделаем в (9) следующие замены: $\xi = \eta\sqrt{-\varphi_0/d_0}\exp(i\psi_0\tau)$, $\tau^* = \varphi_0\tau$ и проведя переобозначение $\tau = \tau^*$, получим уравнение Гинзбурга–Ландау вида

$$\eta' = \mu(1 - ic_1)\Delta\eta + \eta - (1 + ic_2)|\eta|^2\eta, \quad \frac{\partial\eta}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (10)$$

где $\mu = d\operatorname{Re}(Dh, g)/\varphi_0$, $c_1 = -\operatorname{Im}(Dh, g)/\operatorname{Re}(Dh, g)$, $c_2 = c_0/d_0$.

Относительно уравнения (10) известно, что его грубым режимам соответствуют, при достаточно малых ε , грубые режимы исходной системы (1) с условием (7) той же устойчивости [11].

Уравнение (10) имеет однородный цикл

$$\eta = \exp(-ic_2\tau + i\gamma), \quad \gamma = \operatorname{const}. \quad (11)$$

В точечной модели цикл (11) является орбитально асимптотически устойчивым. Для исследования устойчивости этого цикла в случае распределенной модели дополним (10) комплексно сопряженной краевой задачей

$$\bar{\eta}' = \mu(1 + ic_1)\Delta\bar{\eta} + \bar{\eta} - (1 - ic_2)|\bar{\eta}|^2\bar{\eta}, \quad \frac{\partial\bar{\eta}}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (12)$$

После этого выполним замены

$$\eta = (1 + h_1)\exp(-ic_2\tau), \quad \bar{\eta} = (1 + h_2)\exp(ic_2\tau), \quad (13)$$

где $h_1 \equiv h_1(\tau, s)$, $h_2 \equiv h_2(\tau, s)$, и отбросим нелинейные слагаемые, в результате чего приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} h_1' &= \mu(1 - ic_1)\Delta h_1 - (1 + ic_2)(h_1 + h_2), & \frac{\partial h_1}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} &= 0, \\ h_2' &= \mu(1 + ic_1)\Delta h_2 - (1 - ic_2)(h_1 + h_2), & \frac{\partial h_2}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

к которой, в свою очередь, в случае, когда область Ω — квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$, применяем метод Фурье по системе функций $\cos(k\pi s) \cdot \cos(m\pi s)$, $k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. В результате убеждаемся, что за устойчивость однородного цикла (11) по отношению к пространственно неоднородным возмущениям начальных условий отвечает расположение спектра семейства матриц

$$- \begin{pmatrix} 1 + ic_2 & 1 + ic_2 \\ 1 - ic_2 & 1 - ic_2 \end{pmatrix} - (k^2 + m^2)\pi^2\mu \begin{pmatrix} 1 - ic_1 & 0 \\ 0 & 1 + ic_1 \end{pmatrix}, \quad k, m = 0, 1, 2, \dots, \quad (15)$$

причем k и t не обращаются в нуль одновременно. Анализ матриц (15) приводит к выводу о том, что цикл (11) краевой задачи (10) устойчив (неустойчив) при $d - d_* > 0$ (< 0), где

$$d_* = \frac{2\varphi_0(c_1c_2 - 1)}{\pi^2(1 + c_1^2) \operatorname{Re}(Dh, g)}. \quad (16)$$

С учетом положительности параметра φ_0 из (16) следует, что для появления диффузионной неустойчивости цикла необходимо выполнение условия

$$(c_1c_2 - 1) / \operatorname{Re}(Dh, g) > 0. \quad (17)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (7) и (17), тогда при всех достаточно малых $\varepsilon = a - a_{cr}$ краевая задача (1) имеет пространственно однородный цикл, асимптотика которого задается формулой (4), причем этот цикл экспоненциально орбитально устойчив при $d > d_*$ и неустойчив при $d < d_*$, где d_* определяется формулой (16).

При прохождении параметра d через критическое значение $d = d_*$ пространственно однородный цикл дивергентным образом теряет устойчивость, и от него ответвляются четыре симметричных пространственно неоднородных цикла. Численный анализ, которому планируется посвятить отдельную публикацию, показал, что динамические свойства этих циклов (среднее значение по пространству, минимумы по пространству, минимумы среднего по пространству) остаются практически неизменными по сравнению с пространственно однородным циклом, в то же время при достаточно малом коэффициенте диффузии d задача имеет устойчивые режимы сложной структуры с физически более осмысленными свойствами (см. для сравнения [10]).

