Моделирование и анализ информационных систем. Т. 25, № 1 (2018), с. 71–82
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 25, No 1 (2018), pp. 71–82

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-71-82

УДК 517.929

Особенности локальной динамики модели оптико-электронного осциллятора с запаздыванием

Григорьева Е. В., Кащенко С. А.[1], Глазков Д. В.

получена 15 ноября 2017

Аннотация. В работе рассматривается модель оптико-электронного осциллятора, описываемая системой дифференциальных уравнений с запаздыванием. Существенной особенностью данной модели является наличие малого параметра перед одной из производных, что позволяет сделать вывод о действии процессов со скоростями разных порядков. Анализируется локальная динамика сингулярно возмущенной системы в окрестности нулевого состояния равновесия. Характеристическое уравнение линеаризованной задачи при значениях параметров, близких к критическим, имеет асимптотически большое число корней с близкой к нулю вещественной частью. Для изучения происходящих в системе бифуркаций используется метод построения специальных нормализованных уравнений для медленных амплитуд, которые описывают поведение близких к нулю решений исходной задачи. Важной особенностью этих уравнений является то, что от малого параметра они не зависят. Структура корней характеристического уравнения и порядок надкритичности определяют вид нормальной формы, которая может быть представлена уравнением в частных производных. В роли «пространственной» переменной выступает «быстрое» время, для которого выполняются условия периодичности. Отмечается высокая чувствительность динамических свойств нормализованных уравнений к изменению малого параметра, что является признаком возможного неограниченного процесса прямых и обратных бифуркаций. Также некоторые построенные уравнения обладают свойством мультистабильности.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, локальная динамика, малый параметр, асимптотика, бифуркация, нормальная форма, краевая задача

Для цитирования: Григорьева Е. В., Кащенко С. А., Глазков Д. В., "Особенности локальной динамики модели оптико-электронного осциллятора с запаздыванием", *Моделирование и анализ информационных систем*, **25**:1 (2018), 71–82.

Об авторах:
Григорьева Елена Викторовна, д-р физ.-мат. наук, профессор,
Белорусский государственный экономический университет,
пр. Партизанский, 26, г. Минск, 220070 Беларусь, e-mail: grigorieva@tut.by

Кащенко Сергей Александрович, orcid.org/0000-0002-8777-4302, д-р физ.-мат. наук, профессор,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

Глазков Дмитрий Владимирович, orcid.org/0000-0003-0511-5088, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: d.glazkov@uniyar.ac.ru

Благодарности:
[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ, проект № 1.10160.2017/5.1.

1. Введение

Многочисленные исследования по динамике дифференциально-разностных систем были выполнены на основе уравнения Икеда [1], ставшего парадигмой для изучения нелинейных явлений в оптических устройствах с запаздывающей обратной связью. В последнее время активно рассматриваются модификации этого уравнения, содержащие члены с высшими производными и моделирующие акусто-оптические и электро-оптические системы [2, 3]. Во многих случаях экспериментально и численно наблюдались би- и мультистабильность стационарных и периодических состояний [4,5], динамический хаос [1,6], быстрые хаотические осцилляции на фоне медленных колебаний [7,8]. Указанные нелинейные явления изучались численно и с привлечением теории релаксационных колебаний в системах с быстрыми и медленными переменными. Теоретически рассматривались бифуркации, приводящие к быстрым и медленным колебаниям [6].

В настоящей работе мы анализируем локальную динамику электро-оптического осциллятора в окрестности состояния равновесия на основе метода построения нормализованных уравнений для медленных амплитуд неустойчивых мод [9]. Полученные уравнения могут служить обоснованием для пространственно-временного представления (ПВП) динамики дифференциально-разностных систем. Первоначально такое представление обсуждалось на основе интуитивной интерпретации запаздывания как размера одной *квази*пространственной переменной [10]. Метод ПВП использовался для изучения динамики лазерных систем с несколькими запаздываниями разного масштаба [11], поляризационной динамики VECSEL-лазеров [12], неустойчивости Бенджамина Фейра [13] и других явлений в системах различной природы. В работе [14] ПВП было обосновано на основе локального анализа модели лазерной системы с большим запаздыванием в цепи оптоэлектронной обратной связи. ПВП динамики с несколькими пространственными переменными было получено для модели лазера с оптической обратной связью и большим коэффициентом управления [15].

