Моделирование и анализ информационных систем. Т. 25, № 1 (2018), с. 125–132
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 25, No 1 (2018), pp. 125–132

©Нефедов Н. Н., Никулин Е.И., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-125-132

УДК 519

Существование и асимптотическая устойчивость периодического решения с внутренним переходным слоем в задаче со слабой линейной адвекцией

Нефедов Н. Н., Никулин Е.И.

получена 20 ноября 2017

Аннотация. Исследована сингулярно возмущенная периодическая по времени задача для параболического уравнения реакция-адвекция-диффузия со слабой линейной адвекцией. Рассмотрен случай реактивного члена в виде кубической нелинейности. На основе уже известных результатов исследуется более общая постановка задачи, причем предоставляются более слабые достаточные условия для существования решения с внутренним переходным слоем, чем в предыдущих работах. Для удобства приводятся уже известные результаты, обеспечивающие выполнение теоремы существования контрастной структуры. Обоснование существования решения с внутренним переходным слоем базируется на использовании асимптотического метода дифференциальных неравенств, основанного на модификации членов построенного асимптотического разложения. Далее устанавливаются достаточные условия для выполнения указанных требований, причем они имеют простые и лаконичные формулировки в виде алгебраического уравнения $w(x_0, t) = 0$ и условия $w_x(x_0, t) < 0$, по существу являющегося условием того, что корень $x_0(t)$ простой, и обеспечивающего устойчивость найденного решения. Функция w является функцией от известных функций, фигурирующих в реактивном и адвективном членах исходной задачи. Уравнение $w(x_0, t) = 0$ представляет собой задачу для нахождения нулевого приближения $x_0(t)$ для определения области локализации внутреннего переходного слоя. Кроме того, исследована асимптотическая устойчивость по Ляпунову найденного периодического решения, основанная на применении метода так называемых сжимающихся барьеров. Основной результат работы сформулирован в виде теоремы.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные параболические задачи, периодические задачи, слабая адвекция, уравнения реакция-адвекция-диффузия, контрастные структуры, внутренние слои, фронты, асимптотические методы, дифференциальные неравенства, асимптотическая устойчивость по Ляпунову

Для цитирования: Нефедов Н. Н., Никулин Е.И., "Существование и асимптотическая устойчивость периодического решения с внутренним переходным слоем в задаче со слабой линейной адвекцией", *Моделирование и анализ информационных систем*, **25**:1 (2018), 125–132.

Об авторах: Нефедов Николай Николаевич, orcid.org/0000-0002-3651-6434, д-р физ.-мат. наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, стр. 2, г. Москва, 119991 Россия, e-mail: nefedov@phys.msu.ru

Никулин Егор Игоревич, orcid.org/0000-0003-3850-4960, аспирант, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, 1, стр. 2, г. Москва, 119991 Россия, e-mail: nikulin@physics.msu.ru

Благодарности:
Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, проект №16-01-00437.

1. Постановка задачи

Рассмотрим сингулярно возмущенную периодическую по времени задачу для параболического уравнения реакция-адвекция-диффузия в случае слабой линейной адвекции

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)-\varepsilon a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}-r(x,t)(u-\varphi(x,t))(u^2-1)=0,\\
&r(x,t)>0,\quad |\varphi(x,t)|<1,\\
&(x,t)\in D:=\{(x,t)\in R^2:-1<x<1, t\in R\},\\
&u(-1,t,\varepsilon)=-1,\quad u(1,t,\varepsilon)=1\qquad t\in R,\\
&u(x,t,\varepsilon)=u(x,t+T,\varepsilon),\qquad t\in R,\quad -1\le x\le 1.
\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь $r(x,t), a(x,t), \varphi(x,t)$ – достаточно гладкие T-периодические по t функции, а $\varepsilon>0$ – малый параметр. Эта задача является важным классом задач, рассмотренных в [1]. Для нее удается сформулировать достаточные условия существования и асимптотической устойчивости решения в терминах исходных данных. Отметим, что такие задачи используются в качестве математических моделей в различных приложениях.

