Моделирование и анализ информационных систем. Т. 25, № 1 (2018), с. 112–124
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 25, No 1 (2018), pp. 112–124

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-112-124

УДК 517.9

Периодические изменения автоволнового фронта в двумерной системе параболических уравнений

Мельникова А. А.[1], Дерюгина Н. Н.

получена 30 ноября 2017

Аннотация. Работа направлена на исследование решений типа фронта для нелинейной системы параболических уравнений в двумерной области. Систему можно рассматривать как математическую модель, описывающую резкое изменение физических характеристик в пространственно неоднородных средах. Система уравнений содержит малые параметры в разных степенях при дифференциальном операторе, что означает различие характерных скоростей протекания процессов для каждой из компонент. Исследование проведено с помощью методов теории контрастных структур, что позволило получить условия существования решения типа фронта, локализованного в окрестности замкнутой кривой, определить зависимость скорости фронта от времени, получить асимптотическое приближение решения нулевого и первого порядков по малому параметру. Приближенное решение позволяет подобрать параметры модели таким образом, чтобы результат соответствовал наблюдаемым процессам, объяснять и описывать особенности решений с резкими градиентами, создавать модели, обладающие устойчивыми решениями, тем самым облегчая задачу получения численных результатов. Известно, что численный эксперимент для пространственно двумерных моделей требует значительных вычислительных мощностей, применения методов параллельного программирования и не позволяет эффективно анализировать и модифицировать модели. В данной работе получено асимптотическое приближение решения, требующее обоснования, которое может быть проведено по методу дифференциальных неравенств. Метод дифференциальных неравенств в данном случае предполагает построение верхнего и нижнего решений задачи на основе асимптотики. Область применения математической модели – описание автоволновых решений в задачах экологии, биофизики, физики горения, химической кинетики.

Ключевые слова: сингулярные возмущения, урбоэкосистема, автоволновое решение, внутренний переходный слой, система реакция-диффузия.

Для цитирования: Мельникова А. А., Дерюгина Н. Н., "Периодические изменения автоволнового фронта в двумерной системе параболических уравнений", *Моделирование и анализ информационных систем*, **25**:1 (2018), 112–124.

Об авторах:
Мельникова Алина Александровна, orcid.org/0000-0001-9019-0263, канд. физ.-мат. наук, ассистент,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Физический факультет,
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: melnikova@physics.msu.ru.

Дерюгина Наталья Николаевна, orcid.org/0000-0002-7804-3065, магистрант,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Физический факультет,
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: derunat@gmail.com.

Благодарности:
[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 16-01-00437, 18-31-00204, 18-01-00424, 18-01-00865).

Введение

В работе исследованы решения типа фронта для нелинейной системы параболических уравнений в двумерной области. Систему можно рассматривать как математическую модель, описывающую резкое изменение физических характеристик в пространственно неоднородных средах. Физическая интерпретация решения типа фронта – фронт горения или фронт концентрации в химической реакции. Рассматриваемая система содержит малые параметры в разных степенях при дифференциальном операторе, что означает различие характерных скоростей протекания процессов для компонент системы.

Исследование системы проведено с помощью методов теории контрастных структур [1], [2], [3], что позволило получить условия существования решения типа фронта, локализованного в окрестности замкнутой кривой, определить скорость фронта в зависимости от времени и координаты по кривой фронта, получить асимптотическое приближение решения нулевого и первого порядков по малому параметру.

Применение теории контрастных структур к описанию и обоснованию решений сингулярно возмущенных задач для параболических уравнений и систем уравнений в различных постановках, в том числе и с периодическими условиями, рассматривалось ранее, например, в работах [4], [5], [6]. Движение плоского фронта для задачи с уравнением реакция-адвекция-диффузия описано в статье [7]. Соответствующая системе эллиптическая задача рассмотрена в работе [8].

Приведем пример применения двухкомпонентной параболической системы в задачах экологии. В работах [9], [10] предложена модель урбоэкосистемы, в которой город представляется как активная среда, где взаимодействуют некие факторы – социально-экономические или экологические по типу активатор-ингибитор. Взаимодействие приводит к распространению городской инфраструктуры на большую территорию. В определенный момент этот процесс останавливается за счет действия ингибирующих факторов. Создание подобной модели предполагает определение условий существования решений типа фронта в окрестности замкнутой кривой – границы города. Асимптотика типа фронта для одномерного случая модели урбоэкосистемы получена в работе [11].

Приближенное решение позволяет подобрать параметры модели таким образом, чтобы результат соответствовал наблюдаемым процессам.

Заметим, что численный эксперимент для пространственно двумерных моделей требует значительных вычислительных мощностей и применения методов параллельного программирования (см. работу [12]) и не позволяет эффективно анализировать и модифицировать модель. Область применения исследуемой системы в моделировании не ограничивается задачами экологии. Разработанные методы анализа и получения приближенных решений систем параболических уравнений могут применяться для исследования подобных моделей из других областей науки. Двумерный автоволновой фронт используется, например, в модели формировании окраса в живой природе [13].

Асимптотическое приближение требует обоснования, которое может быть проведено по методу дифференциальных неравенств, как в работах [7], [8].

1. Постановка задачи

Рассматривается краевая задача для системы параболических уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon^4\Delta u - \varepsilon^4 u_t = f(u,v,x,t,\varepsilon), \\ \varepsilon^2\Delta v - \varepsilon^2 v_t = g(u,v,x,t,\varepsilon), \\ x=(x_1,x_2)\in D\subset R^2, t\in(0;+\infty) \end{cases} \tag{1}$$

с краевыми условиями Неймана на границе области и с периодическими условиями по переменной t:

$$\begin{gathered} \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D}=0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\partial D}=0, \quad t\in(0;+\infty), \\ u(x,t)=u(x,t+T), \quad v(x,t)=v(x,t+T), \quad x\in D, \quad t\in(0;+\infty). \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $\varepsilon>\varepsilon_0>0$ — малый параметр, Δ – оператор Лапласа, D — ограниченная односвязная область с достаточно гладкой границей ∂D, $T>0$, f и g — достаточно гладкие T-периодические функции в области $\{(u,v,x,t,\varepsilon)\in I_u\times I_v\times\bar{D}\times(0;+\infty)\times(0;\varepsilon_0]\}$, I_u и I_v — некоторые промежутки изменения переменных u и v, $\dfrac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали к ∂D.

Предполагаем, что выполнены условия:

A1. Уравнение $f(u,v,x,t,0)=0$ при $(v,x,t)\in I_v\times\bar{D}\times(0;+\infty)$ имеет относительно u ровно три корня $u=\varphi^{(-)}(v,x,t)$, $u=\varphi^{(+)}(v,x,t)$, $u=\varphi^0(v,x,t)$, такие, что $\varphi^{(-)}(v,x,t)<\varphi^0(v,x,t)<\varphi^{(+)}(v,x,t)$ и $f_u(\varphi^{(\pm)}(v,x,t),v,x,t,0)>0$, $f_u(\varphi^0(v,x),v,x,t,0)<0$.