В настоящей работе представлено последовательное обоснование ПВП динамики электрооптического осциллятора. Особенностью системы является наличие малого параметра ε при производной, что отражает действие процессов с различающимися на порядки скоростями. Мы покажем, что при малом (порядка ε^2) превышении бифуркационного значения уровня обратной связи характеристическое уравнение имеет асимптотически большое число корней с близкой к нулю действительной частью. Структура корней такова, что результирующая нормальная форма является уравнением в частных производных для функции, зависящей от «медленного» и «быстрого» времени, причем по быстрой переменной выполняются условия периодичности. Поэтому быструю переменную можно рассматривать как аналог пространственной переменной с периодическими граничными условиями. Будет показано также, что нормальная форма изменяется, если рассматриваются решения при надкритичности другого порядка малости.

2. Модель

Рассматривается модель оптико-электронного осциллятора, предложенная в [6, 7]:

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{dx}{d\zeta} = y - x + \beta \big[\cos^2(x(\zeta-\nu)+\phi) - \cos^2\phi \big], \\ \dfrac{dy}{d\zeta} = -x. \end{cases} \tag{1}$$

В данном случае используются обозначения из работы [7], в которой параметры ε, ν считаются малыми положительными.

В качестве фазового пространства фиксируем $C^1[-1,0] \times C$. Система (1) после замен

$$\zeta = \nu t, \qquad y = \nu z$$

преобразуется в уравнение второго порядка

$$\varepsilon\nu^{-1}\ddot{z} + \dot{z} + \nu z + \beta \big[\cos^2(\phi - \dot{z}(t-1)) - \cos^2\phi \big] = 0. \tag{2}$$

Исследуем поведение всех решений уравнения (1) с начальными условиями из некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия. В связи с этим уравнение (2) удобно записать в виде

$$\varepsilon\nu^{-1}\ddot{z} + \dot{z} + \nu z = b_1\dot{z}(t-1) + b_2\dot{z}^2(t-1) + b_3\dot{z}^3(t-1) + \ldots, \tag{3}$$

где

$$b_1 = -\beta\sin(2\phi), \qquad b_2 = -\beta\cos(2\phi), \qquad b_3 = (2/3)\,\beta\sin(2\phi).$$

При локальном анализе уравнения (3) важную роль играет поведение решений линейного уравнения

$$\varepsilon\nu^{-1}\ddot{z} + \dot{z} + \nu z = b_1\dot{z}(t-1). \tag{4}$$

Устойчивость нулевого решения (4) определяется корнями характеристического уравнения

$$\varepsilon\nu^{-1}\lambda^2 + \lambda + \nu = b_1\lambda e^{-\lambda}. \tag{5}$$

Основное предположение, открывающее путь к применению асимптотических методов анализа поведения решений (3), заключается в том, что параметр ε предполагается достаточно малым

$$0 < \varepsilon \ll 1. \tag{6}$$

В [6, 7] приведен диапазон изменения этого параметра, откуда следует, что $\varepsilon \in [10^{-6}, 10^{-3}]$, в частности, в [7] приводятся иллюстрации, соответствующие значениям $\varepsilon = 4\times10^{-4}$, $\nu = 2\times10^{-2}$, а также $\varepsilon = 6.47\times10^{-6}$, $\nu = 3.82\times10^{-4}$. Поэтому условие (6) отвечает существу дела.

Приведем два простых утверждения о поведении корней уравнения (5).

Пусть $|b_1| < 1$. Тогда при всех достаточно малых ε все корни уравнения (5) имеют отрицательные вещественные части и отделены от нуля при $\varepsilon \to 0$. Тем самым нулевое решение уравнений (4) и (3) устойчиво, и все решения с достаточно малыми начальными условиями стремятся к нулю при $t \to \infty$.

Пусть $|b_1| > 1$. Тогда при всех достаточно малых ε уравнение (5) имеет корень с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \to 0$ вещественной частью. Отсюда следует вывод о нелокальности задачи: в окрестности нулевого состояния равновесия уравнения (3) не может быть аттракторов этого уравнения.

В настоящей работе предполагается, что при малых ε параметр $|b_1|$ близок к 1: для некоторого фиксированного значения b_{10} выполнено равенство

$$b_1 = b_0(1 + \varepsilon^{2\alpha} b_{10}), \qquad 0 < \alpha \le 1, \tag{7}$$

где $b_0 = 1$ или $b_0 = -1$.

В этом случае характеристическое уравнение (5) не имеет корней с положительными и отделенными от нуля при $\varepsilon \to 0$ вещественными частями и имеет бесконечно много корней $\lambda_k(\varepsilon)$ $(k \in Z)$, вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Отсюда вытекает, что при исследовании устойчивости нулевого решения в (3) возникает критический случай бесконечной размерности. Методика исследования таких критических случаев разработана в [9]. Применим ее для изучения решений (3) при условиях (6) и (7).