Аналогичная задача исследовалась в работе [3] (см. пример 3.2), в которой рассматривался случай, когда $r(x,t)\equiv 1$, а коэффициент адвекции положителен и зависит только от времени. В этой работе было доказано лишь существование решения с переходным слоем. Примененный подход не позволяет исследовать устойчивость решения и построить его асимптотику. В настоящей работе на основе результатов [1] исследуется более общая постановка задачи, причем формулируются более слабые достаточные условия существования решения с внутренним переходным слоем. Кроме того, исследуется вопрос об асимптотической устойчивости такого решения, при этом применяется асимптотический метод дифференциальных неравенств.

2. Предположения

В работе [1] исследовалась следующая задача:

$$\begin{aligned}
&N_\varepsilon(u):=\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)-f(\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x},u,x,t)=0,\\
&(x,t)\in D:=\{(x,t)\in R^2:-1<x<1, t\in R\},\\
&u(-1,t,\varepsilon)=u^1(t),\quad u(1,t,\varepsilon)=u^2(t)\qquad t\in R,\\
&u(x,t,\varepsilon)=u(x,t+T,\varepsilon),\qquad t\in R,\quad -1\le x\le 1,
\end{aligned}\tag{2}$$

где $f,\ u^1,\ u^2$ – достаточно гладкие периодические по t функции, а ε – малый параметр.

Приведем условия из [1], выполнение которых, согласно **Теореме 3.1** из этой работы, обеспечивает существование устойчивого по Ляпунову решения с внутренним переходным слоем.

(А1) *Вырожденное уравнение* $f(0,u,x,t)$ *имеет ровно 3 корня* $\varphi^{(-)}(x,t)$, $\varphi^{(0)}(x,t)$, $\varphi^{(+)}(x,t)$, *кроме того,* $\varphi^{(-)}(x,t) < \varphi^{(0)}(x,t) < \varphi^{(+)}(x,t)$, $f_u(0,\varphi^{(\pm)},x,t) > 0$, $f_u(0,\varphi^{(0)},x,t) < 0$, $(x,t) \in \bar{D}$.

Далее нам потребуется ввести так называемую присоединенную систему для уравнения (1):

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} = f(\tilde{v},\tilde{u},x,t), \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = \tilde{v}, \quad -\infty < \xi < \infty. \tag{3}$$

Условие (А1) означает, что на фазовой плоскости $(\tilde{u},\tilde{v})$ присоединенной системы есть две точки покоя $(\varphi^{(-)}(x,t),0)$ и $(\varphi^{(+)}(x,t),0)$, причем поведение фазовых траекторий вблизи каждой из них такое же, как в случае точки покоя типа седло. Вне малой окрестности этих точек покоя поведение сепаратрис определяется следующими требованиями.

(А2) *Для любого* $(x,t) \in D$ *сепаратриса, выходящая из седла* $(\varphi^{(-)}(x,t),0)$, *может быть представлена в виде* $\tilde{v} = \tilde{v}^-(\xi,t,x), \tilde{u} = \tilde{u}^-(\xi,t,x)$ *и пересекает прямую* $u = \varphi^{(0)}(x,t)$; *кроме того, точка пересечения соответствует значению* $\xi = 0$, *а седло соответствует значению* $\xi = -\infty$. *Сепаратриса, входящая в седло* $(\varphi^{(+)}(x,t),0)$, *может быть представлена в виде* $\tilde{v} = \tilde{v}^+(\xi,t,x), \tilde{u} = \tilde{u}^+(\xi,t,x)$ *и пересекает прямую* $u = \varphi^{(0)}(x,t)$, *точка пересечения соответствует значению* $\xi = 0$, *и седло соответствует* $\xi = \infty$. *При этом* $\tilde{v}^{\pm}(\xi,t,x) \neq 0$.

