Моделирование и анализ информационных систем. Т. 25, № 1 (2018), с. 83–91
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 25, No 1 (2018), pp. 83–91

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-83-91
УДК 517.9

Об одной сингулярно возмущенной задаче нелинейной теплопроводности в случае сбалансированной нелинейности

Давыдова М. А., Захарова С.А.

получена 15 ноября 2017

Аннотация. На основе модифицированного асимптотического метода пограничных функций и асимптотического метода дифференциальных неравенств исследуется вопрос о существовании устойчивых по Ляпунову стационарных решений с внутренними слоями уравнения нелинейной теплопроводности в случае нелинейной зависимости мощности тепловых источников от температуры. Обсуждаются основные условия существования таких решений, построение асимптотического приближения решения произвольного порядка точности, алгоритм определения положения поверхности перехода, в окрестности которой локализован внутренний слой контрастной структуры, и обоснование формальных построений. Основная трудность связана с описанием поверхности перехода. Предлагается эффективный алгоритм определения положения поверхности перехода, который развивает наш подход в описании многомерных задач на более сложный случай сбалансированной нелинейности. Результат может быть использован для создания численного алгоритма, основанного на применении асимптотического анализа с целью построения пространственно-неоднородных сеток при описании внутреннего слоя решения. В качестве иллюстрации рассматривается задача на плоскости, которая позволяет визуализировать численные расчеты. Сравниваются численные и асимптотические решения нулевого порядка при различных значениях малого параметра.

Ключевые слова: нелинейная теплопроводность, уравнения реакция-диффузия-адвекция, контрастные структуры, асимптотические методы

Для цитирования: Давыдова М. А., Захарова С.А., "Об одной сингулярно возмущенной задаче нелинейной теплопроводности в случае сбалансированной нелинейности", *Моделирование и анализ информационных систем*, **25**:1 (2018), 83–91.

Об авторах:
Давыдова Марина Александровна, orcid.org/0000-0002-9255-7353, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Ленинские горы, д. 1, стр. 2., 119992 Москва, Россия, e-mail: m.davydova@physics.msu.ru

Захарова Светлана Александровна, orcid.org/0000-0002-3421-1311, аспирант,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Ленинские горы, д. 1, стр. 2., 119992 Москва, Россия, e-mail: sa.zakharova@physics.msu.ru

Благодарности:
Работа выполнена при поддержке РФФИ, пр. № 16-01-00437.

Введение

Исследование процессов распространения тепла при большом интервале изменения температур приводит к квазилинейному уравнению теплопроводности. В работах

Г.И. Баренблатта, Я.Б. Зельдовича, С.П. Курдюмова, А.А. Самарского и др. (см., например, [1]) найдены точные аналитические решения некоторых задач нелинейной теплопроводности, анализ свойств которых позволяет обнаружить ряд нелинейных эффектов при распространении тепловых возмущений в средах с нелинейными характеристиками. В настоящей работе на основе современных методов асимптотического анализа строится асимптотическое решение одной сингулярно возмущенной задачи нелинейной теплопроводности в случае нелинейной зависимости мощности тепловых источников от температуры. В частности, такая зависимость имеет место при химических реакциях, экзо- и эндотермических процессах, протекающих в нагретой среде.

1. Постановка задачи. Основные условия существования контрастных структур

Распространение теплового возмущения в однородном твердотельном образце с нелинейными характеристиками в случае, когда мощность тепловых источников велика, описывается нелинейной сингулярно возмущенной задачей для уравнения типа реакция-диффузия-адвекция [2] в безразмерных переменных

$$\varepsilon^2(\Delta u - A(u)\,(\nabla u)^2 - u_t) = B(u,x), \quad x = (x_1,x_2,x_3) \in D \subset R^3, \quad t \in (0,T],$$

где первые два слагаемых в левой части уравнения описывают механизм нелинейной теплопроводности, правая часть уравнения описывает процесс энерговыделения, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, функции $A(u)$, $B(u,x)$ достаточно гладкие в области определения.