В следующем разделе рассмотрим случай, когда

$$\alpha = 1, \tag{8}$$

а в разделе 3 предполагаем, что

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1. \tag{9}$$

Сразу отметим, что поведение решений в условиях (8) и (9) существенно отличается.

2. Исследование уравнения (3) при условии (8)

Сначала приведем асимптотические формулы для таких корней $\lambda_k(\varepsilon)$ уравнение (5), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Предварительно введем одно обозначение. Рассмотрим величину $\nu\varepsilon^{-1/2}$ и через $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$ обозначим такое выражение, которое при условии $b_0 = 1$ дополняет эту величину до целого, кратного 2π, а при условии $b_0 = -1$ дополняет ту же величину до целого, нечетно кратного π.

Для $\lambda_k(\varepsilon)$ имеют место асимптотические представления

$$\lambda_k(\varepsilon) = i\nu/\sqrt{\varepsilon} + i(\theta + \omega_k) + \varepsilon\lambda_{k1} + \varepsilon^{3/2}\lambda_{k2} + \varepsilon^2\lambda_{k3} + \ldots, \tag{10}$$

в которых $\omega_k = 2\pi k$,

$$\lambda_{k1} = -i\frac{2(\theta + \omega_k)}{\nu}, \qquad \lambda_{k2} = i\frac{(\theta + \omega_k)^2}{\nu^2},$$

$$\lambda_{k3} = -\frac{2(\theta + \omega_k)^2}{\nu^2} - 4i(\theta + \omega_k) - i\frac{(\theta + \omega_k)^3}{\nu^3} + b_{10}.$$

Решения линейного уравнения (4), отвечающие корням $\lambda_k(\varepsilon)$, можно записать в виде формального ряда

$$u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k \exp(\lambda_k(\varepsilon)t) + c.c., \tag{11}$$

где через c.c. обозначено выражение, комплексно сопряженное предыдущему слагаемому. Преобразуем правую часть равенства (11). Для этого положим

$$\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k \exp(i2\pi kt). \tag{12}$$

Тогда из (10), (11) получаем, что

$$u = \exp(i[\nu\varepsilon^{-1/2} + \theta - 2\varepsilon\nu^{-1} + \varepsilon^{3/2}\theta\nu^{-2} + O(\varepsilon^{5/2})]t)\xi(r) + c.c., \tag{13}$$

а для аргумента r имеем равенство

$$r = [1 - 2\varepsilon\nu^{-1} + 2\varepsilon^{3/2}\theta\nu^{-2} + O(\varepsilon^{5/2})]t. \tag{14}$$

Отметим, что коэффициенты ξ_k в формуле (12) имеют смысл амплитуд перед соответствующими гармониками.

Согласно методике из [9], предполагаем, что при исследовании поведения нелинейного уравнения (3) базовой остается формула (11), с тем лишь отличием, что амплитуды являются медленно меняющимися функциями t.

Положим $\tau = \varepsilon^{3/2}t$ и будем предполагать, что $\xi_k = \xi_k(\tau)$.

Решения уравнения (3) согласно (11) ищем в виде формального ряда

$$u = \varepsilon^{5/4}[\xi(\tau, r)\exp(i\Omega(\varepsilon)t) + c.c.] + \varepsilon^{3/2}u_2(t, \tau, r) + \varepsilon^{9/4}u_3(t, \tau, r) + \dots \tag{15}$$

Здесь $\Omega(\varepsilon)=\nu\varepsilon^{-1/2}+\theta-2\varepsilon\nu^{-1}+\varepsilon^{3/2}\theta\nu^{-2}$, $\xi(\tau, r)$ – подлежащая определению комплексная «амплитуда», а функции $u_j(t, \tau, r)$ периодичны по первому с периодом $2\pi/\Omega$ и третьему с периодом 1 аргументам. Подставим (15) в (3) и будем в получившемся формальном тождестве приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε. Тогда на втором шаге, собирая коэффициенты при ε^2, для функции

$$u_2(t, \tau, r) = u_{20}(\tau, r) + u_{21}(\tau, r)\exp(2i\Omega(\varepsilon)t) + \overline{u}_{20}(\tau, r)\exp(-2i\Omega(\varepsilon)t) \tag{16}$$

получим соотношения

$$u_{20}(\tau, r) = \nu b_2|\xi(\tau, r)|^2, \qquad u_{21}(\tau, r) = \frac{1}{3}\nu b_2\xi^2(\tau, r). \tag{17}$$