Таким образом,

$$\tilde{u}^{\pm}(0,x,t) = \varphi^{(0)}(x,t), \tag{4}$$

и сепаратрисы описываются уравнением (3), удовлетворяют граничному условию (4) и условиям на бесконечности:

$$\tilde{u}^{\pm}(\pm\infty,x,t) = \varphi^{(\pm)}(x,t), \quad \tilde{v}^{\pm}(\pm\infty,x,t) = 0. \tag{5}$$

Без ограничения общности предположим, что сепаратрисы лежат в верхней полуплоскости. Для каждого $(x,t) \in (-1;+1) \times R$ определим функцию

$$H(x,t) := \tilde{v}^+(0,t,x) - \tilde{v}^-(0,t,x), \tag{6}$$

где $\tilde{v}^{\pm}(\xi,t,x)$ являются решениями системы (3), удовлетворяющими условиям (5).

(А3) *Уравнение* $H(x,t) = 0$ *имеет* T*-периодическое решение* $x = x_0(t)$, $-1 < x_0(t) < 1$, *кроме того,* $\frac{\partial H}{\partial x}\big|_{x=x_0(t)} > 0, t \in R$.

Из условия (А3) следует, что существует сепаратриса, выходящая из седла $(\varphi^{(-)}(x_0,t),0)$ и входящая в седло $(\varphi^{(+)}(x_0,t),0)$. Это условие обеспечивает разрешимость краевых задач, которые используются для описания внутреннего слоя в нулевом приближении.

Замечание 1. *Как видно из схемы доказательства Теоремы 3.1 из [1], результат ее остается справедливым, если потребовать выполнение условия (А2) для* x, *лежащих в некоторой* δ*-окрестности кривой* $x_0(t)$, *а не на всем интервале* $(-1;1)$.

Заметим, что мы предположили, что сепаратриса лежит в верхней полуплоскости. Требование $\frac{\partial H}{\partial x}\big|_{x=x_0(t)} > 0$ исключает случай, когда корень $x_0(t)$ – кратный, а также случай ветвления при $x = x_0(t)$. Это требование позволяет доказать теорему существования для устойчивого решения. Нам также необходимо требование,

чтобы граничные условия принадлежали области влияния устойчивых решений вырожденного уравнения.

(A4) *На фазовой плоскости системы*

$$\frac{\partial v}{\partial \tau^-} = f(v, u, -1, t), \quad \frac{\partial u}{\partial \tau^-} = v, \quad \tau^- > 0,$$

t – параметр, линия $u = u^{(-)}(t)$ пересекает сепаратрису, входящую в седло $\varphi^-(-1, t)$ as $\tau^- \to \infty$ при $\tau^- \to \infty$. Для седла $\varphi^+(1, t)$ требуется абсолютно аналогичное условие.

Условие **(A4)** используется для построения асимптотики решения в окрестности граничных точек $x = -1,\ x = 1$.

(A5) *Функция $f(v, u, x, t)$ имеет не более чем квадратичный рост по переменной v в рассматриваемой области.*

3. Достаточные условия

Получим достаточные условия, при которых выполнены требования (A1)–(A5).

Присоединенная система для задачи (1) выглядит так:

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} = a(x,t)\tilde{v} + r(x,t)(u - \varphi(x,t))(u^2 - 1), \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = \tilde{v}, \quad -\infty < \xi < \infty. \tag{7}$$

Условия (A1), (A4) и (A5), очевидно, выполнены. Остановимся подробнее на условиях (A2) и (A3).

Отметим, что аналитически получить решение задачи (7), (4), (5) при произвольном x не удается. По этой причине функцию $H(x,t)$ в явном виде найти не предоставляется возможным. Однако оказывается, что сепаратрису, при некотором $x = x_0(t)$ соединяющую седла $S1(-1, 0)$ и $S3(1, 0)$ на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \tilde{v})$, можно найти в виде параболы $\tilde{v} = \lambda(t)(\tilde{u}^2 - 1)$.