A2. Каждое из уравнений $h^{(\pm)}(v,x,t):=g(\varphi^{(\pm)}(v,x,t),v,x,t,0)=0$, при $x\in\bar{D}$ имеет относительно v единственное решение $v=v^{(\pm)}(x,t)\in I_v$, причем во всей области $(x,t)\in\bar{D}\times(0;+\infty)$ выполнены неравенства $v^{(-)}(x,t)<v^{(+)}(x,t)$ и $h_v^{(\pm)}(v^{(\pm)}(x,t),x,t)>0$.

В соответствии с условиями A1 и A2 вырожденная система (1) (то есть система (1) при $\varepsilon=0$) имеет относительно u два устойчивых корня $\varphi^{(-)}(v,x,t)$, $\varphi^{(+)}(v,x,t)$ и два устойчивых корня $v^{(-)}(x,t)$, $v^{(+)}(x,t)$ относительно v. В работе исследовано решение с внутренним переходным слоем, в котором происходит резкий переход от одного устойчивого корня вырожденной системы к другому. В результате образуется контрастная структура типа ступеньки. Переход происходит в окрестности некоторой замкнутой кривой C, лежащей внутри области D. Будем считать, что внутри кривой C решение близко к решениям $\varphi^{(+)}(\bar{v}^{(+)},x,t)$ и $v^{(+)}(x,t)$ вырожденной системы, а вне кривой – к решениям $\varphi^{(-)}(\bar{v}^{(-)},x,t)$ и $v^{(-)}(x,t)$.

Положение внутреннего переходного слоя периодически изменяется со временем. В работе изложена методика получения асимптотического приближения решения нулевого и первого порядков. Алгоритм получения асимптотики следующих порядков аналогичен алгоритму для первого порядка.

2. Метод решения

Выберем внутри области D некоторую точку $O(x_1^0;x_2^0)$ и в окрестности этой точки перейдем к полярной системе координат (ρ,θ) $(\rho\geq 0,\ 0\leq\theta<2\pi)$ с полюсом в точке

O по формулам $x_1 = x_1^0 + \rho\cos\theta, \quad x_2 = x_2^0 + \rho\sin\theta$. Для упрощения записи будем считать $x_1^0 = 0$, $x_2^0 = 0$. В координатах (ρ, θ) кривая C задается уравнением

$$\rho = \rho_c(\theta, t) := \rho_0(\theta, t) + \varepsilon\rho_1(\theta, t). \tag{3}$$

Обозначим через $v_c = v_c(\theta, t, \varepsilon)$ значение v – компоненты решения задачи (1), (2) на кривой C в момент времени t. Будем искать $v_c(\theta, t, \varepsilon)$ в виде суммы

$$v_c(\theta, t, \varepsilon) = v_0(\theta, t) + \varepsilon v_1(\theta, t). \tag{4}$$

Нулевой порядок функций $\rho_c(\theta, t, \varepsilon)$ и $v_c(\theta, t, \varepsilon)$ определяется условием:

A3. Пусть система уравнений относительно v и ρ

$$\int\limits_{v^{(-)}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,t)}^{v} h^{(-)}(v', \rho\cos\theta, \rho\sin\theta, t)\, dv' + \int\limits_{v}^{v^{(+)}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,t)} h^{(+)}(v', \rho\cos\theta, \rho\sin\theta, t)\, dv' = 0,$$

$$\int\limits_{\varphi^{(-)}(v,\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,t)}^{\varphi^{(+)}(v,\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,t)} f(u, v, \rho\cos\theta, \rho\sin\theta, t, 0)\, du = 0$$

имеет единственное периодическое решение $v = v_0(\theta, t)$, $\rho = \rho_0(\theta, t)$, $(0 \le \theta < 2\pi,\ t \in (0; +\infty))$, причем функция $\rho_0(\theta, t)$ в каждый момент времени t определяет простую замкнутую гладкую кривую C_0, лежащую внутри области D и справедливы неравенства

$$v^{(-)}(\rho_0(\theta, t)\cos\theta, \rho_0(\theta, t)\sin\theta, t) < v_0(\theta, t) < v^{(+)}(\rho_0(\theta, t)\cos\theta, \rho_0(\theta, t)\sin\theta, t).$$

Функции $\rho_1(\theta, t)$, $v_1(\theta, t)$ будут найдены в процессе построения асимптотического приближения решения первого порядка задачи (1)–(2). В дальнейшем с целью уменьшения громоздкости формул будем писать v_c вместо $v_c(\theta, t, \varepsilon)$ и ρ_c вместо $\rho_c(\theta, t, \varepsilon)$.

Для описания поведения решения в переходном слое в достаточно малой окрестности кривой C вводятся локальные координаты (r, θ). Величина $|r|$ является расстоянием от точки $x = (x_1, x_2)$ до кривой C вдоль нормали к ней, причем $r > 0$, если x лежит внутри области, ограниченной кривой C; $r < 0$, если x лежит вне этой области; $r = 0$, если $x \in C$. Для точек, лежащих в достаточно малой окрестности кривой C, нормали, опущенные на кривую, не пересекаются. Таким образом в малой окрестности можно установить однозначное соответствие между координатами (x_1, x_2) и (r, θ).

Переход от координат (x_1, x_2) к (r, θ) осуществляется по формулам:

$$x_1 = \rho_c(\theta, t)\cos\theta - r\cdot\sin\alpha, \quad x_2 = \rho_c(\theta, t)\sin\theta + r\cos\alpha,$$

где α – это угол между осью Ox_2 и внутренней нормалью к кривой C. Единичный вектор внутренней нормали к кривой C имеет координаты $\{-\sin\alpha, \cos\alpha\}$, где

$$\sin\alpha(\theta, t) = \frac{\rho_{c\theta}(\theta, t)\sin\theta + \rho_c(\theta, t)\cos\theta}{\sqrt{\rho_{c\theta}(\theta, t)^2 + \rho_c(\theta, t)^2}}, \quad \cos\alpha(\theta, t) = \frac{\rho_{c\theta}(\theta, t)\cos\theta - \rho_c(\theta, t)\sin\theta}{\sqrt{\rho_{c\theta}(\theta, t)^2 + \rho_c(\theta, t)^2}}.$$

