

©Марушкина Е. А., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-102-111

УДК 517.9

## Периодические и квазипериодические решения в системе трех уравнений Хатчинсона с запаздывающей вещательной связью

Марушкина Е. А.

получена 30 октября 2017

**Аннотация.** Изучается динамика ассоциации, состоящей из трех одинаковых колебательных элементов. Структура связи между осцилляторами предполагается вещательной, т.е. один из элементов системы односторонним образом воздействует на два других, которые, в свою очередь, взаимодействуют друг с другом. Важным свойством связи между осцилляторами является наличие в ней запаздывания по времени, что, очевидным образом, часто встречается в приложениях. Изучаемая система моделирует ситуацию из популяционной динамики, когда популяции слабо связаны между собой, например, разделены географически. При этом одна из популяций может влиять на обе оставшиеся, которые в свою очередь способны влиять друг на друга, но не влияют на первую. Каждый отдельный осциллятор представлен логистическим уравнением с запаздыванием (уравнением Хатчинсона). В работе выполнен локальный асимптотический анализ данной системы в случае близости параметров осцилляторов к значениям, при которых происходит бифуркация Андронова–Хопфа, кроме того, предполагаются малыми коэффициенты связи в системе. В этой ситуации к нашей задаче применим известный метод нормальных форм, который позволяет свести изучение динамики системы в некоторой окрестности единичного состояния равновесия к системе обыкновенных дифференциальных уравнений на устойчивом интегральном многообразии. Для построенной нормальной формы найдены простейшие режимы, полученные с использованием симметрии задачи, и условия их устойчивости. С учетом полученных формул численно проанализированы фазовые перестройки, происходящие в системе. Показано, что запаздывание в цепи связи осцилляторов существенно влияет на качественное поведение решений системы.

**Ключевые слова:** уравнение Хатчинсона, вещательная связь, запаздывание, метод нормальных форм, асимптотика, устойчивость, бифуркация

**Для цитирования:** Марушкина Е. А., "Периодические и квазипериодические решения в системе трех уравнений Хатчинсона с запаздывающей вещательной связью", *Моделирование и анализ информационных систем*, **25**:1 (2018), 102–111.

**Об авторе:**

Марушкина Елена Александровна, [orcid.org/0000-0001-9183-6484](https://orcid.org/0000-0001-9183-6484), канд. физ.-мат. наук, науч. сотр. Лаборатории дискретной и вычислительной геометрии им. Б. Н. Делоне, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: [marushkina-ea@yandex.ru](mailto:marushkina-ea@yandex.ru)

**Благодарности:**

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-60039 мол\_а\_дк.

## 1. Постановка задачи

Проблема предсказания сложного коллективного поведения ассоциаций связанных осцилляторов различной природы является одной из наиболее важных задач в настоящее время. Сети, составленные из нескольких взаимодействующих осцилляторов, представляют собой универсальный модельный объект, находящий применение в различных областях науки и техники. В работах [1–3] построен полный набор сетей из трех элементов с различной структурой связи между ними. В статье [4] методами большого параметра изучены системы вида

$$\dot{N}_j = r(f(N_j(t-1)))N_j + D(N_{j-1} + N_{j+1} - 2N_j), \quad j = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где  $N_0 \equiv N_1$ ,  $N_{n+1} \equiv N_n$ ,  $r$  — параметр, а достаточно гладкая функция  $f(N)$  обладает следующими предельными свойствами:  $f(0) = 1$  и  $f(u) \rightarrow -a$  ( $a > 0$ ), при  $u \rightarrow +\infty$ .

Одним из вариантов этой системы является задача

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= r(f(N_1(t-1)))N_1, \\ \dot{N}_2 &= r(f(N_2(t-1)))N_2 + D(N_1 + N_3 - 2N_2), \\ \dot{N}_3 &= r(f(N_3(t-1)))N_3 + D(N_1 + N_2 - 2N_3) \end{aligned} \quad (2)$$

с вещательным взаимодействием осцилляторов. Задача (2) рассматривалась в предположении, что  $r$  — велико.

Возможность аналитического асимптотического исследования системы (2) также имеется при условии близости ее параметров к критическим в задаче об устойчивости состояния равновесия системы (2).