Действительно, подставляя функцию $\tilde{v}$ в таком виде в уравнение (3), получим

$$(2\lambda - \frac{r(x,t)}{\lambda})\tilde{u} = a(x,t) - \frac{r(x,t)\varphi(x,t)}{\lambda}. \tag{8}$$

Если левая и правая части последнего равенства будут тождественно равны нулю для любых $\tilde{u} \in [-1; 1]$, то сепаратриса в форме параболы существует. Введем функцию

$$w(x,t) := a(x,t) + \varphi(x,t)\sqrt{2r(x,t)}. \tag{9}$$

Тогда, принимая во внимание то, что мы рассматриваем верхнюю полуплоскость, получим следующее выражение для λ:

$$\lambda(t) = -\sqrt{\frac{r(x_0(t), t)}{2}}, \tag{10}$$

а уравнение для определения $x_0(t)$ имеет вид

$$w(x_0, t) = 0. \tag{11}$$

Таким образом, условие (А3), являющееся условием существования соединительной сепаратрисы между седлами $S1(-1,0)$ и $S3(1,0)$, сводится к условию разрешимости уравнения (11) в интервале $-1 < x_0 < 1$. В силу известной теоремы о непрерывной зависимости решения от параметра, решение системы существует в достаточно малой окрестности кривой $x_0(t)$, т. е. условие (А2) с учетом **Замечания** (1) выполнено.

Теперь найдем достаточные условия выполнения условия $\frac{\partial H}{\partial x}\big|_{x=x_0(t)} > 0, t \in R$. Согласно [2] справедливо представление для функции $\frac{\partial H}{\partial x}$ в явном виде:

$$\frac{\partial H}{\partial x}\Big|_{x=x_0(t)} = -\frac{1}{\tilde{v}(0,x_0,t)}\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(\tilde{v}(\eta,x_0,t),\tilde{u}(\eta,x_0,t),x_0,t)\times \exp(-a(x_0,t)\eta)\tilde{v}(\eta,x_0,t)d\eta. \tag{12}$$

Для сокращения записи ниже в формулах (13) – (17), где это не указано явно, будем считать, что значение всех функций, зависящих от x, берется при аргументе $x = x_0(t)$. Сделаем преобразования:

$$\begin{aligned} &f_x(\tilde{v}(\eta,x_0,t),\tilde{u}(\eta,x_0,t),x_0,t) = a_x\tilde{v} + r_x(\tilde{u}^2-1)(\tilde{u}-\varphi) - \varphi_x r(\tilde{u}^2-1) \\ &= \tilde{v}(a_x - \frac{\varphi_x r}{\lambda} + \frac{(\tilde{u}-\varphi)r_x}{\lambda}). \end{aligned} \tag{13}$$

Можно показать, что решение $\tilde{u}$ задачи (7) имеет вид

$$\tilde{u}(\xi,x_0,t) = \frac{C\exp(-2\lambda\xi)-1}{C\exp(-2\lambda\xi)+1}, \quad C = \frac{1+\varphi(x_0,t)}{1-\varphi(x_0,t)}. \tag{14}$$

Выразим ξ из (14)

$$\xi = -\ln\left[\frac{1+\tilde{u}}{1-\tilde{u}}\,\frac{1-\varphi(x_0,t)}{1+\varphi(x_0,t)}\right]^{\frac{1}{2\lambda}}. \tag{15}$$

Подставим (13), (15) в (12) и перейдем к новой переменной интегрирования u:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial x}\Big|_{x=x_0(t)} = -\frac{1}{\tilde{v}(0,x_0,t)}\int_{-1}^{+1}\lambda(u^2-1)(a_x - \frac{\varphi_x r}{\lambda} + \\ &\frac{(u-\varphi)r_x}{\lambda})\exp[a\ln\left[\frac{1+u}{1-u}\,\frac{1-\varphi}{1+\varphi}\right]^{\frac{1}{2\lambda}}]du \\ &= \left[\frac{1-\varphi}{1+\varphi}\right]^{\frac{a}{2\lambda}}\frac{\lambda}{\tilde{v}(0,x_0,t)}\int_{-1}^{+1}(u^2-1)(a_x - \frac{\varphi_x r}{\lambda} + \frac{(u-\varphi)r_x}{\lambda})\left[\frac{1+u}{1-u}\right]^{\frac{a}{2\lambda}}du \\ &= \left[\frac{1-\varphi}{1+\varphi}\right]^{\frac{a}{2\lambda}}\frac{\lambda}{\tilde{v}(0,x_0,t)}\left[(a_x - \frac{\varphi_x r}{\lambda} - \frac{\varphi r_x}{\lambda})I_0 + \frac{r_x}{\lambda}I_1\right], \end{aligned} \tag{16}$$