Вид асимптотики

Кривая C в каждый момент времени $t \in (0; +\infty)$ разделяет область $\bar{D}$ на две подобласти $\bar{D}^{in}$ и $\bar{D}^{ex}$. Область $\bar{D}^{in}$ ограничена кривой C, а границей области $\bar{D}^{ex}$ являются C и ∂D. Асимптотика решения задачи строится отдельно в каждой из областей $\bar{D}^{in}$ и $\bar{D}^{ex}$:

$$u = \begin{cases} u^{in}(x,t), \ (x,t) \in \bar{D}^{in} \times (0; +\infty), \\ u^{ex}(x,t), \ (x,t) \in \bar{D}^{ex} \times (0; +\infty), \end{cases} \qquad v = \begin{cases} v^{in}(x,t), \ (x,t) \in \bar{D}^{in} \times (0; +\infty), \\ v^{ex}(x,t), \ (x,t) \in \bar{D}^{ex} \times (0; +\infty). \end{cases}$$

Функции $u^{ex}(x,t)$, $u^{in}(x,t)$ вдали от кривой перехода C близки к функциям регулярной части $\bar{u}^{(-)}(x,t)$ и $\bar{u}^{(+)}(x,t)$. Эти функции представим суммами: $\bar{u}^{(\pm)}(x,t,\varepsilon) = \bar{u}_0^{(\pm)}(x,t) + \varepsilon \bar{u}_1^{(\pm)}(x,t)$. Около кривой перехода решение описывается функциями переходного слоя $Q^{(\pm)}u(\xi,\theta,t,\varepsilon) = Q_0^{(\pm)}u(\xi,\theta,t) + \varepsilon Q_1^{(\pm)}u(\xi,\theta,t)$ и $M^{(\pm)}u(\sigma,\theta,t,\varepsilon) = M_0^{(\pm)}u(\sigma,\theta,t) + \varepsilon M_1^{(\pm)}u(\sigma,\theta,t)$. В окрестности кривой C введены растянутые переменные $\xi = r/\varepsilon$ и $\sigma = r/\varepsilon^2$. Для v-компоненты функции $\bar{v}^{(\pm)}(x,t)$, $Q^{(\pm)}v(\xi,\theta,t,\varepsilon)$, $M^{(\pm)}v(\sigma,\theta,t,\varepsilon)$ имеют аналогичный вид, за исключением того факта, что $M^{(\pm)}v(\sigma,\theta,t,\varepsilon) = M_0^{(\pm)}v(\sigma,\theta,t) + \varepsilon M_1^{(\pm)}v(\sigma,\theta,t) + \varepsilon^2 M_2^{(\pm)}v(\sigma,\theta,t)$. Вблизи границы области D приближенное решение $u^{ex}(x,t)$ и $v^{ex}(x,t)$ описывается пограничными функциями $Pu(\zeta,l,t)$ и $Pv(\zeta,l,t)$ ((ζ,l) – локальные погранслойные переменные в окрестности границы ∂D). Асимптотическое приближение решения первого порядка по параметру ε для каждой части u- и v-компонент представляется в виде сумм:

$$\begin{aligned} u^{ex} &= \bar{u}^{(-)}(x,t,\varepsilon) + Q^{(-)}u(\xi,\theta,t,\varepsilon) + M^{(-)}u(\sigma,\theta,t,\varepsilon) + \varepsilon Pu(\zeta,l,t), \\ u^{in} &= \bar{u}^{(+)}(x,t,\varepsilon) + Q^{(+)}u(\xi,\theta,t,\varepsilon) + M^{(+)}u(\sigma,\theta,t,\varepsilon); \\ v^{ex} &= \bar{v}^{(-)}(x,t,\varepsilon) + Q^{(-)}v(\xi,\theta,t,\varepsilon) + M^{(-)}v(\sigma,\theta,t,\varepsilon) + \varepsilon Pv(\zeta,l,t), \\ v^{in} &= \bar{v}^{(+)}(x,t,\varepsilon) + Q^{(+)}v(\xi,\theta,t,\varepsilon) + M^{(+)}v(\sigma,\theta,t,\varepsilon). \end{aligned} \tag{5}$$

Для нахождения функций регулярной части и переходного слоя применяется алгоритм Васильевой (см. [1]) с соответствующей модификацией на системы уравнений ([3], [8]). Функции погранслоя определяются стандартно и не отличаются от стационарного случая, описанного в [8].

Асимптотические разложения u^{in}, u^{ex} и v^{in} и v^{ex} и их производные по направлению нормали к кривой C непрерывно сшиваются на этой кривой. Условия непрерывности асимптотических разложений для функций v и u имеют вид

$$\begin{aligned} &\bar{v}^{(\pm)}(x,t,\varepsilon)\big|_{x\in C} + Q^{(\pm)}v(0,\theta,t,\varepsilon) + M^{(\pm)}v(0,\theta,t,\varepsilon) = v_c(\theta,t,\varepsilon), \\ &\bar{u}^{(\pm)}(x,t,\varepsilon)\big|_{x\in C} + Q^{(\pm)}u(0,\theta,t,\varepsilon) + M^{(\pm)}u(0,\theta,t,\varepsilon) = \varphi^0(v_c(\theta,t,\varepsilon),x,t)\big|_{x\in C}, \end{aligned} \tag{6}$$

то есть кривая C определена условием $u(x,t) = \varphi^0(v_c,x,t)_{x\in C}$. Потребуем выполнения условия непрерывности производных функций $u^{ex}(x,t)$, $u^{in}(x,t)$ и $v^{ex}(x,t)$, $v^{in}(x,t)$:

$$\frac{\partial u^{ex}}{\partial n}\Big|_C = \frac{\partial u^{in}}{\partial n}\Big|_C, \quad \frac{\partial v^{ex}}{\partial n}\Big|_C = \frac{\partial v^{in}}{\partial n}\Big|_C. \tag{7}$$

3. Построение асимптотического приближения

3.1. Регулярная часть

Подставляя в исходную систему вместо u и v регулярную часть асимптотического приближения стандартным способом, описанным, например, в [8], получаем системы конечных уравнений для определения функций $\bar{u}(x,t)$ и $\bar{v}(x,t)$. Функции нулевого порядка $\bar{u}_0^{(\pm)}(x,t)$, $\bar{v}_0^{(\pm)}(x,t)$ определяются из вырожденной системы

$$\begin{cases} 0 = f(\bar{u}_0^{(\pm)}(x,t), \bar{v}_0^{(\pm)}(x,t), x, t, 0), \\ 0 = g(\bar{u}_0^{(\pm)}(x,t), \bar{v}_0^{(\pm)}(x,t), x, t, 0) \end{cases}$$

следующим образом:

$$\bar{v}_0^{(-)}(x,t) = v^{(-)}(x,t); \quad \bar{v}_0^{(+)}(x,t) = v^{(+)}(x,t);$$
$$\bar{u}_0^{(-)}(x,t) = \varphi^{(-)}(v^{(-)}(x,t), x, t); \quad \bar{u}_0^{(+)} = \varphi^{(+)}(v^{(+)}(x,t), x, t).$$