Стационарное распределение температуры определяется как решение краевой задачи

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2(\Delta u - A(u)\,(\nabla u)^2) = B(u,x), \quad x \in D \subset R^3, \\ &u(x,\varepsilon) = g(x), \quad x \in S, \end{aligned} \tag{1}$$

которая в данной работе исследуется на наличие решений с внутренними переходными слоями в соответствии с условиями и алгоритмами работы [3].

Основным требованием, в рамках которого рассматривается задача (1), является условие на изолированные решения $u = \varphi_i(x), i = \overline{1,3}$ вырожденного уравнения $B(u,x) = 0$, которое состоит в следующем: $B_u(\varphi_i(x),x) > 0$, $i = 1,3$, $B_u(\varphi_2(x),x) < 0$ при $x \in D \cup S$.

Определим множество $\{\overline{\Omega}\}$ достаточно гладких замкнутых поверхностей в области D с локальными координатами (r,θ_1,θ_2) в малой δ-окрестности каждой поверхности [3]. При описании контрастных структур важную роль играет присоединенная система

$$\partial\tilde{v}/\partial\xi = A(\tilde{u})\tilde{v}\sum_{k=1}^{3}\left(l^k(r,\theta)\right)^2 + B(\tilde{u},r,\theta), \quad \partial\tilde{u}/\partial\xi = \tilde{v}, \quad -\infty < \xi < +\infty, \tag{2}$$

где r и θ рассматриваются как параметры (набор параметров θ_1, θ_2 для краткости обозначим θ), $l^k(r,\theta)$ – известные функции [3]. Для каждой поверхности из множества $\{\overline{\Omega}\}$ определим функцию

$$H(r,\theta) \equiv \tilde{v}^+(0,r,\theta) - \tilde{v}^-(0,r,\theta) =$$
$$= -\frac{\int\limits_{\varphi_1(r,\theta)}^{\varphi_3(r,\theta)} 2B(\xi,r,\theta) exp\left(2\sum\limits_{k=1}^{3}\left(l^k(r,\theta)\right)^2 \int\limits_{\xi}^{\varphi_2(r,\theta)} A(\eta)d\eta\right)d\xi}{\tilde{v}^+(\varphi_2(r,\theta),r,\theta) - \tilde{v}^-(\varphi_2(r,\theta),r,\theta)}, \quad (r,\theta) \in [-\delta;\delta] \times \overline{\Theta},$$

где $\overline{\Theta}$ – область изменения координаты θ на некоторой поверхности из множества $\{\overline{\Omega}\}$, $\tilde{v}^{\pm}(\xi,r,\theta) > 0$ – решения системы (2) с дополнительными условиями

$$\tilde{u}^{\mp}(\mp\infty,r,\theta) = \varphi_i(r,\theta), \quad i = 1,3, \quad \tilde{v}^{\mp}(\mp\infty,r,\theta) = 0. \tag{3}$$

Условие $H(r,\theta) \equiv 0$, $r \in [-\delta,\delta]$, $\theta \in \overline{\Theta}$ выделяет критический случай, или случай сбалансированной нелинейности, обсуждению которого посвящается настоящая работа.

Асимптотическое разложение решения типа контрастной структуры получается стандартно в результате C^1-сшивания на поверхности перехода Ω двух асимптотик погранслойного типа [4]