Предполагая дополнительно, что  $f'(0) = -1$ , и полагая, что в цепи связи имеется дополнительное запаздывание, приходим к задаче, близкой к системе, состоящей из трех уравнений Хатчинсона с запаздывающей вещательной связью:

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= r(1 - N_1(t-1))N_1, \\ \dot{N}_2 &= r(1 - N_2(t-1))N_2 + D(N_1(t-h) + N_3(t-h) - 2N_2), \\ \dot{N}_3 &= r(1 - N_3(t-1))N_3 + D(N_1(t-h) + N_2(t-h) - 2N_3). \end{aligned} \quad (3)$$

В этой задаче  $N_j(t)$ ,  $j = 1, 2, 3$  можно интерпретировать как плотности численности трех близких популяций,  $r > 0$  — мальтузианский коэффициент линейного роста. Величина  $D > 0$  отвечает за интенсивность взаимодействия между популяциями. Параметр  $h > 0$  представляет собой запаздывание в цепи связи. Всюду далее предполагается, что связь между популяциями слабая, т.е. параметр  $D$  мал. Отметим, что влияние запаздывания в цепи связи между осцилляторами рассматривалось также в статьях [5, 6].

Система (3) моделирует ситуацию, когда популяции слабо связаны между собой, например, разделены географически. При этом одна из популяций может влиять на обе оставшиеся, которые в свою очередь способны влиять друг на друга, но не влияют на первую.

Уравнение Хатчинсона, впервые предложенное в [7], является простейшим способом учета возрастной структуры в задаче о динамике популяции особей, борющихся за общую пищу. Изучению уравнения Хатчинсона посвящено большое количество

публикаций, в частности, задача диффузионного взаимодействия осцилляторов типа уравнения Хатчинсона исследовалась в [8–10]. А в статье [11] рассмотрена модель слабого конкурентного взаимодействия близких видов. В настоящей работе изучается динамика системы из трех уравнений Хатчинсона со слабой вещательной связью между ними. Локальная динамика трех осцилляторов общего вида, связанных вещательным образом без запаздывания, рассмотрена ранее в [12]. В настоящей работе исследуется влияние запаздывания, введенного в цепь связи, на динамику изучаемой системы.

При помощи стандартной замены  $N_j = 1 + u_j$  исходная система (3) приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)u_1(t-1)(1+u_1), \\ \dot{u}_2 &= -\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)u_2(t-1)(1+u_2) + \varepsilon d(u_1(t-h) + u_3(t-h) - 2u_2), \\ \dot{u}_3 &= -\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)u_3(t-1)(1+u_3) + \varepsilon d(u_1(t-h) + u_2(t-h) - 2u_3). \end{aligned} \quad (4)$$

Параметр  $r$  выбран равным  $\frac{\pi}{2} + \varepsilon$ , при этом если  $\varepsilon = 0$ , то в спектре устойчивости системы (4) имеется пара чисто мнимых собственных чисел  $\lambda = \pm i\frac{\pi}{2}$  кратности 3, которой соответствуют три линейно независимые собственные функции. Связь  $D$  взаимодействия между видами выбрана слабой, пропорциональной малому параметру  $0 < \varepsilon \ll 1$ .

При помощи локального асимптотического анализа и иллюстрирующего его численного эксперимента изучим периодические и квазипериодические решения системы (4).

## 2. Построение нормальной формы

В силу вещательности связи между осцилляторами первое уравнение системы (4) может быть решено отдельно от двух оставшихся. Асимптотика его устойчивого периодического решения хорошо известна и выписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\frac{40}{3\pi - 2}} \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \frac{2}{3\pi - 2}\right)t + c\right) + \\ &+ \varepsilon \frac{4\sqrt{5}}{3\pi - 2} \cos\left(\left(\pi - \varepsilon \frac{4}{3\pi - 2}\right)t - \gamma + 2c\right) + O(\varepsilon^{3/2}), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\gamma = \arctan(1/2)$ , а  $c$  — произвольная константа (см., например, [13]).

Для дальнейшего локального анализа системы (4) воспользуемся стандартной заменой метода нормальных форм в виде, изложенном в работе [13]:

$$u_j(t) = \sqrt{\varepsilon}(z_j(\tau)e^{i\frac{\pi}{2}t} + \bar{z}_j(\tau)e^{-i\frac{\pi}{2}t}) + \varepsilon u_{j1}(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} u_{j2}(t, \tau) + \dots, \quad (6)$$

где  $z_j(\tau)$  — комплекснозначные функции медленного времени  $\tau = \varepsilon t$ , ( $j = 2, 3$ ).

Последовательно приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $\sqrt{\varepsilon}$  и, учитывая разложение

$$z_j(\tau - \varepsilon) = z_j(\tau) - \varepsilon z_j'(\tau) + \dots,$$

а также асимптотику (5), получаем при  $\sqrt{\varepsilon}$  верное тождество.

