Моделирование и анализ информационных систем. Т. 25, № 1 (2018), с. 140–150
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 25, No 1 (2018), pp. 140–150

Вычислительная геометрия

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-140-150

УДК 514.17+517.51+519.6

О минимальном коэффициенте поглощения для n-мерного симплекса

Невский М. В., Ухалов А. Ю.

получена 20 июля 2017

Аннотация. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = [0,1]^n$. Для невырожденного симплекса $S \subset \mathbb{R}^n$ через σS обозначим образ S при гомотетии относительно центра тяжести с коэффициентом σ. Положим $\xi(S) = \min\{\sigma \geq 1 : Q_n \subset \sigma S\}$. Величину $\xi(S)$ будем называть коэффициентом поглощения куба Q_n симплексом S. В статье приводятся новые оценки для минимального коэффициента поглощения для симплекса, содержащегося в Q_n, т. е. величины $\xi_n = \min\{\xi(S) : S \subset Q_n\}$. Эта величина и её аналоги, в частности, имеют приложения при оценивании норм интерполяционных проекторов. Общие оценки ξ_n были ранее получены в работах первого автора. Всегда $n \leq \xi_n < n+1$. Если существует матрица Адамара порядка $n+1$, то $\xi_n = n$. Лучшая из известных общих оценок сверху имеет вид $\xi_n \leq \frac{n^2-3}{n-1}$ $(n > 2)$. Существует не зависящая от n константа $c > 0$, такая что для любого симплекса $S \subset Q_n$, имеющего максимальный объём, выполняются неравенства $c\xi(S) \leq \xi_n \leq \xi(S)$. Это мотивирует применение для оценивания ξ_n сверху симплексов максимального объёма в Q_n. Для построения набора вершин такого симплекса могут применяться максимальный 0/1-определитель порядка n или максимальный $-1/1$-определитель порядка $n+1$. В работе вычисляются коэффициенты поглощения для симплексов максимального объёма, построенных с использованием специальной процедуры из известных максимальных $-1/1$-определителей. Для ряда значений n с помощью этого подхода удалось понизить верхние границы ξ_n, полученные теоретическим путём. Приводятся лучшие известные оценки ξ_n сверху для $n \leq 118$.

Ключевые слова: n-мерный симплекс, n-мерный куб, гомотетия, коэффициент поглощения, интерполяция, численные методы

Для цитирования: Невский М. В., Ухалов А. Ю., "О минимальном коэффициенте поглощения для n-мерного симплекса", *Моделирование и анализ информационных систем*, **25**:1 (2018), 140–150.

Об авторах:
Невский Михаил Викторович, orcid.org/0000-0002-6392-7618, доктор физ.-мат. наук, доцент,
НОМЦ Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003, Российская Федерация, e-mail: mnevsk55@yandex.ru

Ухалов Алексей Юрьевич, orcid.org/0000-0001-6551-5118, канд. физ.-мат. наук,
НОМЦ Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003, Российская Федерация, e-mail: alex-uhalov@yandex.ru

Благодарности:
Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ,
проект № 1.10160.2017/5.1

1. Введение

В настоящей статье $n \in \mathbb{N}$, $Q_n := [0,1]^n$. Через $C(Q_n)$ обозначается пространство непрерывных функций $f : Q_n \to \mathbb{R}$ с равномерной нормой $\|f\|_{C(Q_n)} := \max\limits_{x \in Q_n} |f(x)|$. Под $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ понимается совокупность многочленов от n переменных степени ≤ 1, или линейных функций на $\mathbb{R}^n$. Запись $L(n) \asymp M(n)$ означает, что существуют $c_1, c_2 > 0$, не зависящие от n, с которыми выполняется $c_1 M(n) \le L(n) \le c_2 M(n)$.

Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Через σS обозначим образ S при гомотетии относительно центра тяжести с коэффициентом σ. Под $d_i(S)$ будем понимать *i-й осевой диаметр* S, представляющий собой максимальную длину отрезка из S, параллельного i-й координатной оси. Понятие осевого диаметра выпуклого тела было введено Скоттом [13], [14].