$$\begin{aligned} u^- &= \overline{u}^-(x,\varepsilon) + Qu^-(\xi,\theta,\varepsilon), \\ u^+ &= \overline{u}^+(x,\varepsilon) + \Pi u(\rho,\theta,\varepsilon) + Qu^+(\xi,\theta,\varepsilon), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\overline{u}^-(x,\varepsilon) = \varphi_1(x) + \varepsilon\overline{u}_1^-(x) + \ldots$, $\overline{u}^+(x,\varepsilon) = \varphi_3(x) + \varepsilon\overline{u}_1^+(x) + \ldots$ – регулярные ряды, описывающие решение вне ε-окрестности границы S и области локализации внутреннего слоя контрастной структуры, $\Pi u(\rho,\theta,\varepsilon) = \Pi_0 u(\rho,\theta) + \varepsilon\Pi_1 u(\rho,\theta) + \ldots$ – пограничный ряд, описывающий пограничный слой в окрестности границы S, $\rho = \overline{r}/\varepsilon$, $(\overline{r},\eta)$ – аналог переменных (r,θ) в некоторой окрестности поверхности S [4]. Разложения $Qu^{\pm}(\xi,\theta,\varepsilon) = Q_0u^{\pm}(\xi,\theta) + \varepsilon Q_1 u^{\pm}(\xi,\theta) + \ldots$ описывают пограничные слои по разные стороны от поверхности Ω, положение которой определяется условием $u(x,\varepsilon) = \varphi_2(x)$, $x \in \Omega$, а уравнение в локальной системе координат, введенной в δ-окрестности некоторой поверхности $\Omega_0 \subset \{\overline{\Omega}\}$ известным способом [3], ищется в виде

$$r = \varepsilon\lambda_1(\theta) + \varepsilon^2\lambda_2(\theta) + \cdots \equiv \lambda^*(\theta,\varepsilon), \tag{5}$$

при этом погранслойная переменная ξ определяется стандартно: $\xi = (r - \lambda^*(\theta,\varepsilon))/\varepsilon$.

Критерий выбора поверхности Ω_0 сформулирован в работе [3]. Положение этой поверхности в случае задачи (1) определяется уравнением, которое следует из условия C^1-сшивания асимптотик на поверхности Ω [3]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(2A(\tilde{u})\tilde{v}^2(\xi,\theta)\sum_{k=1}^{3}l^k(0,\theta)\frac{\partial l^k}{\partial r}(0,\theta)+B_r(\tilde{u},0,\theta)\right)p(\xi,\theta)\tilde{v}(\xi,\theta)\xi d\xi+$$
$$+\int_{-\infty}^{+\infty}2A(\tilde{u})p(\xi,\theta)\tilde{v}^2(\xi,\theta)\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}l^k(0,\theta)q_j^k(0,\theta)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\theta_j}(\xi,\theta)d\xi- \tag{6}$$
$$-k(0,\theta)\int_{-\infty}^{+\infty}p(\xi,\theta)\tilde{v}^2(\xi,\theta)d\xi=0,\quad \theta\in\Theta_0,$$

где Θ_0 – область изменения координаты θ на поверхности Ω_0; $\tilde{u}(\xi,\theta)$, $\tilde{v}(\xi,\theta)$ решение системы (2) с условиями (3) при $r=0$, $\theta\in\Theta_0$, которое описывает внутренний слой контрастной структуры в нулевом приближении; $q_j^k(r,\theta)$ – известные функции [3]; $k(0,\theta)$ – сумма главных кривизн поверхности Ω_0 в точке с координатой θ; $p(\xi,\theta)=exp\left(-2\sum\limits_{k=1}^{3}\left(l^k(0,\theta)\right)^2\int\limits_0^{\xi}A(\tilde{u})\tilde{v}(\eta,\theta)d\eta\right)$.

С использованием условия C^1-сшивания асимптотик (4) на поверхности Ω получаем периодические дифференциальные задачи относительно функций $\lambda_n(\theta)$ для уравнений вида

$$M(\theta)\lambda_n(\theta)-\Phi_{n+1}(\theta)=0,\quad \theta\in\Theta_0,\quad n\geq 1, \tag{7}$$

где $M(\theta)$ – линейный дифференциальный оператор 2-го порядка [3]. Разрешимость периодических задач для уравнения (7) обеспечивается условием существования положительного главного собственного значения спектральной задачи для оператора $M(\theta)$ с условием периодичности решения по переменной θ [5].