где $I_0 := \int_{-1}^{+1}(1+u)^{1+\varphi}(1-u)^{1-\varphi}du > 0$, $I_1 := \int_{-1}^{+1}(1+u)^{1+\varphi}(1-u)^{1-\varphi}udu$. Здесь мы использовали тот факт, что, согласно (11), $\varphi = \frac{a}{2\lambda}$. Вычисления дают, что $I_1 = \frac{\varphi}{2}I_0$, откуда, после преобразований, получим

$$\frac{\partial H}{\partial x}\Big|_{x=x_0(t)} = \left[\frac{1-\varphi}{1+\varphi}\right]^{\varphi}\frac{\lambda}{\tilde{v}(0,x_0,t)}\left[a_x + \sqrt{2r}\varphi_x - \frac{\varphi r_x}{\sqrt{2r}}\right]I_0. \tag{17}$$

Заметим, что $w_x(x_0,t) = a_x + \sqrt{2r}\varphi_x - \frac{\varphi r_x}{\sqrt{2r}}$ стоит как сомножитель в правой части равенства (17) и, таким образом, определяет знак производной $\frac{\partial H}{\partial x}\big|_{x=x_0(t)}$. Следовательно, для того чтобы имело место неравенство из (A3), достаточно потребовать выполнения условия

$$w_x(x_0(t),t) < 0, \ t \in R. \tag{18}$$

4. Существование и асимптотическая устойчивость решения

Из работы [1] следует, что решение задачи (1) существует, а его асимптотика, построенная по алгоритму работы [1] $Y_n(x,t,\varepsilon)$, где для построения приближения кривой локализации внутреннего слоя используется оператор $\frac{\partial H}{\partial x}(x_0(t))$, приближает решение задачи (1) с точностью $O(\varepsilon^{n+1})$.

Исследование асимптотической устойчивости по Ляпунову для периодического решения с внутренним переходным слоем задачи (1) может быть проведено аналогично работам [5], [4].

Периодические решения задачи (1) можно рассматривать как решения соответствующей начально-краевой задачи на полубесконечном промежутке времени:

$$\begin{aligned}
&N_\varepsilon(v) := \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t}\right) - \varepsilon a(x,t,\varepsilon)\frac{\partial v}{\partial x} - r(x,t)(u-\varphi(x,t))(u^2-1) = 0,\\
&(x,t) \in D_{t+} := \{(x,t) \in R^2 : -1 < x < 1, 0 < t < \infty\},\\
&v(-1,t,\varepsilon) = -1, \quad v(1,t,\varepsilon) = 1, \quad 0 < t < \infty,\\
&v(x,0,\varepsilon) = v^0(x,\varepsilon), \quad x \in [-1,1].
\end{aligned} \tag{19}$$

Очевидно, что если $v^0(x,\varepsilon) = u(x,0,\varepsilon)$, где $u(x,t,\varepsilon)$ – решение периодической задачи (1), то и задача (19) имеет решение $v(x,t,\varepsilon) = u(x,t,\varepsilon)$. Исследование его устойчивости основано на асимптотическом методе дифференциальных неравенств.