На следующем шаге, собирая коэффициенты при ε^3, получим уравнение относительно u_3. Из условия его разрешимости в указанном классе функций получаем соотношение

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \alpha_2\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2} + \alpha_1\frac{\partial\xi}{\partial r} + \alpha_0\xi + d|\xi|^2\xi, \tag{18}$$

которое удовлетворяет периодическим краевым условиям

$$\xi(\tau, r+1) = \xi(\tau, r). \tag{19}$$

Здесь

$$\alpha_2 = -i/\nu^2, \qquad \alpha_1 = 2\theta/\nu^2, \qquad \alpha_0 = i\theta^2/\nu^2, \qquad d = \nu(3b_3 - 4ib_2^2/3).$$

Из приведенных построений вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Фиксируем произвольно значение $\theta_0 \in [0, 2\pi)$, и пусть последовательность $\varepsilon_n \to 0$ определяется из условия $\theta(\varepsilon) = \theta_0$. Пусть краевая задача (18), (19) имеет ограниченное при $\tau \to \infty$, $r \in [0,1]$ решение $\xi_0(\tau, r)$. Тогда при всех достаточно больших n уравнение (3) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^{5/2})$ решение, для которого*

$$u_0(\tau, \varepsilon_n) = \varepsilon_n^{5/4}[\xi_0(\varepsilon_n t, r)\exp(i\Omega(\varepsilon_n)t) + c.c.] + \varepsilon_n^{3/2} u_2(t, \varepsilon_n t, r).$$

Здесь выражение для r – формула (14) при $\varepsilon = \varepsilon_n$, а для u_2 – формулы (16), (17) при $\varepsilon = \varepsilon_n$, $\xi = \xi_0$.

В силу того, что $\mathrm{Re}\alpha_2 = \mathrm{Im}\alpha_1 = \mathrm{Re}\alpha_0 = 0$, утверждение теоремы 1 мало информативно: в краевой задаче реализуется (в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия) критический случай бесконечной размерности. Поэтому для получения более содержательного результата необходимо учесть следующие по порядку ε слагаемые в линейной части:

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \alpha_2\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2} + \alpha_1\frac{\partial\xi}{\partial r} + \alpha_0\xi + \sqrt{\varepsilon}\left[\beta_3\frac{\partial^3\xi}{\partial r^3} + \beta_2\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2} + \beta_1\frac{\partial\xi}{\partial r} + \beta_0\xi\right] + d|\xi|^2\xi, \qquad (20)$$

$$\beta_3 = 1/\nu^3, \qquad \beta_2 = (2\nu + 3i\theta)/\nu^3,$$
$$\beta_1 = -(4 + 4\nu^{-2} - 3\theta^2\nu^{-3}), \qquad \beta_0 = b_{10} - 2\theta^2\nu^{-2} - i4\theta + i\theta^3\nu^{-3}.$$

Для изучения динамических свойств краевой задачи (20), (19) воспользуемся той же методикой. Сначала упростим уравнение (20), произведя замены

$$\rho = r + \alpha_1\tau, \qquad \eta = \xi\exp(\alpha_0\tau).$$

В итоге приходим к уравнению

$$\frac{\partial\eta}{\partial\tau} = \alpha_2\frac{\partial^2\eta}{\partial\rho^2} + \sqrt{\varepsilon}[\beta_3\frac{\partial^3\eta}{\partial\rho^3} + \beta_2\frac{\partial^2\eta}{\partial\rho^2} + \beta_1\frac{\partial\eta}{\partial\rho} + \beta_0\eta] + d|\eta|^2\eta, \qquad (21)$$

которое удовлетворяет условию

$$\eta(\tau, \rho + 1) = \eta(\tau, \rho). \qquad (22)$$

Рассмотрим линейную краевую задачу

$$\frac{\partial\eta}{\partial\tau} = \alpha_2\frac{\partial^2\eta}{\partial\rho^2}. \qquad (23)$$

Решения (23), (22) представим в виде формального ряда из периодических по t функций

$$\eta(\tau, \rho, \varepsilon) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\eta_k\exp(i2\pi k\rho - i\alpha_2(2\pi k)^2\tau).$$

Поэтому решение краевой задачи (21), (22) можно искать в виде

$$\eta(\tau, s, \rho) = \sqrt{\varepsilon} z_1(\tau, s, \rho) + \varepsilon z_2(\tau, s, \rho) + \dots, \tag{24}$$

где $s = \sqrt{\varepsilon}\tau$, зависимость от ρ – 1-периодическая,

$$z_1(\tau, s, \rho) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_{1k}(s) \exp(i2\pi k\rho - i\alpha_2(2\pi k)^2\tau). \tag{25}$$

На этом пути однако можно получить только бесконечную систему ОДУ для нахождения амплитуд $z_{1k}(s)$. Для того, чтобы записать эту бесконечную систему в «компактной» форме, воспользуемся результатами из [9].