Введём в рассмотрение величину $\xi(S) := \min\{\sigma \ge 1 : Q_n \subset \sigma S\}$. Число $\xi(S)$ будем называть *коэффициентом поглощения (absorption index)* симплексом куба Q_n. Положим

$$\xi_n := \min\{\xi(S) : S \subset Q_n\}, \quad \xi_n' := \min\{\xi(S) : S \subset Q_n, \mathrm{ver}(S) \subset \mathrm{ver}(Q_n)\}.$$

Здесь и далее $\mathrm{ver}(G)$ есть совокупность вершин многогранника G. Через $\alpha(S)$ обозначим минимальное $\sigma > 0$, для которого Q_n принадлежит трансляту симплекса σS. Очевидно, $\xi(S) = \alpha(S)$ тогда и только тогда, когда симплекс $\xi(S)S$ описан вокруг куба Q_n, т. е. каждая грань этого симплекса содержит вершину Q_n.

Пусть $x^{(j)} = \left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)$ — вершины симплекса S, $1 \le j \le n+1$. В дальнейшем существенную роль играет невырожденная матрица

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \ldots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Справедливо равенство $\mathrm{vol}(S) = \frac{|\Delta|}{n!}$. Пусть $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$. Через λ_j обозначим многочлен из $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$, коэффициенты которого составляют j-й столбец $\mathbf{A}^{-1}$, т. е. $\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \ldots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$. Числа $\lambda_j(x)$ являются *барицентрическими координатами* точки x относительно S. Мы называем λ_j *базисными многочленами Лагранжа,* соответствующими симплексу S. По поводу свойств λ_j см. [5, гл. 1].

В [4] установлено равенство

$$\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|\,. \tag{1}$$

Как доказано в [5], в случае $Q_n \not\subset S$ справедлива формула

$$\xi(S) = (n+1) \max_{1 \le j \le n+1} \max_{x \in \mathrm{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) + 1. \tag{2}$$

Для любого невырожденного симплекса S

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)}. \tag{3}$$

Это равенство доказано в [12] (см. также [5]).

Ниже мы предполагаем, что $S \subset Q_n$. Тогда для $i = 1, \ldots, n$ выполняется неравенство $d_i(S) \le 1$. Из (3) вытекает, что

$$n \le \alpha(S) \le \xi(S). \tag{4}$$

Тем самым, для n-мерного невырожденного симплекса $S \subset Q_n$ коэффициент поглощения ограничен снизу числом n. Поэтому для любого n

$$\xi_n' \ge \xi_n \ge n. \tag{5}$$

Первым автором доказано (см. [5, теорема 3.2.2]), что при $n > 2$

$$\xi_n' \le \frac{n^2-3}{n-1}. \tag{6}$$

Верхняя граница получается из рассмотрения симплекса S^* с вершинами $(0, 1, \ldots, 1)$, $(1, 0, \ldots, 1)$, $\ldots$, $(1, 1, \ldots, 0)$, $(0, 0, \ldots, 0)$. При $n > 2$ верно $\xi(S^*) = \frac{n^2-3}{n-1}$, откуда и следует (6). При $n \ge 3$ симплекс S^* обладает следующим свойством, отмеченным в [9, лемма 3.3]: замена любой вершины S^* на любую точку Q_n уменьшает объём симплекса. При $n = 2, 3, 4$ (и только в этих случаях) S^* является симплексом максимального объёма в Q_n. Если $n \ge 2$, то $d_i(S^*) = 1$, поэтому $\alpha(S^*) = n$. Таким образом, $\alpha(S^*) < \xi(S^*)$. Симплекс S^*, следуя [9], будем называть *жёстким (rigid)*.