Система уравнений для нахождения функций первого порядка $\bar{u}_1^{(\pm)}(x,t)$ и $\bar{v}_1^{(\pm)}(x,t)$ имеет вид

$$\begin{cases} \bar{f}_u^{(\pm)}(x,t)\bar{u}_1^{(\pm)} + \bar{f}_v^{(\pm)}(x,t)\bar{v}_1^{(\pm)} - \bar{f}_\varepsilon^{(\pm)}(x,t) = 0; \\ \bar{g}_u^{(\pm)}(x,t)\bar{u}_1^{(\pm)} + \bar{g}_v^{(\pm)}(x,t)\bar{v}_1^{(\pm)} - \bar{g}_\varepsilon^{(\pm)}(x,t) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Здесь введены обозначения: $\bar{f}_u^{(\pm)}(x,t) = f_u(\bar{u}_0^{(\pm)}(x,t), \bar{v}_0^{(\pm)}(x,t), x, t, 0)$. И аналогичный смысл имеют обозначения $\bar{f}_v^{(\pm)}(x,t)$, $\bar{f}_\varepsilon^{(\pm)}(x,t)$, $\bar{g}_u^{(\pm)}(x,t)$, $\bar{g}_v^{(\pm)}(x,t)$, $\bar{g}_\varepsilon^{(\pm)}(x,t)$. Системы (8) разрешимы, так как определители систем не равны нулю по условиям (A1), (A2): $\Delta^{(\pm)} = \bar{f}_u^{(\pm)}(x,t)\cdot\bar{g}_v^{(\pm)}(x,t) - \bar{f}_v^{(\pm)}(x,t)\cdot\bar{g}_u^{(\pm)}(x,t) = \bar{f}_u^{(\pm)}(x,t)\cdot\bar{h}_v^{(\pm)}(x,t) \neq 0$.

Для упрощения записи будем обозначать функции $v(x,t)_{x\in C} = v(\rho_c\cos\theta - r\sin\alpha,$ $\rho_c\sin\theta + r\cos\alpha, t)$ как $v(r,\rho_c,\theta,t)$ и аналогичные обозначения будем использовать для других функций векторной переменной $x = (x_1, x_2)$.

3.2. Функции переходного слоя

3.2.1. Пересчет оператора

Функции переходного слоя описывают поведение решения вблизи кривой перехода C и зависят от переменных ξ и σ. Перепишем исходный оператор задачи в этих переменных:

$$\Delta_{\xi,\theta} - \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\varepsilon}\cdot L_1 + \sum_{i=2}\varepsilon^{i-2}L_i; \quad \Delta_{\sigma,\theta} - \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon^4}\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} + \sum_{i=1}\varepsilon^{i-3}N_i;$$

где L_i, N_i, $i \geqslant 1$ – дифференциальные операторы первого и второго порядка. В частности, оператор L_1 имеет вид:

$$\begin{aligned} L_1 = \rho_c\sin(\theta-\alpha)(\alpha_\theta+1)\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\rho_c\rho_{ct}}{\sqrt{\rho_{c\theta}^2+\rho_c^2}}\frac{\partial}{\partial\xi} - \\ -\Big(\rho_{c\theta}\alpha_\theta\cos(\theta+\alpha) + \rho_{c\theta\theta}\sin(\theta-\alpha) + 2\rho_{c\theta}\cos(\theta-\alpha)\Big)\frac{\partial}{\partial\xi}. \end{aligned} \tag{9}$$

Запишем систему уравнений для функций переходного слоя, используя операторы в новых переменных:

$$\Big(\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\varepsilon^3L_1+\sum_{i=2}\varepsilon^{i+2}L_i\Big)Q^{(\pm)}u=Q^{(\pm)}f;\ \ \Big(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\varepsilon L_1+\sum_{i=2}\varepsilon^{i}L_i\Big)Q^{(\pm)}v=Q^{(\pm)}g,$$
$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}+\sum_{i=1}\varepsilon^{i+1}N_i\Big)M^{(\pm)}u=M^{(\pm)}f;\ \ \Big(\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}+\sum_{i=1}\varepsilon^{i-1}N_i\Big)M^{(\pm)}v=M^{(\pm)}g. \tag{10}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}&Q^{(\pm)}f=f(\bar u^{(\pm)}(\varepsilon\xi,\rho_c,\theta,t,\varepsilon)+Q^{(\pm)}u,\bar v^{(\pm)}(\varepsilon\xi,\rho_c,\theta,t,\varepsilon)+Q^{(\pm)}v,\varepsilon\xi,\rho_c,\theta,t,\varepsilon)-\\&-f(\bar u^{(\pm)}(\varepsilon\xi,\rho_c,\theta,t,\varepsilon),\bar v^{(\pm)}(\varepsilon\xi,\rho_c,\theta,t,\varepsilon),\varepsilon\xi,\rho_c,\theta,t,\varepsilon),\\&M^{(\pm)}f=f(\bar u^{(\pm)}(\varepsilon^2\sigma,\rho_c,\theta,t,\varepsilon)+Q^{(\pm)}u(\varepsilon\sigma,\theta,t,\varepsilon)+M^{(\pm)}u,\bar v^{(\pm)}(\varepsilon^2\sigma,\rho_c,\theta,t,\varepsilon)+\\&+Q^{(\pm)}v(\varepsilon\sigma,\theta,t,\varepsilon)+M^{(\pm)}v,\varepsilon^2\sigma,\rho_c,\theta,t,\varepsilon)-f(\bar u^{(\pm)}(\varepsilon^2\sigma,\rho_c,\theta,t,\varepsilon)+\\&+Q^{(\pm)}u(\varepsilon\sigma,\theta,t,\varepsilon),\bar v^{(\pm)}(\varepsilon^2\sigma,\rho_c,\theta,t,\varepsilon)+Q^{(\pm)}v(\varepsilon\sigma,\theta,t,\varepsilon),\varepsilon^2\sigma,\rho_c,\theta,t,\varepsilon)\end{aligned}$$

и аналогичный смысл имеют обозначения $Q^{(\pm)}g$ и $M^{(\pm)}g$. Подробное описание этих функций было дано, например, в [8]. Под обозначением $\bar u^{(\pm)}(\varepsilon\xi,\rho_c,\theta,t,\varepsilon)$ подразумеваем $\bar u^{(\pm)}(\rho_c\cos\theta-\varepsilon\xi\sin\alpha,\rho_c\sin\theta+\varepsilon\xi\cos\alpha,t,\varepsilon)$, как было отмечено в конце пункта 3.1.