При описании пограничного слоя, локализованного в окрестности поверхности S, в нулевом приближении приходим к нелинейной задаче относительно функции $\Pi_0 u(\rho,\eta)$, разрешимость которой обеспечивается следующим ограничением на поведение функции $g(x)$:

$$\int_{\varphi_3(0,\eta)}^{g(0,\eta)}B(\xi,0,\eta)exp\left(2\sum_{k=1}^{3}\left(d^k(0,\eta)\right)^2\int_{\xi}^{g(0,\eta)}A(\lambda)d\lambda\right)d\xi>0, \tag{8}$$

где $\eta=(\eta_1,\eta_2)$ – криволинейные координаты на поверхности S, функции $d^k(\bar{r},\eta)$ определяются по аналогии с функциями $l^k(r,\theta)$ [3].

Существование устойчивых по Ляпунову стационарных решений с асимптотикой (4) обусловлено свойствами функции $B(u,x)$ и доказывается с использованием идей асимптотического метода дифференциальных неравенств [6,7]. Справедлива следующая оценка остаточного члена $|u(x,\varepsilon)-U_n^{\pm}(x,\varepsilon)|\leq C\varepsilon^{n+1}$ равномерно в области $D\cup S$, где $U_n^{\pm}(x,\varepsilon)$ – частичные суммы n-го порядка рядов (4).

2. Пример

В качестве примера рассмотрим задачу на плоскости, допускающую визуализацию численных расчетов:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^2\left(\Delta u - \frac{1}{2} tgu (\nabla u)^2\right) = u(u^2-1)e^{x_1^2+x_2^2}, \quad D := \left\{(x_1,x_2) : x_1^2+x_2^2 < 1\right\} \subset R^2, \\
&u(x,\varepsilon) = 1.2, \quad x \in S := \left\{(x_1,x_2) : x_1^2+x_2^2 = 1\right\}.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Пусть кривая Ω_0, в ε-окрестности которой локализован внутренний слой, относительно некоторой полярной системы координат с полюсом внутри области D описывается уравнениями:

$$
x_1 = Rcos\theta, \quad x_2 = Rsin\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \tag{10}
$$

$R = const$. Связь декартовых и локальных координат в окрестности кривой Ω_0 дается формулами [3]:

$$
x_1 = (R+r)cos\theta, \quad x_2 = (R+r)sin\theta, \quad r \in [-\delta,\delta] \quad 0 \le \theta \le 2\pi,
$$

при этом $l^1(r,\theta) = cos\theta$, $l^2(r,\theta) = sin\theta$, $k(r,\theta) = (R+r)^{-1}$, $q_1^1(r,\theta) = -sin\theta/(R+r)$, $q_1^2(r,\theta) = cos\theta/(R+r)$.

Задачи

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \tilde{v}^\pm}{\partial \xi} = \frac{1}{2}(\tilde{v}^\pm)^2 tg\tilde{u}^\pm + e^{(R+r)^2}\tilde{u}^\pm((\tilde{u}^\pm)^2-1), \quad \frac{\partial \tilde{u}^\pm}{\partial \xi} = \tilde{v}^\pm, \\
&\tilde{u}^\pm(0,r,\theta) = 0, \quad \tilde{u}^\pm(\pm\infty,r,\theta) = \pm 1,
\end{aligned} \tag{11}
$$

имеют решения, которым на фазовой плоскости $(\tilde{u},\tilde{v})$ при $\tilde{v} > 0$ соответствуют сепаратрисы седел $(-1;0)$ и $(1;0)$:

$$
\tilde{v}^\pm(\tilde{u}^\pm, r) = \sqrt{\frac{2e^{(R+r)^2}}{cos\tilde{u}^\pm}\int\limits_{\pm 1}^{\tilde{u}^\pm} \eta(\eta^2-1)cos\eta d\eta} = \sqrt{2e^{(R+r)^2}}\Psi(\tilde{u}^\pm), \tag{12}
$$

где $\Psi(u) = \sqrt{(u^3-7u)tgu + (3u^2-7) + (6sin1+4cos1)cos^{-1}u}$. Следовательно, $\tilde{v}^+(0,r) - \tilde{v}^-(0,r) = 0$ при любом $r \in [-\delta,\delta]$, что означает реализацию критического случая.