На втором шаге алгоритма при  $\varepsilon$  возникает система уравнений на  $u_{j1}(t, \tau)$ , состоящая из двух не связанных друг с другом уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{u}_{21} &= -\frac{\pi}{2}u_{11}(t-1) + \frac{\pi}{2}(z_2^2 e^{i\pi t} + \bar{z}_2^2 e^{-i\pi t}), \\ \dot{u}_{31} &= -\frac{\pi}{2}u_{21}(t-1) + \frac{\pi}{2}(z_3^2 e^{i\pi t} + \bar{z}_3^2 e^{-i\pi t}), \end{aligned} \quad (7)$$

решение которой имеет вид:

$$\begin{aligned} u_{21} &= \frac{2-i}{5}z_2^2 e^{i\pi t} + \frac{2+i}{5}\bar{z}_2^2 e^{-i\pi t}, \\ u_{31} &= \frac{2-i}{5}z_3^2 e^{i\pi t} + \frac{2+i}{5}\bar{z}_3^2 e^{-i\pi t}. \end{aligned} \quad (8)$$

На третьем шаге алгоритма из условий разрешимости задач для  $u_{j2}(t, \tau)$  в классе 4-периодических по  $t$  функций получим следующую нормальную форму:

$$\begin{aligned} \left(1 + i\frac{\pi}{2}\right)z_2' &= iz_2 + \frac{(1-3i)\pi}{10}z_2|z_2|^2 + d\left(z_1 e^{-i\frac{\pi}{2}h} + z_3 e^{-i\frac{\pi}{2}h} - 2z_2\right), \\ \left(1 + i\frac{\pi}{2}\right)z_3' &= iz_3 + \frac{(1-3i)\pi}{10}z_3|z_3|^2 + d\left(z_1 e^{-i\frac{\pi}{2}h} + z_2 e^{-i\frac{\pi}{2}h} - 2z_3\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Для нормальной формы (9) имеет место стандартное утверждение (см., например, [13]) о соответствии ее грубых режимов решениям исходной системы (4) той же устойчивости с асимптотикой (5), (6). Следует, однако, отметить, что в случае, если система (9) обнаруживает сложное хаотическое поведение, такую теорему обосновать не удастся. В связи с этим уместно применение численных методов.

Перейдем в системе (9) к полярным переменным, выполнив для этого замену:  $z_j = \rho_j e^{i\varphi_j}$ ,  $j = 1, 2, 3$ . После подстановки получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \left(1 + i\frac{\pi}{2}\right)(\rho_2' + i\varphi_2' \rho_2) &= i\rho_2 + \frac{(1-3i)\pi}{10}\rho_2^3 + d\left(\rho_1 e^{i(\varphi_1 - \varphi_2 - \frac{\pi}{2}h)} + \rho_3 e^{i(\varphi_3 - \varphi_2 - \frac{\pi}{2}h)} - 2\rho_2\right), \\ \left(1 + i\frac{\pi}{2}\right)(\rho_3' + i\varphi_3' \rho_3) &= i\rho_3 + \frac{(1-3i)\pi}{10}\rho_3^3 + d\left(\rho_1 e^{i(\varphi_1 - \varphi_3 - \frac{\pi}{2}h)} + \rho_2 e^{i(\varphi_2 - \varphi_3 - \frac{\pi}{2}h)} - 2\rho_3\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Далее обозначим  $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$ ,  $\beta = \varphi_3 - \varphi_1$  и  $h^* = \pi h/2$ . Приравнявая действительные и мнимые части уравнений, получаем:

$$\begin{aligned} \rho_2' &= \frac{2\pi}{\pi^2 + 4}\rho_2 + \frac{\pi(2-3\pi)}{5(\pi^2 + 4)}\rho_2^3 + \frac{d}{(1 + \pi^2/4)}\left(\rho_1(\cos(\alpha + h^*) - \frac{\pi}{2}\sin(\alpha + h^*)) + \right. \\ &\quad \left. + \rho_3(\cos(\beta - \alpha - h^*) + \frac{\pi}{2}\sin(\beta - \alpha - h^*)) - 2\rho_2\right), \\ \rho_3' &= \frac{2\pi}{\pi^2 + 4}\rho_3 + \frac{\pi(2-3\pi)}{5(\pi^2 + 4)}\rho_3^3 + \frac{d}{(1 + \pi^2/4)}\left(\rho_1(\cos(\beta + h^*) - \frac{\pi}{2}\sin(\beta + h^*)) + \right. \\ &\quad \left. + \rho_2(\cos(\beta - \alpha + h^*) - \frac{\pi}{2}\sin(\beta - \alpha + h^*)) - 2\rho_3\right), \\ \alpha' &= \frac{-2}{2-3\pi} + \frac{4}{\pi^2 + 4} - \frac{\pi(\pi+6)}{5(\pi^2 + 4)}\rho_2^2 - \frac{d}{(1 + \pi^2/4)}\left(\rho_1\rho_2^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\cos(\alpha + h^*) + \right.\right. \\ &\quad \left. \left. + \sin(\alpha + h^*)\right) + \rho_3\rho_2^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\cos(\beta - \alpha - h^*) - \sin(\beta - \alpha - h^*)\right) - \pi\right), \\ \beta' &= \frac{-2}{2-3\pi} + \frac{4}{\pi^2 + 4} - \frac{\pi(\pi+6)}{5(\pi^2 + 4)}\rho_3^2 - \frac{d}{(1 + \pi^2/4)}\left(\rho_1\rho_3^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\cos(\beta + h^*) + \right.\right. \\ &\quad \left. \left. + \sin(\beta + h^*)\right) + \rho_2\rho_3^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\cos(\beta - \alpha + h^*) + \sin(\beta - \alpha + h^*)\right) - \pi\right). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\cos(\alpha + h^*) \pm \frac{\pi}{2} \sin(\alpha + h^*) = \sqrt{1 + \pi^2/4} \cos(\alpha + h^* \pm \delta),$$