Уравнения для определения функций переходного слоя нулевого и первого порядка находятся приравниванием коэффициентов при соответствующих степенях ε в равенствах (10). Граничные условия для функций переходного слоя получаются из условий непрерывного сшивания (6) в нулевом и первом порядках разложения по степеням ε (при этом функции v_c и ρ_c не раскладываются в суммы). Для всех функций переходного слоя выполняются условия равенства нулю на бесконечности:

$$\begin{aligned}&Q_i^{(\pm)}u(\pm\infty,\theta,t)=0;\ \ Q_i^{(\pm)}v(\pm\infty,\theta,t)=0,\ i=0,1;\\&M_i^{(\pm)}u(\pm\infty,\theta,t)=0;\ \ M_i^{(\pm)}v(\pm\infty,\theta,t)=0,\ i=0,1.\end{aligned} \tag{11}$$

3.2.2. Функции переходного слоя нулевого порядка

Функции $M_0^{(\pm)}v$ определяются из уравнений $\dfrac{\partial^2}{\partial\sigma^2}M_0^{(\pm)}v=0$, которые с учетом (11) имеют только тривиальные решения

$$M_0^{(\pm)}v(\sigma,\theta,t)=0.$$

Функции $Q_0^{(\pm)}v$, $Q_0^{(\pm)}u$ определяются из систем уравнений:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2Q_0^{(\pm)}v}{\partial\xi^2}=g(\bar u_0^{(\pm)}(0,\rho_c,\theta,t)+Q_0^{(\pm)}u,\bar v_0^{(\pm)}(0,\rho_c,\theta,t)+Q_0^{(\pm)}v,0,\rho_c,\theta,t,0),\\&0=f(\bar u_0^{(\pm)}(0,\rho_c,\theta,t)+Q_0^{(\pm)}u,\bar v_0^{(\pm)}(0,\rho_c,\theta,t)+Q_0^{(\pm)}v,0,\rho_c,\theta,t,0).\end{aligned} \tag{12}$$

Из уравнений (12) с учетом условия A1 получаем уравнения для функций $Q_0^{(\pm)}u$:

$$\begin{aligned}&Q_0^{(-)}u=\varphi^{(-)}(\bar v_0^{(-)}(0,\rho_c,\theta,t)+Q_0^{(-)}v(\xi,\theta,t))-\bar u_0^{(-)}(0,\rho_c,\theta,t);\\&Q_0^{(+)}u=\varphi^{(+)}(\bar v_0^{(+)}(0,\rho_c,\theta,t)+Q_0^{(+)}v(\xi,\theta,t))-\bar u_0^{(+)}(0,\rho_c,\theta,t).\end{aligned} \tag{13}$$

Подставив формулы (13) в уравнения (12), получаем задачи для нахождения функций $Q_0^{(\pm)}v$:

$$\frac{\partial^2 Q_0^{(\pm)}v}{\partial \xi^2} = h^{(\pm)}(\bar{v}_0^{(\pm)}(0, \rho_c, \theta, t) + Q_0^{(\pm)}v, 0, \rho_c, \theta, t) \tag{14}$$

с граничными условиями из (6) и (11):

$$Q_0^{(\pm)}v(0, \theta, t) = v_c - \bar{v}_0^{(\pm)}(0, \rho_c, \theta, t), \quad Q_0^{(\pm)}v(\pm\infty, \theta, t) = 0. \tag{15}$$

Задачу (14)–(15) можно свести к задаче для уравнения первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_0^{(-)}v}{\partial \xi} &= \sqrt{2}\left(\int\limits_{\bar{v}_0^{(-)}(0,\rho_c,\theta,t)}^{\bar{v}_0^{(-)}(0,\rho_c,\theta,t)+Q_0^{(-)}v} h^{(-)}(v, 0, \rho_c, \theta, t)dv\right)^{1/2}; \\ \frac{\partial Q_0^{(+)}v}{\partial \xi} &= \sqrt{2}\left(\int\limits_{\bar{v}_0^{(+)}(0,\rho_c,\theta,t)}^{\bar{v}_0^{(+)}(0,\rho_c,\theta,t)+Q_0^{(+)}v} h^{(+)}(v, 0, \rho_c, \theta, t))dv\right)^{1/2} \end{aligned} \tag{16}$$

с условием $Q_0^{(\pm)}v(0, \theta, t) = v_c - \bar{v}_0^{(\pm)}(0, \rho_c, \theta, t)$.

Задачи для определения функций $M_0^{(\pm)}u$ имеют вид:

$$\frac{\partial^2 M_0^{(\pm)}u}{\partial \sigma^2} = f(\varphi^{(\pm)}(v_c, 0, \rho_c, \theta, t) + M_0^{(\pm)}u, v_c, 0, \rho_c, \theta, t, 0), \tag{17}$$

$$M_0^{(\pm)}u(0, \theta, t) = \varphi^0(v_c, 0, \rho_c, \theta, t) - Q_0^{(\pm)}u(0, \theta, t) - \bar{u}_0^{(\pm)}(0, \rho_c, \theta, t), \quad M_0^{(\pm)}u(\pm\infty, \theta, t) = 0. \tag{18}$$

Переходим от уравнений (17) к уравнениям первого порядка с условиями при $\sigma = 0$ из (18):

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_0^{(-)}u}{\partial \sigma} &= \sqrt{2}\left(\int\limits_{\varphi^{(-)}(v_c,0,\rho_c,\theta,t)}^{\varphi^{(-)}(v_c,0,\rho_c,\theta,t)+M_0^{(-)}u} f(u, v_c, 0, \rho_c, \theta, t, 0)du\right)^{1/2}; \\ \frac{\partial M_0^{(+)}u}{\partial \sigma} &= \sqrt{2}\left(\int\limits_{\varphi^{(+)}(v_c,0,\rho_c,\theta,t)}^{\varphi^{(+)}(v_c,0,\rho_c,\theta,t)+M_0^{(+)}u} f(u, v_c, 0, \rho_c, \theta, t, 0)du\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{19}$$

3.2.3. Проверка условия гладкого сшивания в нулевом порядке

Заметим, что функции $Q_0^{(\pm)}v(\xi, \theta, t)$ и $M_0^{(\pm)}u(\sigma, \theta, t)$, определяемые из задач (14)–(15) и (17)–(18), зависят от величин ρ_c и v_c как от параметров. Определим функции $\Phi^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \rho_c, v_c)$, $\Psi^{(\pm)}(\sigma, \theta, t, \rho_c, v_c)$ соотношениями:

$$\Phi^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \rho_c, v_c) := \frac{\partial Q_0^{(\pm)}v}{\partial \xi}, \quad \Psi^{(\pm)}(\sigma, \theta, t, \rho_c, v_c) := \frac{\partial M_0^{(\pm)}u}{\partial \sigma}. \tag{20}$$