Введем в рассмотрение функцию

$$w(s, \rho) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_{1k}(s) \exp(i2\pi k\rho) \tag{26}$$

с теми же коэффициентами $z_{1k}(s)$, что и в (25). В том случае, когда удается определить $w(s, \rho)$, получим все коэффициенты Фурье $z_{1k}(s)$ этой функции, а значит, определим функцию $z_1(\tau, s, \rho)$ согласно (25). Отметим также, что при $\tau = 2\pi m\alpha_0^{-1}$, $m = 0, 1, 2, \dots$ выражения для $z_1(\tau, s, \rho)$ и $w(s, \rho)$ совпадают.

Введем еще несколько обозначений. Пусть

$$\varphi(\rho) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k \exp(i2\pi k\rho).$$

Положим

$$M(\varphi) = \int\limits_0^1 \varphi(\rho) d\rho.$$

Через $N(\varphi)$ обозначим бесконечномерный вектор

$$N(\varphi) = \big(\dots, \varphi_{-2}e^{-i4\pi r}, \varphi_{-1}e^{-i2\pi r}, \varphi_0, \varphi_1 e^{i2\pi r}, \varphi_2 e^{i4\pi r}, \dots\big),$$

произведение таких векторов предполагаем покоординатным, т. е., например,

$$N(\varphi)\overline{N}(\varphi) = \big(\dots, |\varphi_{-2}|^2, |\varphi_{-1}|^2, |\varphi_0|^2, |\varphi_1|^2, |\varphi_2|^2, \dots\big).$$

Функцию $R(\varphi)$ определим по формулам

$$R(\varphi) = \big(N(\varphi), N(\varphi)\overline{N}(\varphi)\big).$$

Наконец, функцию $F(\varphi)$ определим формулой

$$F(\varphi) = \varphi\big(3M(|\varphi|^2) + 2R(\varphi)\big).$$

Рассмотрим краевую задачу для $w(s, \rho)$:

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \beta_3 \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} + \beta_2 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \beta_1 \frac{\partial w}{\partial s} + \beta_0 w + dF(w), \tag{27}$$

$$w(\tau, \rho{+}1) = w(\tau, \rho). \tag{28}$$

Основной результат состоит в том, что краевая задача (27), (28) играет роль нормальной формы для уравнения (3). Для формулировки соответствующего утверждения понадобится еще несколько обозначений. Фиксируем произвольно $\theta_0 \in [0, 2\pi)$. Через ε_n обозначим последовательность

$$\varepsilon_n = \nu^2(2\pi n - \theta_0)^{-2} \qquad n = 2, 3, \ldots; \qquad \varepsilon_n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теорема 2. *Пусть краевая задача (27), (28) при $\theta = \theta_0$ имеет ограниченное при $s{\to}\infty$, $\rho{\in}[0, 1]$ решение $w_0(s, \rho)$ с коэффициентами Фурье w_{0k}, $k{\in}Z$. Тогда уравнение (3) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^{5/2})$ решение $u_0(t, \varepsilon)$, для которого*

$$u_0(t, \varepsilon) = \varepsilon^{7/4}[\exp([i\Omega(\varepsilon) - \varepsilon\alpha_0]t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_{0k}(\varepsilon^{3/2}t) \exp(i2\pi k\rho - \varepsilon i\alpha_2(2\pi k)^2 t) + c.c.],$$

$$\rho = [1 + \varepsilon(\alpha_1 - 2\nu^{-1}) + 2\varepsilon^{3/2}\theta_0]t.$$

3. О динамических свойствах решений уравнения (3) при условии (9)

В этом разделе коротко остановимся на изучении структуры некоторых совокупностей решений (3) при условии (9). Соответствующие построения опираются на результаты работ [16–18]. Здесь рассмотрим только один класс структур, определяющих свойства асимптотических по невязке решений уравнения (3).