$$\sin(\alpha + h^*) \mp \frac{\pi}{2} \cos(\alpha + h^*) = \sqrt{1 + \pi^2/4} \sin(\alpha + h^* \pm \delta),$$

где  $\delta = -\arctan(\pi/2)$ . Тогда, выполнив замену  $\rho_j = \sqrt{\frac{10}{3\pi-2}}\xi_j$  и замену времени  $\tau = \frac{2\pi}{\pi^2+4}s$ , получим нормальную форму, записанную в амплитудных и фазовых переменных:

$$\begin{aligned} \xi_2' &= \xi_2 - \xi_2^3 + d^* (\cos(\alpha - \delta^*) + \xi_3 \cos(\beta - \alpha + \delta^*) - 2\xi_2 \cos(\delta^* + h^*)), \\ \xi_3' &= \xi_3 - \xi_3^3 + d^* (\cos(\beta - \delta^*) + \xi_2 \cos(\beta - \alpha - \delta^*) - 2\xi_3 \cos(\delta^* + h^*)), \\ \alpha' &= b(1 - \xi_2^2) - d^* \left( \frac{1}{\xi_2} \sin(\alpha - \delta^*) - \frac{\xi_3}{\xi_2} \sin(\beta - \alpha + \delta^*) + 2 \sin(\delta^* + h^*) \right), \\ \beta' &= b(1 - \xi_3^2) - d^* \left( \frac{1}{\xi_3} \sin(\beta - \delta^*) + \frac{\xi_2}{\xi_3} \sin(\beta - \alpha - \delta^*) + 2 \sin(\delta^* + h^*) \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $b = (\pi + 6)/(3\pi - 2)$ ,  $d^* = d\sqrt{\pi^2 + 4}/\pi$ ,  $\delta^* = \delta - h^*$ .

Отметим, что система (4) имеет инвариантную плоскость  $u_2 = u_3$ , на которой вырождается в систему, моделирующую однонаправленное воздействие одного осциллятора  $u_1$  на другой ( $u_2$  или  $u_3$ ). В полученной нормальной форме (11) этому многообразию соответствует плоскость, определяемая равенствами  $\xi_2 = \xi_3$ ,  $\alpha = \beta$ . На этой плоскости система (11) упрощается до системы

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi(1 + d^* \cos \delta^* - 2d^* \cos(\delta^* + h^*) - \xi^2) + d^* \cos(\alpha - \delta^*), \\ \alpha' &= b(1 - \xi^2) - d^* \left( \frac{1}{\xi} \sin(\alpha - \delta^*) - \sin \delta^* + 2 \sin(\delta^* + h^*) \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\xi = \xi_2 = \xi_3$ .

Изучим динамику системы (12), отыскав ее простейшие режимы и условия их устойчивости.

### 3. Динамика двумерной системы

Рассмотрим сначала случай  $h^* = 0$ . В этой ситуации система (12) сводится к виду

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi(1 - d^* \cos \delta - \xi^2) + d^* \cos(\alpha - \delta), \\ \alpha' &= b(1 - \xi^2) - d^* \left( \frac{1}{\xi} \sin(\alpha - \delta) + \sin \delta \right). \end{aligned} \quad (13)$$

В силу  $2\pi$ -периодичности правых частей системы (13) по переменной  $\alpha$ , ее качественное поведение будем рассматривать на фазовом цилиндре.

Для нахождения состояний равновесия системы (13) приравняем правые части уравнений к нулю:

$$\begin{aligned} \xi(1 - d^* \cos \delta - \xi^2) + d^* \cos(\alpha - \delta) &= 0, \\ b(1 - \xi^2) - d^* \left( \frac{1}{\xi} \sin(\alpha - \delta) + \sin \delta \right) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Исключая переменную  $\alpha$ , приходим к следующему уравнению на переменную  $\eta = \xi^2$ :

$$(\eta - 1)(\eta^2(1 + b^2) + \eta(2d^*(\cos \delta + b \sin \delta) - (1 + b^2)) + d^{*2}) = 0. \quad (15)$$

Анализ уравнения (15) позволяет отыскать все состояния равновесия системы (13). В частности, выполнено следующее утверждение.