Подставим в условия (7) непрерывности производных асимптотические приближения первого порядка, заданные как суммы функций регулярной части и переходного слоя, используем обозначения (20) и запишем получившиеся равенства:

$$
\begin{aligned}
&\big(\Phi^{(-)}(0,\theta,t,\rho_c,v_c)-\Phi^{(+)}(0,\theta,t,\rho_c,v_c)\big)+\varepsilon\left(\frac{\partial\bar v^{(-)}}{\partial r}-\frac{\partial\bar v^{(+)}}{\partial r}\right)_{r=0}+\\
&\varepsilon\left(\frac{\partial Q_1^{(-)}v}{\partial\xi}-\frac{\partial Q_1^{(+)}v}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}+\varepsilon^{-1}\left(\frac{\partial M^{(-)}v}{\partial\sigma}-\frac{\partial M^{(+)}v}{\partial\sigma}\right)_{\sigma=0}=0,\\
&\big(\Psi^{(-)}(0,\theta,t,\rho_c,v_c)-\Psi^{(+)}(0,\theta,t,\rho_c,v_c)\big)+\varepsilon^2\left(\frac{\partial\bar u^{(-)}}{\partial r}-\frac{\partial\bar u^{(+)}}{\partial r}\right)_{r=0}+\\
&\varepsilon\left(\frac{\partial Q^{(-)}u}{\partial\xi}-\frac{\partial Q^{(+)}u}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}+\varepsilon\left(\frac{\partial M_1^{(-)}u}{\partial\sigma}-\frac{\partial M_1^{(+)}u}{\partial\sigma}\right)_{\sigma=0}=0.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Запишем условия (21) в нулевом порядке по ε, учитывая разложения функций ρ_c и v_c в суммы (3) и (4):

$$
\Phi^{(-)}(0,\theta,t,\rho_0,v_0)=\Phi^{(+)}(0,\theta,t,\rho_0,v_0),\quad \Psi^{(-)}(0,\theta,t,\rho_0,v_0)=\Psi^{(+)}(0,\theta,t,\rho_0,v_0). \tag{22}
$$

Если подставить в эти равенства явные выражения (16), (19) для функций $\Phi^{(\pm)}(0,\theta,t,\rho_0,v_0)$ и $\Psi^{(\pm)}(0,\theta,t,\rho_0,v_0)$ и домножить каждое уравнение на сопряженное, то получим систему равенств, совпадающую с системой из условия А3. Таким образом, условия сшивания производных асимптотических разложений в нулевом порядке выполнены в силу условия А3.

3.2.4. Функции переходного слоя первого порядка

Введем обозначения:

$$
\begin{aligned}
&\tilde f^{(\pm)}(\xi,\theta,t)=f(\bar u_0^{(\pm)}(0,\rho_c,\theta,t)+Q_0^{(\pm)}u(\xi,t),\bar v_0^{(\pm)}(0,\rho_c,\theta,t)+Q_0^{(\pm)}v(\xi,t),0,\rho_c,\theta,t,0),\\
&\hat f^{(\pm)}(\sigma,\theta,t)=f(\varphi^{(\pm)}(v_c,0,\rho_c,\theta,t)+M_0^{(\pm)}u(\sigma,\theta,t),v_c,0,\rho_c,\theta,t,0),\\
&\tilde h^{(\pm)}(\xi,\theta,t)=h(\bar v_0^{(\pm)}(0,\rho_c,\theta,t)+Q_0^{(\pm)}v(\xi,\theta,t),0,\rho_c,\theta,t),\\
&\tilde\varphi^{(\pm)}(\xi,\theta,t)=\varphi^{(\pm)}\left(\bar v_0^{(\pm)}(0,\rho_c,\theta,t)+Q_0^{(\pm)}v(\xi,\theta,t),0,\rho_c,\theta,t\right),\\
&\bar\varphi^{(\pm)}(\theta,t)=\varphi^{(\pm)}\left(\bar v_0^{(\pm)}(0,\rho_c,\theta,t),0,\rho_c,\theta,t\right).
\end{aligned}
$$

Аналогичный смысл имеют обозначения $\tilde g^{(\pm)}(\xi,\theta,t)$ и $\hat g^{(\pm)}(\sigma,\theta,t)$.

Функции $M_1^{(\pm)}v(\sigma,\theta,t)$ получаются из задач: $\dfrac{\partial^2 M_1^{(\pm)}v}{\partial\sigma^2}=0,\quad M_1^{(\pm)}v(\pm\infty,\theta,t)=0,$ которые имеют только тривиальные решения

$$
M_1^{(\pm)}v(\sigma,\theta,t)=0.
$$

Уравнения для функций $Q_1^{(\pm)}v(\xi,\theta,t)$ имеют вид

$$
\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}Q_1^{(\pm)}v-\tilde h_v^{(\pm)}(\xi,\theta,t)\cdot Q_1^{(\pm)}v=-L_1\cdot Q_0^{(\pm)}v+G_1^{(\pm)}(\xi,\theta,t), \tag{23}
$$

где L_1 – оператор, определенный выражением (9), а функция $G_1(\xi,\theta,t)$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
&G_1^{(\pm)}(\xi,\theta,t)=\tilde h_v^{(\pm)}(\xi,\theta,t)\cdot\bar v_1^{(\pm)}(0,\rho_c,\theta,t)-\frac{d\tilde h^{(\pm)}}{dx_1}(\xi,\theta,t)\cdot\xi\sin\alpha+\\
&\frac{d\tilde h^{(\pm)}}{dx_2}(\xi,\theta,t)\cdot\xi\cos\alpha++\tilde g_\varepsilon^{(\pm)}(\xi,\theta,t)-\tilde g_u^{(\pm)}(\xi,\theta,t)\cdot\frac{\tilde f_\varepsilon^{(\pm)}(\xi,\theta,t)}{\tilde f_u^{(\pm)}(\xi,\theta,t)},
\end{aligned}
$$

где через $d\tilde{h}^{(\pm)}/dx_i$, $i=1,2$ обозначена полная производная функции $\tilde{h}^{(\pm)}(\xi,\theta,t)$ по x_i: $d\tilde{h}^{(\pm)}/dx_i = \tilde{h}^{(\pm)}_{x_i} + \tilde{h}^{(\pm)}_v \cdot v^{(\pm)}_{x_i}(0,\rho_c,\theta,t)$, $i=1,2$.

Уравнения (23) решаются с условиями на бесконечности и граничными условиями при $\xi=0$:

$$Q_1^{(\pm)}v(\pm\infty,\theta,t)=0, \quad Q_1^{(\pm)}v(0,\theta,t)+\bar{v}_1^{(\pm)}(r,\rho_c,\theta,t)\big|_{r=0}=0. \tag{24}$$

Решения уравнений (23) с условиями (24) имеют вид

$$Q_1^{(\pm)}v(\xi,\theta,t) = -\Phi^{(\pm)}(\xi,\theta,t)(\Phi^{(\pm)}(0,\theta,t))^{-1}\bar{v}_1^{(\pm)}(0,\rho_c,\theta,t)+$$
$$+\Phi^{(\pm)}(\xi,\theta,t)\int\limits_0^{\xi}(\Phi^{(\pm)}(\xi_1,\theta,t))^{-2}d\xi_1\int\limits_{\pm\infty}^{\xi_1}\Phi^{(\pm)}(\xi_2,\theta,t)(G_1^{(\pm)}(\xi_2,\theta,t)-L_1Q_0^{(\pm)}v(\xi_2,\theta,t))d\xi_2,$$

где функции $\Phi^{(\pm)}(\xi,\theta,t)$ определены равенствами (20) (для сокращения записи зависимость от параметров ρ_c и v_c не указана).