Кривая Ω_0 описывается уравнениями (10), где R определяется как решение конечного уравнения, которое следует из уравнения (6):

$$
R^2\int\limits_{-1}^{1} u(u^2-1)(cosu-1)\int\limits_{0}^{u}\frac{d\lambda}{\Psi(\lambda)}du - \int\limits_{-1}^{1}\Psi(u)(cosu-1)du = 0 \tag{13}
$$

Численное решение уравнения (13) дает значение

$$
R = 0.32
$$

Задача (11) при $r = 0$ и $R = 0.32$ описывает внутренний слой контрастной структуры в нулевом приближении, так что справедлива квадратурная формула

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2e^{R^2}}} \int\limits_0^{\tilde{u}(\xi)} \frac{du}{\Psi(u)}, \quad -\infty < \xi < +\infty,$$

которая следует из формулы (12). Здесь $\tilde{u}(\xi) = -1 + Q_0 u^-(\xi),\ \xi \le 0,\ \tilde{u}(\xi) = 1 + Q_0 u^+(\xi),\ \xi \ge 0.$

Коэффициенты уравнения (5) не зависят от переменной θ и определяются как решения конечного уравнения

$$M\lambda_n - \Phi_{n+1} = 0, \quad n \ge 1, \tag{14}$$

где

$$M = -\frac{1}{\sqrt{6sin1 + 4cos1 - 7}} \left(3R^2 + 1\right) \int\limits_{-1}^{1} u(u^2 - 1)(cosu - 1) \int\limits_0^u \frac{d\lambda}{\Psi(\lambda)} du +$$
$$+ \frac{1}{R}(1 - 2R) \int\limits_{-1}^{1} (cosu - 1)\Psi(u)du,$$

Φ_{n+1} – известные значения. В результате численного счета находим, что $M = 5.12$.

В окрестности границы области S в нулевом приближении решение описывается квадратурной формулой

$$\rho = -\frac{1}{\sqrt{2e}} \int\limits_{1.2}^{\overline{u}(\rho)} \frac{du}{\Psi(u)}, \quad 0 \le \rho < \infty,$$

где $\overline{u}(\rho) = 1 + \Pi_0 u(\rho)$.

Численные решения задачи (9) при $\varepsilon = 0.1$ и $\varepsilon = 0.01$ представлены на рис. 1. На рис. 2 представлены сечения численных решений и соответствующих им асимптотических решений нулевого порядка некоторой вертикальной плоскостью. Эффективность асимптотического метода возрастает с уменьшением параметра ε.

Результат может быть использован для создания численного алгоритма, основанного на применении асимптотического анализа с целью построения пространственно-неоднородных сеток при описании внутреннего слоя контрастной структуры [8,9].