**Лемма 1.** Пусть  $d^* > d_0$ , где  $d_0 = (5\sqrt{\pi^2 + 4}(1 + \sqrt{10}))/9(3\pi - 2)$ . Тогда система (13) имеет единственное состояние равновесия  $(1, 0)^T$ . Если же  $0 < d^* < d_0$ , то, кроме этого состояния равновесия, имеются еще два:  $(\xi_{2,3}, \alpha_{2,3})^T$ , где  $\xi_{2,3} = \sqrt{\eta_{2,3}}$ ,  $\alpha_{2,3} = \delta + \arccos(\xi_{2,3}(-1 + d^* \cos \delta + \xi_{2,3}^2)(d^*)^{-1})$ , а  $\eta_{2,3}$  определяются по формулам:

$$\eta_{2,3} = \frac{d^*(-2 + 3\pi) + 5\sqrt{4 + \pi^2} \mp \sqrt{-9d^{*2}(2 - 3\pi)^2 + 10d^*(-2 + 3\pi)\sqrt{4 + \pi^2} + 25(4 + \pi^2)}}{10\sqrt{4 + \pi^2}}.$$

Устойчивость полученных состояний равновесия системы (13) определяется матрицей линейной части

$$\begin{pmatrix} 1 - d^* \cos \delta - 3\xi^{*2} & -d^* \sin(\alpha^* - \delta) \\ 2\xi^* b + d^* \xi^{*-2} \sin(\alpha^* - \delta) & -d^* \xi^{*-1} \cos(\alpha^* - \delta) \end{pmatrix}.$$

В ходе анализа указанной выше матрицы были получены условия устойчивости для каждого из трех состояний равновесия. Выполнены следующие утверждения.

**Лемма 2.** Состояние равновесия  $(1, 0)^T$  устойчиво при  $d^* > d_1 = \frac{2\sqrt{\pi^2 + 4}}{3\pi - 2}$ .

**Лемма 3.** Состояние равновесия  $(\xi_2, \alpha_2)^T$  устойчиво при  $d_1 < d^* < d_0$ , где  $d_{кр.} = (-(4 - 6\pi)\sqrt{\pi^2 + 4} + 2\sqrt{416 - 288\pi + 500\pi^2 - 72\pi^3 + 99\pi^4})/(2(20 - 12\pi + 18\pi^2))$ .

**Лемма 4.** Состояние равновесия  $(\xi_2, \alpha_2)^T$  теряет устойчивость колебательным образом с рождением устойчивого цикла (бифуркация Андронова-Хопфа) при  $d^* = d_{кр.}$ .

**Лемма 5.** Состояние равновесия  $(\xi_3, \alpha_3)^T$  рождается неустойчивым при  $d^* = d_0$ , и при  $d^* = d_1$  сливается с состоянием равновесия  $(1, 0)^T$ , отбирая у него устойчивость.

Отметим, что  $d_{кр.} < d_1 < d_0$ . Это позволяет выяснить характер и последовательность бифуркаций, происходящих на фазовом цилиндре системы (13). На основе Лемм 1 – 5 и дополняющего их численного анализа получен полный сценарий фазовых перестроек, происходящих при уменьшении параметра  $d^*$ :

1. При значениях параметра  $d^* > d_0 \approx 1.1599$  глобально устойчивым является единственное, с точностью до добавки к переменной  $\alpha$  периода, состояние равновесия  $\xi_1 = 1, \alpha_1 = 0$  (см. лемму 1 и фазовый портрет на рис. 1, построенный при  $d = 1.9$ ).
2. При  $d^* = d_0$  рождается пара состояний равновесия  $(\xi_2, \alpha_2)^T$  и  $(\xi_3, \alpha_3)^T$ , первое из которых устойчиво, а второе — неустойчиво (см. лемму 2 и иллюстрацию на рис. 2).