Функции $Q_1^{(\pm)}u$ определяются из уравнений

$$Q_1^{(\pm)}u(\xi,t)+\bar{u}_1^{(\pm)}(0,\rho_c,\theta,t)=\tilde{\varphi}^{(\pm)}(\xi,\theta,t)\left(Q_1^{(\pm)}v(\xi,\theta,t)+\bar{v}_1^{(\pm)}(0,\rho_c,\theta,t)\right)+q_{1u}^{(\pm)}(\xi,\theta,t), \tag{25}$$

где функции $q_{1u}^{(\pm)}(\xi,\theta,t)$ задаются выражениями

$$q_{1u}^{(\pm)}(\xi,\theta,t)=-\frac{\tilde{f}_{\varepsilon}^{(\pm)}(\xi,\theta,t)}{\tilde{f}_u^{(\pm)}(\xi,\theta,t)}+\left(\frac{d\tilde{\varphi}^{(\pm)}}{dx_1}(\xi,\theta,t)-\frac{d\bar{\varphi}^{(\pm)}}{dx_1}(\xi,\theta,t)\right)(-\xi\sin\alpha)+$$
$$+\left(\frac{d\tilde{\varphi}^{(\pm)}}{dx_2}(\xi,\theta,t)-\frac{d\bar{\varphi}^{(\pm)}}{dx_2}(\xi,\theta,t)\right)\xi\cos\alpha.$$

Уравнения для функций $M_1^{(\pm)}u(\sigma,\theta,t)$ запишем в виде

$$\frac{\partial^2 M_1^{(\pm)}u}{\partial\sigma^2}-\hat{f}_u^{(\pm)}(\sigma,\theta,t)\cdot M_1^{(\pm)}u=F_1^{(\pm)}(\sigma,\theta,t), \tag{26}$$

где

$$F_1^{(\pm)}(\sigma,\theta,t)=\left(\hat{f}_u^{(\pm)}(\sigma,\theta,t)\cdot\tilde{\varphi}_v^{(\pm)}(0,\theta,t)+\hat{f}_v^{(\pm)}(\sigma,\theta,t)\right)\Phi^{(\pm)}(0,\theta,t)\sigma-$$
$$-\hat{f}_u^{(\pm)}(\sigma,\theta,t)\tilde{f}_{\varepsilon}^{(\pm)}(0,\theta,t)\left(\tilde{f}_u^{(\pm)}(0,\theta,t)\right)^{-1}+\hat{f}_{\varepsilon}^{(\pm)}(\sigma,\theta,t).$$

Условия на бесконечности к уравнениям (26) получим из (11), а начальные условия при $\sigma=0$ – из (6):

$$M_1^{(\pm)}u(\pm\infty,\theta,t)=0, \quad \bar{u}_1^{(\pm)}(r,\rho_c,\theta,t)\big|_{r=0}+Q_1^{(\pm)}u(0,\theta,t)+M_1^{(\pm)}u(0,\theta,t)=0.$$

Учитывая выражение (25) для функции $Q_1^{(\pm)}u(\xi,\theta,t)$ при $\xi=0$, начальные условия можно записать в виде:

$$M_1^{(\pm)}u(0,\theta,t)=\tilde{f}_{\varepsilon}^{(\pm)}(0,\theta,t)\left(\tilde{f}_u^{(\pm)}(0,\theta,t)\right)^{-1}. \tag{27}$$

Выпишем решения уравнений (26) с условиями (27) и нулевыми условиями на бесконечности:

$$M_1^{(\pm)}u(\sigma,\theta,t)=\Psi^{(\pm)}(\sigma,\theta,t)(\Psi^{(\pm)}(0,\theta,t))^{-1}\tilde f_\varepsilon(0,\theta,t)\left(\tilde f_u(0,\theta,t)\right)^{-1}+$$
$$+\Psi^{(\pm)}(\sigma,\theta,t)\int\limits_0^\sigma(\Psi^{(\pm)}(\sigma_1,\theta,t))^{-2}d\sigma_1\int\limits_{\pm\infty}^{\sigma_1}\Psi^{(\pm)}(\sigma_2,\theta,t)F_1^{(\pm)}(\sigma_2,\theta,t)d\sigma_2,$$

где функции $\Psi^{(\pm)}(\sigma,\theta,t)$ определены формулами (20).

Функции $M_2^{(\pm)}v(\sigma,\theta,t)$ определяются из задач

$$\frac{\partial M_2^{(\pm)}v}{\partial\sigma}=g(\varphi^{(\pm)}(v_c,0,\rho_c,\theta,t)+M_0u(\sigma,\theta,t),v_c,0,\rho_c,\theta,t,0)-\tilde h^{(\pm)}(v_c,0,\rho_c,\theta,t),$$
$$M_2^{(\pm)}v(\pm\infty,\theta,t)=0.$$

3.2.5. Локализация переходного слоя в первом порядке

Из равенств (7), раскладывая ρ_c и v_c в ряды (3) и (4), в первом порядке по ε получим

$$\rho_1\frac{\partial\left(\Phi^{(-)}-\Phi^{(+)}\right)}{\partial\rho_c}(0,\theta,t,\rho_0,v_0)+v_1\frac{\partial\left(\Phi^{(-)}-\Phi^{(+)}\right)}{\partial v_c}(0,\theta,t,\rho_0,v_0)+$$
$$+\left(\frac{\partial\bar v_0^{(-)}}{\partial r}-\frac{\partial\bar v_0^{(+)}}{\partial r}\right)_{r=0,\rho_c=\rho_0}+\left(\frac{\partial Q_1^{(-)}v}{\partial\xi}-\frac{\partial Q_1^{(+)}v}{\partial\xi}\right)_{\xi=0,\rho_c=\rho_0,v_c=v_0}+$$
$$+\left(\frac{\partial M_2^{(-)}v}{\partial\sigma}-\frac{\partial M_2^{(+)}v}{\partial\sigma}\right)_{\sigma=0,\rho_c=\rho_0,v_c=v_0}=0,\quad(28)$$

$$\rho_1\frac{\partial\left(\Psi^{(-)}-\Psi^{(+)}\right)}{\partial\rho_c}(0,\theta,t,\rho_0,v_0)+v_1\frac{\partial\left(\Psi^{(-)}-\Psi^{(+)}\right)}{\partial v_c}(0,\theta,t,\rho_0,v_0)+$$
$$\left(\frac{\partial Q_0^{(-)}u}{\partial\xi}-\frac{\partial Q_0^{(+)}u}{\partial\xi}\right)_{\xi=0,\rho_c=\rho_0,v_c=v_0}+\left(\frac{\partial M_1^{(-)}u}{\partial\sigma}-\frac{\partial M_1^{(+)}u}{\partial\sigma}\right)_{\sigma=0,\rho_c=\rho_0,v_c=v_0}=0.\quad(29)$$

Определитель системы отличен от нуля в силу условия A3, поэтому из (28), (29) однозначно определяются функции $\rho_1(\theta,t)$ и $v_1(\theta,t)$.