Пусть α_n, β_n – соответственно периодические нижнее и верхнее решения, соответствующие задаче (1), построенные по алгоритму работы [1] (путем модификации асимптотики $Y_n(x,t,\varepsilon)$). Будем искать верхнее и нижнее решения задачи (19) в виде $\alpha(x,t,\varepsilon) = u(x,t,\varepsilon) + e^{-\lambda(\varepsilon)t}(\alpha_n(x,t,\varepsilon) - u(x,t,\varepsilon))$, $\beta(x,t,\varepsilon) = u(x,t,\varepsilon) + e^{-\lambda(\varepsilon)t}(\beta_n(x,t,\varepsilon) - u(x,t,\varepsilon))$, где $\lambda(\varepsilon) > 0$ будет указана ниже. Очевидно, что $\alpha < \beta$, поэтому для выполнения вышеупомянутой теоремы достаточно показать, что $N_\varepsilon\beta < 0$, $N_\varepsilon\alpha > 0$. Подставляя указанные выше выражения для функций α и β и учитывая, что u является решением уравнения (1), нетрудно получить требуемые неравенства. Выражение для $N_\varepsilon\beta$ преобразуется к такому виду (для краткости в следующих формулах все аргументы у функций f, f_u опущены, кроме первого):

$$\begin{aligned}
N_\varepsilon\beta = e^{-\lambda t}\{&[\varepsilon^2(-\frac{\partial\beta_n}{\partial t} + \frac{\partial^2\beta_n}{\partial x^2}) - \varepsilon a\frac{\partial\beta_n}{\partial x} - f(\beta_n)] + [\varepsilon^2(-\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) - \varepsilon a\frac{\partial u}{\partial x} - f(u)]\\
&+ [f(\beta_n) - f(u) - f_u^* \cdot (\beta_n - u)] + \varepsilon^2\lambda(\beta_n - u)\}.
\end{aligned}$$

Здесь $f(u,x,t) := r(x,t)(u-\varphi(x,t))(u^2-1)$, символ "$*$" справа от функций означает, что их значение берется при аргументе $u(x,t,\varepsilon) + \theta e^{-\lambda(\varepsilon)t}(\alpha_n(x,t,\varepsilon) - u(x,t,\varepsilon)), 0 <$

$\theta < 1$. Используя то, что $(\beta_n - u) = O(\varepsilon^{n+1})$, и выбирая $\lambda(\varepsilon) = \lambda_0$, а γ достаточно большим, можно показать, что $N_\varepsilon \beta < 0$ при $n \geq 0$. Аналогично проверяется неравенство $N_\varepsilon \alpha > 0$. Итак, найденное выше периодическое решение устойчиво с областью влияния по крайней мере $[\alpha_0, \beta_0]$. Ширина области устойчивости при этом составляет $O(\varepsilon^1)$.

5. Основной результат

Подводя итог рассуждениям пунктов 3 и 4, можно сформулировать следующую теорему, являющуюся основным результатом данной работы.

Теорема 1. *Пусть $r > 0$, φ, a – T-периодические по t достаточно гладкие в рассматриваемой области функции, а уравнение $w(x_0, t) = 0$ имеет решение $-1 < x_0(t) < 1$, такое, что $w_x(x_0(t), t) < 0$. Тогда для достаточно малых ε существует решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1), являющееся периодической контрастной структурой типа ступенька, имеющее внутренний переходный слой вблизи кривой $x_0(t)$ и близкое к корням -1 и $+1$ соответственно слева и справа вдали от $x_0(t)$. Решение $u(x, t, \varepsilon)$ асимптотически устойчиво по Ляпунову с областью устойчивости по крайней мере $[\alpha_0(x, 0, \varepsilon), \beta_0(x, 0, \varepsilon)]$, имеющей ширину порядка $O(\varepsilon^1)$. Как следствие, $u(x, t, \varepsilon)$ – единственное решение задачи (1) в этой области.*

Список литературы / References

[1] Нефедов Н. Н., Давыдова М. А., "Периодические контрастные структуры в системах типа реакция-диффузия-адвекция", *Дифференциальные уравнения*, **46**:9 (2010), 1300–1312; English transl.: Nefedov N. N., Davydova M. A., "Periodic contrast structures in systems of the reaction-diffusion-advection type", *Differential Equations*, **46**:9 (2010), 1309–1321.