Список литературы / References

- [1] Белоусов Б. П., “Периодически действующая реакция и ее механизм”, *Сборник рефератов по радиационной медицине за 1958 г.*, 1959, 145–147; [Belousov B. P., “Periodicheski deystvuyushchaya reaktsiya i ee mekhanizm”, *Sbornik referatov po radiatsionnoy meditsine za 1958*, 1959, 145–147, (in Russian).]
- [2] Белоусов Б. П., “Периодически действующая реакция и ее механизм”, *Автоволновые процессы в системах с диффузией*, Горький, 1981, 176–186; [Belousov B. P., “A periodic reaction and its mechanism”, *Autowave Processes in Systems with Diffusion*, Gorkiy, 1981, 176–186, (in Russian).]
- [3] Жаботинский А. М., *Концентрационные автоколебания*, Наука, М., 1974, 180 с.; [Zhabotinskiy A. M., *Kontsentratsionnye avtokolebaniya*, Nauka, Moskva, 1974, 180 pp., (in Russian).]
- [4] Колесов Ю. С., *Проблема адекватности экологических уравнений*, Деп. в ВИНТИ № 1901-85, 1985; [Kolesov Yu. S., *Problema adekvatnosti ekologicheskikh uravneniy*, Dep. VINITI 1901-85, 1985, (in Russian).]
- [5] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные колебания и диффузионный хаос в реакции Белоусова”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **51**:8 (2011), 1400–1418; English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Relaxation oscillations and diffusion chaos in the Belousov reaction”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **51**:8 (2011), 1307–1324.

- [6] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., *Локальные методы анализа динамических систем*, ЯргУ, Ярославль, 2006, 92 с.; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., *Lokalne metody analiza dinamicheskikh sistem*, Yaroslavl State University, Yaroslavl, 2006., 92 pp., (in Russian).]
- [7] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Конечномерные модели диффузионного хаоса”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:5 (2010), 860–875; English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Finite-dimensional models of diffusion chaos”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **50**:5 (2010), 816–830.
- [8] Glyzin S.D., “Dimensional characteristics of diffusion chaos”, *Automatic Control and Computer Sciences*, **47**:7 (2013), 452–469.
- [9] Glyzin S. D., Shokin P. L., “Diffusion chaos in the reaction–diffusion boundary problem in the dumbbell domain”, *Automatic Control and Computer Sciences*, **50**:7 (2016), 625–635.
- [10] Glyzin S., Goryunov V., Kolesov A., “Spatially inhomogeneous modes of logistic differential equation with delay and small diffusion in a flat area”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **38**:5 (2017), 898–905.
- [11] Васильева А. Б., Кащенко С. А., Колесов Ю. С., Розов Н. Х., “Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией”, *Матем. сб.*, **130(172)**:4(8) (1986), 488–499; English transl.: Vasil’eva A. B., Kashchenko S. A., Kolesov Yu. S., Rozov N. Kh., “Bifurcation of self-oscillations of nonlinear parabolic equations with small diffusion”, *Math. USSR-Sb.*, **58**:2 (1987), 491–503.

Goryunov V. E., "The Andronov–Hopf Bifurcation in a Biophysical Model of the Belousov Reaction", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:1 (2018), 63–70.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-63-70

Abstract. We consider the problem of mathematical modeling of oxidation-reduction oscillatory chemical reactions based on the Belousov reaction mechanism. The process of the main components interaction in such a reaction can be interpreted by a “predator – prey” model phenomenologically similar to it. Thereby, we consider a parabolic boundary value problem consisting of three Volterra-type equations, which is a mathematical model of this reaction. We carry out a local study of the neighborhood of the system non-trivial equilibrium state, define a critical parameter, at which the stability is lost in this neighborhood in an oscillatory manner. Using standard replacements, we construct the normal form of the considering system and the form of its coefficients defining the qualitative behaviour of the model and show the graphical representation of these coefficients depending on the main system parameters. On the basis of it, we prove a theorem on the existence of an orbitally asymptotically stable limit cycle, which bifurcates from the equilibrium state, and find its asymptotics. To identify the limits of found asymptotics applicability, we compare the oscillation amplitudes of one periodic solution component obtained on the basis of asymptotic formulas and by numerical integration of the model system. Along with the main case of Andronov–Hopf bifurcation, we consider various combinations of normal form coefficients obtained by changing the parameters of the studied system, and the corresponding to them solutions behaviour near the equilibrium state. In the second part of the paper, we consider the problem of the diffusion loss of stability of a spatially homogeneous cycle obtained in the first part. We find a critical value of diffusion parameter, at which this cycle of distributed system loses the stability.

Keywords: Belousov reaction, parabolic system, diffusion, normal form, asymptotics, Andronov–Hopf bifurcation

On the author:

Vladimir E. Goryunov, orcid.org/0000-0002-0512-6986,
 Scientific Center in Chernogolovka RAS, 9 Lesnaya str., Chernogolovka, Moscow region, 142432, Russia,
 e-mail: salkar@ya.ru

Acknowledgments:

This work is supported by the Russian Science Foundation (project № 14-21-00158).