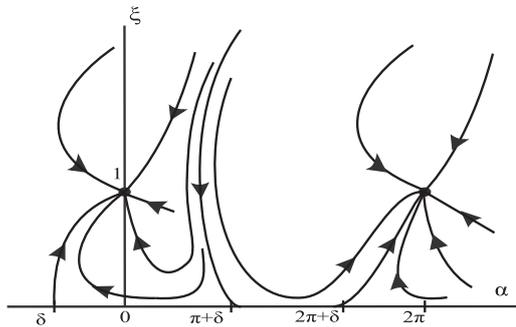


Рис. 1. Фазовый портрет при  $d^* = 1.9$   
 Fig.1. Phase portrait at  $d^* = 1.9$

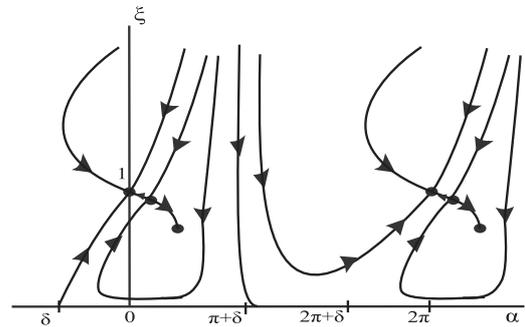


Рис. 2. Фазовый портрет при  $d^* = 1.1$   
 Fig.2. Phase portrait at  $d^* = 1.1$

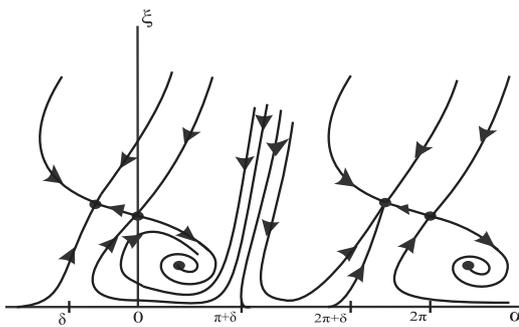


Рис. 3. Фазовый портрет при  $d^* = 0.9$   
 Fig.3. Phase portrait at  $d^* = 0.9$

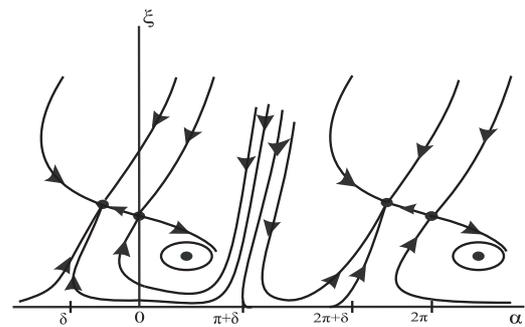


Рис. 4. Фазовый портрет при  $d^* = 0.8$   
 Fig.4. Phase portrait at  $d^* = 0.8$

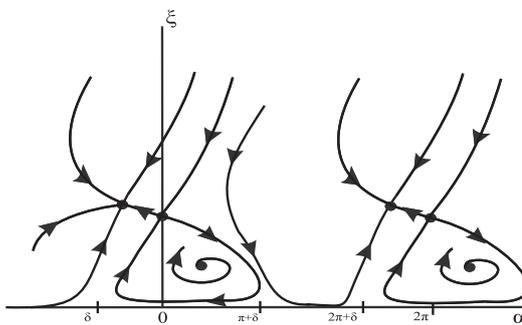


Рис. 5. Фазовый портрет при  $d^* = 0.68$   
 Fig.5. Phase portrait at  $d^* = 0.68$

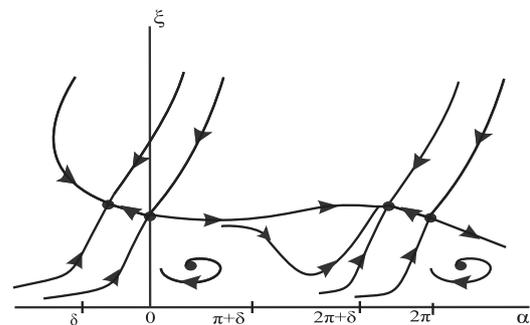


Рис. 6. Фазовый портрет при  $d^* = 0.5$   
 Fig.6. Phase portrait at  $d^* = 0.5$

3. В дальнейшем при уменьшении значения параметра  $d^*$  до критического  $d_1 \approx 1.0033$  неустойчивая неподвижная точка  $(\xi_3, \alpha_3)^T$  сливается с состоянием равновесия  $(1, 0)^T$  и отбирает его устойчивость (см. лемму 5 и фазовый портрет на рис. 3).
4. При  $d_{кр.} \approx 0.8536$  состояние равновесия  $(\xi_2, \alpha_2)^T$  теряет устойчивость с рождением устойчивого цикла (бифуркация Андронова–Хопфа) (на рис. 4 изображен фазовый портрет системы (13) при  $d = 0.8$  с родившимся в результате бифуркации Андронова–Хопфа циклом, см. лемму 4).
5. При дальнейшем изменении параметра  $d^*$  устойчивый цикл, родившийся из точки  $(\xi_2, \alpha_2)^T$ , увеличивается в размерах и при  $d_S \approx 0.6717$  (определено численно) сливается с петлей сепаратрисы седловой точки  $(1, 0)^T$  и исчезает. На рис. 5 эта ситуация проиллюстрирована при  $d = 0.68$ , которое близко к критическому значению  $d_S$ .
6. При  $0 < d^* < 0.6717$  система имеет устойчивое состояние равновесия  $(\xi_3, \alpha_3)^T$  и пару неустойчивых неподвижных точек  $(\xi_2, \alpha_2)^T$  и  $(1, 0)^T$  (см. рис. 6).