[2] Васильева А. Б., Давыдова М. А., "О контрастной структуре типа ступеньки для одного класса нелинейных сингулярно возмущенных уравнений второго порядка", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **38**:6 (1998), 938–947; English transl.: Vasil'eva A. B., Davydova M. A., "On a contrast steplike structure for a class of second-order nonlinear singularly perturbed equations", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **38**:6 (1998), 900–909.

[3] Васильева А. Б., "О периодических решениях параболической задачи с малым параметром при производных", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **43**:7 (2003), 975–986; English transl.: Vasil'eva A. B., "Periodic solutions of a parabolic problem with a small parameter at the derivatives", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **43**:7 (2003), 932–944.

[4] Nefedov N. N., Nikulin E. I., "Existence and stability of periodic contrast structures in the reaction-advection-diffusion problem", *Russian Journal of Mathematical Physics*, **22**:2 (2015), 215–226.

[5] Нефедов Н. Н., Никулин Е. И., "Существование и устойчивость периодических контрастных структур в задаче реакция-адвекция-диффузия в случае сбалансированной нелинейности", *Дифференциальные уравнения*, **53**:4 (2017), 524–537; English transl.: Nefedov N. N., Nikulin E. I. "Existence and Stability of Periodic Contrast Structures in the Reaction–Advection–Diffusion Problem in the Case of a Balanced Nonlinearity", *Differential equations*, **53**:4 (2017), 516–529.

Nefedov N. N., Nikulin E. I., "Existence and Stability of the Periodic Solution with an Interior Transitional Layer in the Problem with a Weak Linear Advection", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:1 (2018), 125–132.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-125-132

Abstract. In the paper, we study a singularly perturbed periodic in time problem for the parabolic reaction-advection-diffusion equation with a weak linear advection. The case of the reactive term in the form of a cubic nonlinearity is considered. On the basis of already known results, a more general formulation of the problem is investigated, with weaker sufficient conditions for the existence of a solution with an internal transition layer to be provided than in previous studies. For convenience, the known results are given, which ensure the fulfillment of the existence theorem of the contrast structure. The justification for the existence of a solution with an internal transition layer is based on the use of an asymptotic method of differential inequalities based on the modification of the terms of the constructed asymptotic expansion. Further, sufficient conditions are established to fulfill these requirements, and they have simple and concise formulations in the form of the algebraic equation $w(x_0, t) = 0$ and the condition $w_x(x_0, t) < 0$, which is essentially a condition of simplicity of the root $x_0(t)$ and ensuring the stability of the solution found. The function w is a function of the known functions appearing in the reactive and advective terms of the original problem. The equation $w(x_0, t) = 0$ is a problem for finding the zero approximation $x_0(t)$ to determine the localization region of the inner transition layer. In addition, the asymptotic Lyapunov stability of the found periodic solution is investigated, based on the application of the so-called compressible barrier method. The main result of the paper is formulated as a theorem.

Keywords: singularly perturbed parabolic problems, periodic problems, weak advection, reaction-advection-diffusion equations, contrast structures, internal layers, fronts, asymptotic methods, differential inequalities, Lyapunov asymptotical stability

On the authors:
Nikolay N. Nefedov, orcid.org/0000-0002-3651-6434, Dr., Professor
Lomonosov Moscow State University,
GSP-1, 1-2 Leninskiye Gory, Moscow, 119991, Russia, e-mail: nefedov@phys.msu.ru

Egor Ig. Nikulin, orcid.org/0000-0003-3850-4960, graduate student,
Lomonosov Moscow State University,
GSP-1, 1-2 Leninskiye Gory, Moscow, 119991, Russia, e-mail: nikulin@physics.msu.ru

Acknowledgments:
This work was supported by Russian fund of basic researches, project No 16-01-00437.