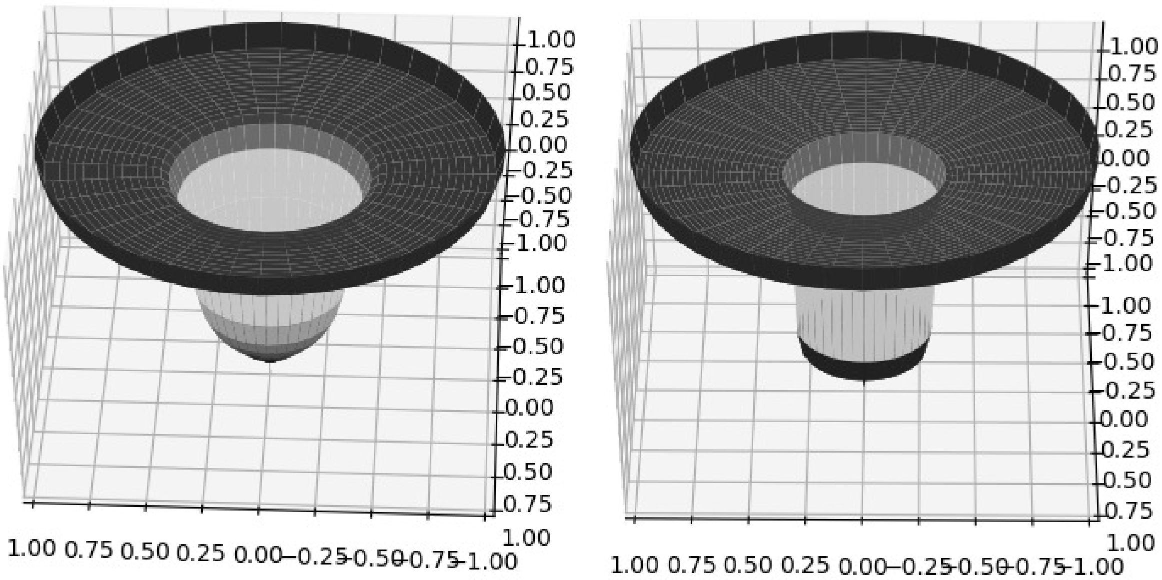

Рис. 1. Численные решения задачи (9) при $\varepsilon = 0.1$ и $\varepsilon = 0.01$
Fig. 1. Numerical solutions of the problem (9) for $\varepsilon = 0.1$ and $\varepsilon = 0.01$

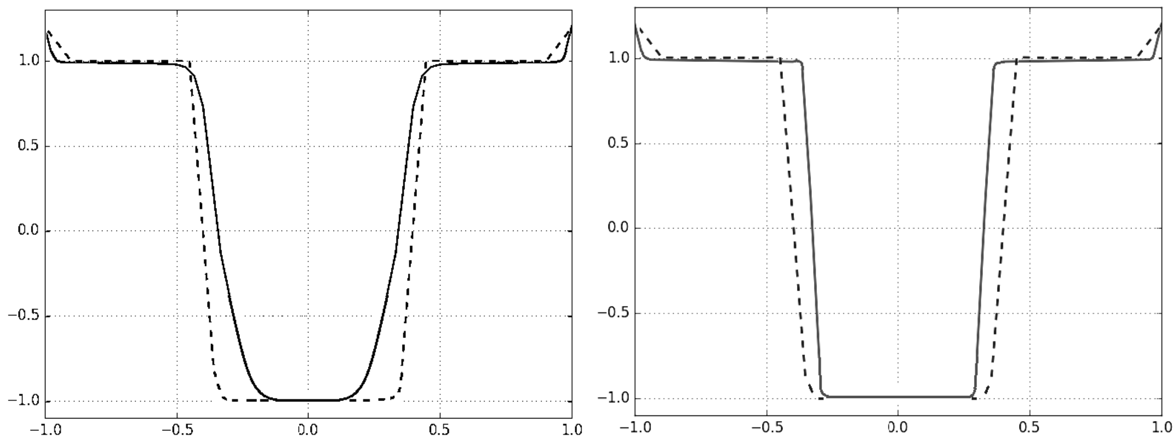

Рис. 2. Асимптотические и численные решения задачи (9) при $\varepsilon = 0.1$ и $\varepsilon = 0.01$ в сечении вертикальной плоскостью
Fig. 2. Asymptotic and numerical solutions of the problem (9) for $\varepsilon = 0.1$ and $\varepsilon = 0.01$ in a cross-sectional vertical plane

Список литературы / References

[1] Галактионов В. А., Курдюмов С.П., Самарский А.А, *Процессы в открытых диссипативных системах (графическое исследование эволюции тепловых структур)*, М., Знание, 1988; [Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Samarskii A.A., *Processes in the open dissipative systems: Graphical study of the evolution of thermal structures*, Moskva, Znanye, 1988, (in Russian).]

[2] Davydova M. A., Nefedov N. N., "Existence and Stability of Contrast Structures in Multidimensional Singularly Perturbed Reaction-Diffusion-Advection Problems", *Lecture Notes in Computer Science*, **10187** (2017), 277 – 285.