Рассмотрим теперь случай  $h^* \neq 0$ . Тогда состояния равновесия системы (12) определяются из алгебраической системы

$$\begin{aligned} \xi(1 + d^* \cos \delta^* - 2d^* \cos(\delta^* + h^*) - \xi^2) + d^* \cos(\alpha - \delta^*) &= 0, \\ b(1 - \xi^2) - d^* \left( \frac{1}{\xi} \sin(\alpha - \delta^*) - \sin \delta^* + 2 \sin(\delta^* + h^*) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Исключая из обоих уравнений  $\alpha$ , получаем для определения амплитудной переменной следующее кубическое уравнение:

$$\eta^3 + a_1 \eta^2 + a_2 \eta + a_3 = 0,$$

где  $\eta = \xi^2$ , а коэффициенты  $a_j$  вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{d^*(4 - 6\pi) - 10\sqrt{4 + \pi^2} + d^*(-2 + 3\pi)(\cos h^* + 3 \sin h^*)}{5\sqrt{4 + \pi^2}}, \\ a_2 &= \frac{(-2 + 3\pi)^2 + (6 + \pi)^2 + d^{*2}(-2 + 3\pi)^2(5 - 4 \cos h^*)}{10(4 + \pi^2)} - \\ &\quad - \frac{2d^*(-2 + 3\pi)\sqrt{4 + \pi^2}(-2 + \cos h^* + 3 \sin h^*)}{10(4 + \pi^2)}, \\ a_3 &= \frac{-d^{*2}(2 - 3\pi)^2}{10(4 + \pi^2)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Нетрудно показать, что при относительно малых положительных значениях параметра  $h^*$  утверждения Лемм 1–5 и соответственно сценарий фазовых перестроек качественно не меняются, за одним лишь исключением — пункты 5 и 6 сценария должны быть переформулированы следующим образом:

5. Устойчивый цикл, родившийся из состояния равновесия  $(\xi_2, \alpha_2)^T$ , увеличивается в размерах и при  $d^* = d_S(h)$  сливается с петлей сепаратрисы седловой точки  $(1, 0)^T$ . При этом рождается цикл, охватывающий фазовый цилиндр. Это означает, что у системы (12) имеется устойчивое решение с периодической амплитудной переменной  $\xi(t)$  и бегущей фазовой переменной  $\alpha(t)$ .
6. При дальнейшем уменьшении параметра  $d^*$  цикл, охватывающий фазовый цилиндр, исчезает и, как и при  $h = 0$ , остается устойчивым лишь одно состояние равновесия  $(\xi_3, \alpha_3)^T$ .

Подводя общий итог, следует отметить, что общий сценарий фазовых перестроек при относительно небольших значениях запаздывания сохраняется. Однако при достаточно малых  $d^*$  появляется существенная особенность, состоящая в наличии у нормальной формы цикла с бегущей фазовой переменной. Учитывая утверждение о соответствии между грубыми режимами нормальной формы и исходной задачи, приходим к выводу, что у системы (4) при  $h \neq 0$  могут существовать двухчастотные колебания с набегом рассогласования фазы между ведущим и ведомыми осцилляторами.