Введем некоторые обозначения. Фиксируем произвольно вещественное значение $\omega{\neq}0$. Через $\theta{\in}[0, 2\pi)$ обозначим такую величину, которая дополняет до целого кратного 2π выражение $\omega\varepsilon^{\alpha-1}$ $(\alpha{-}1{<}0)$. Тогда некоторую совокупность корней $\lambda_k(\varepsilon)$, $k{\in}Z$, характеристического уравнения (5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \lambda_k(\varepsilon) = iL_0(\varepsilon) + o(\varepsilon) + i2\pi k L_1(\varepsilon)[1 + o(\varepsilon^{\alpha-1})] + (i2\pi k)^2 L_2(\varepsilon)[1 + o(\varepsilon^{2\alpha})] + \\ + (i2\pi k)^3 L_3(\varepsilon)[1 + o(\varepsilon^{3\alpha})] + \varepsilon^{2\alpha} b_{10} + o(\varepsilon^{2\alpha}), \end{aligned} \tag{29}$$

где

$$\begin{aligned} L_0(\varepsilon) &= \nu/\sqrt{\varepsilon} + \theta + \varepsilon 2\theta\nu^{-1}, \\ L_1(\varepsilon) &= \varepsilon^{\alpha-1}\omega(1{-}\varepsilon\nu^{-1}) + \theta, \\ L_2(\varepsilon) &= \varepsilon^{2\alpha-1/2}\omega^2\nu^{-2}[i - 2\varepsilon^{1/2}], \\ L_3(\varepsilon) &= \varepsilon^{3\alpha-1} i\omega^3\nu^{-3}. \end{aligned}$$

Корни $\lambda_k(\varepsilon)$ характеристического уравнения определяют решения $\xi_k \exp(\lambda_k(\varepsilon)t)$ уравнения (3). Рассматривая в (3) выражение

$$u = \varepsilon^{\alpha-1/4}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau)\exp(\tilde{\lambda}_k(\varepsilon)t) + c.c.\right) + \varepsilon^{3\alpha-7/4}u_2 + \ldots, \tag{30}$$

в котором $\tau{=}\varepsilon^{2\alpha}t$, производя стандартные действия, получим систему уравнений относительно $\xi_k(\tau)$. Линейная часть этой системы, очевидно, определяется асимптотикой (29) корней $\lambda_k(\varepsilon)$. Первое слагаемое в правой части (30) удобно преобразовать. Положим

$$\xi(\tau, r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau)\exp(2\pi kir).$$

Тогда получим, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau)\exp(\tilde{\lambda}_k(\varepsilon)t) = \exp(iL_0(\varepsilon)t)\xi(\tau, r),$$

$$r = L_1(\varepsilon)t, \qquad \tau = \varepsilon^{2\alpha-1/2}t.$$

Учитывая эти соотношения, систему уравнений для $\xi_k(\tau)$ можно представить в виде

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \nu^{-2}\omega^2(i{+}2\varepsilon^{1/2})\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2} + \nu^{-3}\omega^3\varepsilon^{\alpha-1/2}\frac{\partial^3\xi}{\partial r^3} + b_{10}\xi + dF(\xi), \tag{31}$$

где ξ удовлетворяет условию (19).

Эта краевая задача при $\varepsilon{=}0$ и без учета функции $F(\xi)$ является линейной, и все корни характеристического уравнения для нее чисто мнимые. Применим к краевой задаче (31), (19) ту же, что и в разделе 1, методику. Положим

$$\xi = \varepsilon^{\frac{(\alpha-1/2)}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k(\tau_1)\exp(i2\pi kr - 2i\nu^{-2}\omega^2(2\pi k)^2\tau) + c.c. + \varepsilon^{\frac{3(\alpha-1/2)}{2}} h_3(\tau_1, \tau, r) + \ldots, \tag{32}$$

где $\tau_1 = \varepsilon^{\alpha-1/2}\tau$, $h_3(\tau_1, \tau, r)$ периодична по τ и r.

Тогда для функции $\eta(\tau_1, r)$, где

$$\eta(\tau, r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k(\tau_1)\exp(i2\pi kr),$$

а $\eta_k(\tau_1)$ те же, что и в (32), получим краевую задачу

$$\frac{\partial\eta}{\partial\tau_1} = \nu^{-3}\omega^3\frac{\partial^3\eta}{\partial r^3} + 2\nu^{-2}\omega^2\varepsilon^{1/2}\frac{\partial^2\eta}{\partial r^2} + \varepsilon^{1/2}b_{10}\eta + dF(\eta). \tag{33}$$

И здесь при $\varepsilon{=}0$ и при $F{\equiv}0$ получаем линейную краевую задачу с чисто мнимым спектром. Поэтому положим

$$\eta = \varepsilon^{1/4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k(\tau_2)\exp(i2\pi kr - i\nu^{-3}\omega^3(2\pi k)^3\tau_1) + c.c. + \varepsilon^{3/4}W_3(\tau_2, r) + \ldots, \tag{34}$$

где $\tau_2 = \varepsilon^{1/2}\tau_1$, $W_3(\tau_2, r)$ периодична по r.