[3] Давыдова М. А., Нефедов Н. Н., "Существование и устойчивость контрастных структур в многомерных задачах реакция-диффузия-адвекция в случае сбалансированной нелинейности", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24:1** (2017), 31–38; [Davydova M. A., Nefedov N. N., "Existence and Stability of the Solutions with Internal Layers in Multidimensional Problems of the Reaction-Diffusion-Advection Type with Balanced Nonlinearity", *Modeling and analysis of the information systems*, **24**:1 (2017), 31–38, (in Russian).]

[4] Davydova M. A., "Existence and stability of solutions with boundary layers in multidimensional singularly perturbed reaction-diffusion-advection problems", *Math Notes*, **98**:6 (2015), 909–919.

[5] Nefedov N. N., Sakamoto K., "Multi-dimensional stationary internal layers for spatially inhomogeneous reaction-diffusion equations with balanced nonlinearity", *Hiroshima Mathem. Journal*, **33**:3 (2003), 391–432.

[6] Нефедов Н. Н., "Метод дифференциальных неравенств для нелинейных сингулярно возмущенных задач с контрастными структурами типа ступеньки в критическом случае", *Дифференц. уравнения*, **32**:11 (1996), 1529–1537; English transl.: Nefedov N. N., "The method of differential inequalities for nonlinear singularly perturbed problems with contrast structures of step type in the critical case", *Differ. Equ.*, **32**:11 (1996), 1526–1534.

[7] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., "Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями", *Труды Мат. ин-та им. В.А. Стеклова*, **268**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2010, 268–283; English transl.: Vasil'eva A. B., Butuzov V. F., Nefedov N. N., "Singularly perturbed problems with boundary and internal layers", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **268**, SP MAIK Nauka/Interperiodica, 2010, 258–273.

[8] Lukyanenko D. V., Volkov V. T., Nefedov N. N., Recke L., Schneider K., "Analytic-Numerical Approach to Solving Singularly Perturbed Parabolic Equations with the Use of Dynamic Adapted Meshes", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:3 (2016), 334–341.

[9] Volkov V. T., Nefedov N. N., "Asymptotic-numerical investigation of generation and motion of fronts in phase transition models", *Lecture Notes in Computer Science*, **8236** (2013), 524–531.

Davydova M. A., Zakharova S.A., "On a Singularly Perturbed Problem of the Nonlinear Thermal Conductivity in the Case of Balanced Nonlinearity", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:1 (2018), 83–91.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-83-91

Abstract. On the basis of the modified asymptotic method of boundary functions and the asymptotic method of differential inequalities, the question of the existence of Lyapunov-stable stationary solutions with internal layers of the nonlinear heat equation in the case of nonlinear dependence of the power of thermal sources from temperature is investigated. The main conditions of the existence of such solutions are discussed. We construct an asymptotic approximation of an arbitrary-order accuracy to such solutions and suggest an efficient algorithm for constructing an asymptotic approximation to the localization surface of the transition layer. To justify the constructed formal asymptotics, we use an asymptotic method of differential inequalities. The main complexity is related to the description of the transition surface in whose neighborhood the internal layer is localized. We use a more efficient method for localizing the transition surface, which permits one to develop an approach to a more complicated case of balanced nonlinearity. The results can be used to create a numerical algorithm which uses the asymptotic analyses to construct space-non-uniform meshes while describing internal layer behaviour of the solution. As an illustration, we consider a problem on the plane that allows us to visualize the numerical calculations. Numerical and asymptotic solutions of zero order are compared for different values of the small parameter.

Keywords: nonlinear heat conductivity, reaction-diffusion-advection equations, contrast structures, asymptotic methods

On the authors:
Marina A. Davydova, orcid.org/0000-0002-9255-7353, PhD,
M.V. Lomosov Moscow State University,
1-2 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia, e-mail: m.davydova@physics.msu.ru

Svetlana A. Zakharova, orcid.org/0000-0002-3421-1311, graduate student,
M.V. Lomosov Moscow State University,
1-2 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia, e-mail: sa.zakharova@physics.msu.ru

Acknowledgments:
This work was supported by RFBR, № 16-01-00437.