## Список литературы / References

- [1] Uri Alon, “Network motifs: theory and experimental approaches”, *Nature Reviews Genetics*, **8**:6 (2007), 450–461.
- [2] Milo R., Shen-Orr S., Itzkovitz S., et al., “Network motifs: Simple Building Blocks of Complex Networks”, *Science*, **298**:5594 (2002), 824–827.
- [3] Yechiam Yemini, *The Topology of Biological Networks*, Computer Science Department, Columbia University, 2004.
- [4] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов”, *Успехи математических наук*, **70**:3(423) (2015), 3–76; English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Self-excited relaxation oscillations in networks of impulse neurons”, *Russian Math. Surveys*, **70**:3 (2015), 383–452.
- [5] Глызин С. Д., Киселева Е. О., “Учет запаздывания в цепочке связи между осцилляторами”, *Модел. и анализ информ. систем*, **17**:2 (2010), 133–143; [Glyzin S. D., Kiseleva E. O., “The account of delay in a connecting element between two oscillators”, *Model. Anal. Inform. Syst.*, **17**:2 (2010), 133–143 (in Russian)].
- [6] Глызин С. Д., Солдатова Е. А., “Фактор запаздывания и десинхронизация колебаний связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо”, *Модел. и анализ информ. систем*, **17**:3 (2010), 134–143; [Glyzin S. D., Soldatova E. A., “The factor of delay in a system of coupled oscillators FitzHugh–Nagumo”, *Model. Anal. Inform. Syst.*, **17**:3 (2010), 134–143, (in Russian)].
- [7] Hutchinson G. E., “Circular causal system in ecology”, *Ann. N.-Y. Acad. Sci.*, **50** (1948), 221–246.
- [8] Глызин С. Д., “Динамические свойства простейших конечноразностных аппроксимаций краевой задачи «реакция-диффузия»”, *Дифференциальные уравнения*, **33**:6 (1997), 805–811; English transl.: Glyzin S. D., “Dynamical properties of the simplest finite-difference approximations of the “reaction-diffusion” boundary value problem”, *Differential Equations*, **33**:6 (1997), 808–814.
- [9] Глызин С. Д., “Стационарные режимы одной конечноразностной аппроксимации уравнения Хатчинсона с диффузией”, *Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений*, 1986, 112–127; [Glyzin S. D., “Stacionarnyye

- rezhimy odnoy konechnoraznostnoy approksimatsii uravneniya Khatchinsona s diffuziyey”, *Kachestvennyye i priblizhennyye metody issledovaniya operatornykh uravneniy*, 1986, 112–127, (in Russian)].
- [10] Глызин С. Д., “Учет возрастных групп в уравнении Хатчинсона”, *Модел. и анализ информ. систем*, **14:3** (2007), 29–42; [Glyzin S. D., “A registration of age groups for the Hutchinson’s equation”, *Model. Anal. Inform. Syst.*, **14:3** (2007), 29–42, (in Russian)].
- [11] Горчакова Е. В., “Динамика слабого взаимодействия в системе близких видов”, *Модел. и анализ информ. систем*, **18:1** (2011), 68–74; [Gorchakova E. V., “Dynamics of weak interaction in a system of similar species”, *Model. Anal. Inform. Syst.*, **18:1** (2011), 68–74, (in Russian)].
- [12] Толбей А. О., “Локальная динамика трех осцилляторов со связью вещательного типа”, *Модел. и анализ информ. систем*, **19:3** (2012), 105–112; [Tolbey A. O., “Local Dynamics of Three Coupled Oscillators with a Feedback Loop”, *Model. Anal. Inform. Syst.*, **19:3** (2012), 105–112, (in Russian)].
- [13] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., *Локальные методы анализа динамических систем*, ЯрГУ, Ярославль, 2006, 92 с.; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., *Lokalnye metody analiza dinamicheskikh sistem*, Yaroslavl State University, Yaroslavl, 2006, 92 pp., (in Russian)].

---

**Marushkina E. A.**, "Periodic and Quasiperiodic Solutions in the System of Three Hutchinson Equations with a Delayed Broadcast Connection", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25:1** (2018), 102–111.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-102-111

**Abstract.** The dynamics of an association of three coupled oscillators is studied. The link between the oscillators is a broadcast connection, that is, one element unilaterally effects the other two, which in turn interact with each other. An important property of the relation among the oscillators is the presence of a delay that obviously can often be found in applications. The studied system simulates the situation of population dynamics when populations are weakly connected, for example, are divided geographically. In this case one population can affect the other two, which in turn can influence each other but not the first one. Each individual oscillator is represented by the logistic equation with a delay (Hutchinson’s equation). Local asymptotic analysis of this system is done in the case of proximity of oscillator parameters to the values at which the Andronov-Hopf bifurcation occur, also the coupling coefficient in the system are assumed to be small. The method of normal forms is used. The study of the dynamics of the system in some neighborhood of a single equilibrium state is reduced to a system of ordinary differential equations on a stable integral manifold. For the construction of a normal form were found elementary modes obtained by using the symmetry of the problem, and the conditions for their stability. Taking into account the obtained asymptotic formulas, the phase reorganizations occurring in the system are numerically analyzed. It is shown that the delay in the communication circuits of the oscillators significantly affects the qualitative behaviour of the system solutions.

**Keywords:** Hutchinson’s equation, broadcasting connection, delay, normal forms, asymptotics, stability, bifurcation

**On the author:**

Elena A. Marushkina, [orcid.org/0000-0001-9183-6484](https://orcid.org/0000-0001-9183-6484), PhD, Researcher  
P.G. Demidov Yaroslavl State University,  
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: [marushkina-ea@yandex.ru](mailto:marushkina-ea@yandex.ru)

**Acknowledgments:**

The reported study was funded by RFBR, according to the research project No. 16-31-60039 mol\_a\_dk.