Найдены все слагаемые сумм (5), и получено асимптотическое приближение решения задачи (1)–(2) первого порядка. Обоснование асимптотики может быть проведено по методу дифференциальных неравенств, как это сделано в работе [8]. Метод дифференциальных неравенств в данном случае предполагает построение верхнего и нижнего решений задачи на основе асимптотики.

Список литературы / References

[1] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*, Высш. школа, Москва, 1990; [Vasil'eva A.B., Butuzov V.F., *Asimptoticheskie metody v teorii singulyarnikh vozmuchenii*, Vysh. shkola, Moscow, 1990, (in Russian)]

[2] Бутузов В. Ф., Левашова Н. Т., Мельникова А. А., “Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе уравнений с различными степенями малого параметра”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **52**:11 (2012), 1983–2003; English transl.: Butuzov V. F., Levashova N. T., Mel’nikova A.A., “Steplike contrast structure in a singularly perturbed system of equations with different powers of small parameter”, *Comput. Math. and Math. Phys.*, **52**:11 (2012), 1526–1546.

[3] Левашова Н. Т., Мельникова А. А., “Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе параболических уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, **51**:3 (2015), 339–358; English transl.: Levashova N. T., Mel’nikova A. A., “Step-like contrast structure in a singularly perturbed system of parabolic equations”, *Differential Equations*, **51**:3 (2015), 342–361.

[4] Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., Ягремцев А. В., “Контрастные структуры в уравнениях реакция–диффузия–адвекция в случае сбалансированной адвекции”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **53**:3 (2013), 365–376; English transl.: Levashova N. T., Nefedov N. N., Yagremtsev A. V., “Contrast structures in the reaction–diffusion–advection equations in the case of balanced advection”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **53**:3 (2013), 273–283.

[5] Nefedov N. N., Recke L., Schnieder K. R., “Existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of reaction–advection–diffusion equations”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **405**:1 (2013), 90–103.

[6] Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., Орлов А. О., “Стационарное уравнение реакции–диффузии с разрывным реактивным членом”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **57**:5 (2017), 854–866; English transl.: Levashova N. T., Nefedov N. N., Orlov A. O., “Time-independent reaction–diffusion equation with a discontinuous reactive term”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **57**:5 (2017), 854–866.

[7] Антипов Е. А., Волков В. Т., Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., “Решение вида движущегося фронта двумерной задачи реакция-диффузия”, *Модел. и анализ информ. систем*, **24**:3 (2017), 259–279; [Antipov E. A., Volkov V. T., Levashova N. T., Nefedov N. N., “Moving front solution of the reaction-diffusion problem”, *Model. Anal. Inform. Sist.*, **24**:3 (2017), 259–279, (in Russian)].

[8] Бутузов В. Ф., Левашова Н. Т., Мельникова А. А., “Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе эллиптических уравнений”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **53**:9 (2013), 1427–1447; English transl.: Butuzov V. F., Levashova N. T., Mel’nikova A.A., “A Steplike Contrast Structure in a Singularly Perturbed System of Elliptic Equations”, *Comput. Math. and Math. Phys.*, **53**:9 (2013), 1239–1259.

[9] Levashova N., Melnikova A., Semina A., Sidorova A., “Autowave mechanisms of structure formation in urban ecosystems as the process of self-organization in active media”, *Communication on Applied Mathematics and Computation*, **31**:1 (2017), 32–42.

[10] Сидорова А. Э., Левашова Н. Т., Мельникова А. А. и др., “Автоволновая самоорганизация в неоднородных природно-антропогенных экосистемах”, *Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия*, 2016, № 6, 39–45; English transl.: Sidorova A. E., Levashova N. T., Melnikova A. A. et al., “Autowave self-organization in heterogeneous natural–anthropogenic ecosystems”, *Moscow University Physics Bulletin*, **71**:6 (2016), 562—568.

[11] Melnikova A., Levashova N., Lukyanenko D., “Front Dynamics in an Activator-Inhibitor System of Equations”, *Lecture Notes in Computer Science*, **10187** (2017), 492–499.

[12] Levashova N., Muhartova J., Davydova M., “The Use of Contrast Structures Theory for the Mathematical Modelling of the Wind Field in Spatially Heterogeneous Vegetation Cover”, *Lecture Notes in Computer Science*, **10187** (2017), 464–472.

[13] Murray J., *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*, Springer–Verlag, New York, 2003.

Melnikova A. A., Deryugina N. N., "Periodic Variations of an Autowave Structure in Two-dimensional System of Parabolic Equations", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:1 (2018), 112–124.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-112-124

Abstract. The work is aimed to study front solutions of a nonlinear system of parabolic equations in a two-dimensional region. The system can be considered as a mathematical model describing an abrupt change in physical characteristics of spatially heterogeneous media. We consider a system with small parameters raised to the different powers at a differential operator, that represents the difference of typical processes speeds for the system components. The study of the system is conducted by using the contrast structures theory methods, which allowed us to obtain conditions for the existence of front solutions contained in the neighborhood of a closed curve, to determine the front velocity depending on time and coordinate along the front curve, and to obtain the zero-order and the first-order terms of the asymptotic approximation to the solution. The scope of the system includes the description of autowave solutions in the field of ecology, biophysics, combustion physics and chemical kinetics. The approximate solution allows us to choose the model parameters so that the result corresponds to the processes observed, to explain and describe the characteristics of the solutions with sharp gradients, to create models with stable solutions and thereby to simplify the numerical analysis. Note that the numerical experiment for the two-dimensional spatial models requires a considerable amount of processing power and the use of parallel computing techniques and does not allow to effectively analyze and modify the model. In this paper, we obtain the asymptotic approximation that is to be justified, which can be done by the method of differential inequalities.

Keywords: singular perturbations, urbo ecosystem, autowave solution, internal transition layer, reaction-diffusion system

On the authors:
Alina A. Melnikova, orcid.org//0000-0001-9019-0263, PhD,
Moscow Lomonosov State University, Physical Faculty, GSP-1, 1–2 Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation,
e-mail: melnikova@physics.msu.ru

Natalia N. Deryugina, orcid.org/0000-0002-7804-3065, graduate student,
Moscow Lomonosov State University, Physical Faculty, GSP-1, 1–2 Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation,
e-mail: derunat@gmail.com

Acknowledgments:
This study was supported by grants of the Russian Foundation for Basic Research projects No. 16-01-00437, 18-31-00204, 18-01-00424, 18-01-00865.