Тогда для функции

$$w(\tau_2, r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k(\tau_2)\exp(i2\pi kr),$$

с теми же, что и в (34) коэффициентами $w_k(\tau_2)$, получаем краевую задачу параболического типа

$$\frac{\partial w}{\partial \tau_2} = 2\nu^{-2}\omega^2\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + b_{10}w + dF(w), \tag{35}$$

$$w(\tau_2, r{+}1) = w(\tau_2, r). \tag{36}$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 3. *Фиксируем произвольно вещественное значение $\omega{\neq}0$. Пусть краевая задача (35), (36) при $\theta = \theta_0$ имеет ограниченное при $\tau_2{\to}\infty$, $r{\in}[0,1]$ решение $w_0(\tau_2, r)$ и*

$$w_0(\tau_2, r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_{k0}(\tau_2)\exp(i2\pi kr).$$

Тогда уравнение (3) при условиях (6), (9) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $o(\varepsilon^{(6\alpha-1)/4})$ решение $u_0(t,\varepsilon)$, для которого

$$u_0(t,\varepsilon) = \varepsilon^{(6\alpha-1)/4}\exp\big([i\nu\varepsilon^{-1}(1{+}o(1))]t\big)\times$$
$$\times \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_{k0}(\tau_2)\exp\big(i2\pi k\rho - 2i\nu^{-2}\omega^2(2\pi k)^2\tau - i\nu^{-3}\omega^3(2\pi k)^3\tau_1\big) + c.c.,$$

где

$$r = [\varepsilon^{\alpha-1}\omega(1{-}\varepsilon\nu^{-1}) + \theta]t, \qquad \tau_1 = \varepsilon^{\alpha-1/2}\tau, \qquad \tau_2 = \varepsilon^{1/2}\tau_1\,.$$

4. Выводы

Для определения главной части решений уравнения (3) построены специальные нелинейные краевые задачи, играющие роль нормальных форм и не содержащие малый параметр. Их нелокальная динамика определяет локальное поведение решений исходного уравнения.

Показано, что структура решений исходного уравнения (3) состоит из суперпозиции быстро осциллирующих функций и решений нелинейных краевых задач – нормальных форм. Это открывает возможность надежного численного анализа, поскольку быстро осциллирующие составляющие найдены аналитически.

Нормальные формы являются нелинейными краевыми задачами параболического типа. Их динамические свойства, а значит, и динамика исходного уравнения (3) могут быть сложными (см, например, [16–18]).

Присутствие в нормальных формах выражения $\theta(\varepsilon)$ говорит о высокой чувствительности динамических свойств к изменению параметра ε: при $\varepsilon{\to}0$ эта величина бесконечно много раз изменяется от 0 до 1, а значит, возможен неограниченный при $\varepsilon{\to}0$ процесс прямых и обратных бифуркаций.

Нормализованные уравнения, приведенные в разеле 2, содержат континуальный параметр ω. При различных значениях этого параметра имеем различные установившиеся решения. Это означает, что при росте надкритичности – поправки $\varepsilon^{2\alpha}b_{10}$ к параметру b_{10} – резко увеличивается количество установившихся решений уравнения (3), т. е. имеет место явление мультистабильности.

Интересно отметить следующее: в работе по решению нелинейных краевых задач явно построены главные приближения решения уравнения с запаздыванием (3). На основе полученных формул можно решать обратные задачи: для нахождения решений указанного класса нелинейных параболических уравнений использовать решения уравнения с запаздыванием.

Список литературы / References

[1] Ikeda K., Matsumoto K., “High-dimensional chaotic behavior in systems with time-delayed feedback”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **29**:1–2 (1987), 223–235.

[2] Vallée R., Marriott C., “Analysis of an Nth-order nonlinear differential-delay equation”, *Phys. Rev. A*, **39**:1 (1989), 197–205.

[3] Kouomou C. [et al.], “Chaotic breathers in delayed electro-optical systems”, *Phys. Rev. Lett.*, **95**:20 (2005), 203903.

[4] Weicker L. [et al.], “Multirhythmicity in an optoelectronic oscillator with large delay”, *Phys. Rev. E*, **91**:1 (2015), 012910.

[5] Weicker L. [et al.], “Strongly asymmetric square waves in time-delayed system”, *Phys. Rev. E*, **86**:5 (2012), 055201(R).

[6] Peil M. [et al.], “Routes to chaos and multiple time scale dynamics in broadband bandpass nonlinear delay electro-optic oscillators”, *Phys. Rev. E*, **79**:2 (2009), 026208.

[7] Talla Mbé J.H. [et al.], “Mixed-mode oscillations in slow-fast delayed optoelectronic systems”, *Phys. Rev. E*, **91**:1 (2015), 012902.

[8] Marquez B.A. [et al.], “Interaction between Lienard and Ikeda dynamics in a nonlinear electro-optical oscillator with delayed bandpass feedback”, *Phys. Rev. E*, **94**:6 (2016), 062208.

[9] Kaschenko I.S., Kaschenko S.A., “Local Dynamics of the Two-Component Singular Perturbed Systems of Parabolic Type”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **25**:11 (2015), 1550142.

[10] Giacomelli G., Politi A., “Relationship between Delayed and Spatially Extended Dynamical Systems”, *Phys. Rev. Lett.*, **76**:15 (1996), 2686–2689.

[11] Yanchuk S., Giacomelli G., “Dynamical systems with multiple long-delayed feedbacks: Multiscale analysis and spatiotemporal equivalence”, *Phys. Rev. E*, **92**:4 (2015), 042903.

[12] Marconi M. [et al.], “Vectorial dissipative solitons in vertical-cavity surface-emitting lasers with delays”, *Nature Photonics*, **9**:7 (2015), 450–455, DOI: 10.1038/nphoton.2015.92.

[13] Pimenov A. [et al.], “Dispersive time-delay dynamical systems”, *Phys. Rev. Lett.*, **118**:19 (2017), 193901.

[14] Bestehorn M., Grigorieva, E.V., Haken H., Kaschenko, S.A., “Order parameters for class-B lasers with a long time delayed feedback”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **145**:1–2 (2000), 110–129.

[15] Grigorieva E.V., Kaschenko I.S., Kaschenko S.A., “Dynamics of Lang–Kobayashi equations with large control coefficient”, *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, **15**:4 (2012), 403–409.

[16] Ахромеева Т.С. [и др.], *Нестационарные структуры и диффузионный хаос*, Наука, М., 1992, 544 с.; Akhromeeva T.S. i dr., *Nestatsionarnye struktury i diffuzionnyy khaos*, Nauka, Moskva, 1992, 544 pp.

[17] Кащенко И.С., “Локальная динамика уравнений с большим запаздыванием”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **48**:12 (2008), 2141–2150; Kashchenko I.S., “Local dynamics of equations with large delay”, *Comput. Math. and Math. Phys.*, **48**:12, 2172–2181.

[18] Кащенко И.С., “Динамика уравнения с большим коэффициентом запаздывающего управления”, *Доклады Академии наук*, **437**:6 (2011), 743–747; Kashchenko I.S., “Dynamics of an Equation with a Large Coefficient of Delay Control”, *Doklady Mathematics*, **83**:2011, 258–261.

Grigorieva E. V., Kashchenko S.A., Glazkov D. V., "Features of the Local Dynamics of the Opto-Electronic Oscillator Model with Delay", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:1 (2018), 71–82.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-71-82

Abstract. We consider electro-optic oscillator model which is described by a system of the delay differential equations (DDE). The essential feature of this model is a small parameter in front of a derivative that allows us to draw a conclusion about the action of processes with different order velocities. We analyse the local dynamics of a singularly perturbed system in the vicinity of the zero steady state. The characteristic equation of the linearized problem has an asymptotically large number of roots with close to zero real parts while the parameters are close to critical values. To study the existent bifurcations in the system, we use the method of the behaviour constructing special normalized equations for slow amplitudes which describe of close to zero original problem solutions. The important feature of these equations is the fact that they do not depend on the small parameter. The root structure of characteristic equation and the supercriticality order define the kind of the normal form which can be represented as a partial differential equation (PDE). The role of the ”space” variable is performed by ”fast” time which satisfies periodicity conditions. We note fast response of dynamic features of normalized equations to small parameter fluctuation that is the sign of a possible unlimited process of direct and inverse bifurcations. Also, some obtained equations possess the multistability feature.

Keywords: differential equation, local dynamics, small parameter, asymptotics, bifurcation, normal form, boundary value problem

On the authors:
Elena V. Grigorieva, Prof.,
Belarus Economic State University,
26 Partizanski Av., Minsk 220070, Belarus, e-mail: grigorieva@tut.by

Sergey A. Kashchenko, orcid.org/0000-0002-8777-4302, Prof.,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

Dmitry V. Glazkov, orcid.org/0000-0003-0511-5088, PhD,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: d.glazkov@uniyar.ac.ru

Acknowledgments:
This work was carried out within the framework of the state programme of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, project № 1.10160.2017/5.1.