Так как $\xi_1 = \xi_1' = 1$, $\xi_2 = 2.34\ldots$, $\xi_2' = 3$, то из (5)–(6) имеем

$$n \le \xi_n < n+1, \quad n \le \xi_n' \le n+1.$$

Равенство $\xi_n' = n+1$ выполняется только при $n = 2$. Итак, $\xi_n \asymp n$, $\xi_n' \asymp n$.

Число m будем называть *числом Адамара,* если существует матрица Адамара порядка m. (О матрицах Адамара см., например, [8], [9].) Если $n+1$ — число Адамара, то $\xi_n = \xi_n' = n$ (различные доказательства даны в [5, § 3.2], [7, теорема 3]). Для таких и только таких n существует правильный симплекс S, для которого $\mathrm{ver}(S) \subset \mathrm{ver}(Q_n)$. Как отмечено в [5], для этого симплекса $\xi(S) = n$, что и даёт $\xi_n = \xi_n' = n$. Из (4) и (3) получается $\alpha(S) = n$ и $d_i(S) = 1$. Последние равенства следуют также из того, что правильный симплекс S имеет максимальный объём в Q_n, поэтому все осевые диаметры такого симплекса равны 1. Это свойство симплексов максимального объёма, доказанное Лассаком [10], может быть выведено и из (3).

Приведём полученные ранее оценки чисел ξ_n для конкретных n. К 2009 г. первым автором было установлено, что

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = \frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 = 2.34\ldots, \quad \xi_3 = 3, \quad 4 \le \xi_4 \le \frac{13}{3} = 4.33\ldots,$$

$$5 \le \xi_5 \le 5.5, \quad 6 \le \xi_6 \le 6.6, \quad \xi_7 = 7.$$

Вычисления, проделанные вторым автором, позволили улучшить оценки для ξ_4 и ξ_6. Именно, в [6] доказано, что $\xi_4 \le \frac{19+5\sqrt{13}}{9} = 4.1141\ldots$, и высказано предположение, что указанная верхняя граница совпадает с точным значением ξ_4. В [7] отмечается, что $\xi_6 < 6.0166$, т. е. $0 \le \xi_6 - 6 < 0.0166$. Кроме того, в [7, следствие 1] доказано, что точное значение ξ_5 равно 5. Это означает, что существуют значения n, такие что $n+1$ не является числом Адамара и, тем не менее, $\xi_n = n$. Минимальное такое n равно 5.

Пусть $x^{(j)} \in Q_n$ — вершины невырожденного симплекса S. Интерполяционный проектор $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ по системе узлов $x^{(j)}$ определяется с помощью равенств $Pf\left(x^{(j)}\right) = f\left(x^{(j)}\right)$, $1 \le j \le n+1$. Имеет место аналог интерполяционной формулы Лагранжа: $Pf(x) = \sum\limits_{j=1}^{n+1} f\left(x^{(j)}\right)\lambda_j(x)$. Норма проектора P как оператора из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$ может быть вычислена по формуле $\|P\| = \max\limits_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)} \sum\limits_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|$. Обозначим через θ_n минимальную величину $\|P\|$. Для любого симплекса S и соответствующего проектора P в [3] установлены неравенства

$$\frac{n+1}{2n}\left(\|P\|-1\right)+1 \le \xi(S) \le \frac{n+1}{2}\left(\|P\|-1\right)+1.$$

Из них следует, что

$$\frac{n+1}{2n}\left(\theta_n-1\right)+1 \le \xi_n \le \frac{n+1}{2}\left(\theta_n-1\right)+1.$$

Как показано в [5, гл. 3], имеет место эквивалентность $\theta_n \asymp n^{1/2}$. Там же систематизированы многочисленные соотношения для θ_n и ξ_n. Отметим здесь следующее утверждение (см. [5, следствие 3.6.1]).

Теорема 1. *Пусть S — симплекс максимального объёма в Q_n, P — интерполяционный проектор, узлы которого совпадают с вершинами S. Тогда с универсальными константами имеют место соотношения $\|P\| \asymp \theta_n$, $\xi(S) \asymp \xi_n$.*

Точными по порядку n оценками сверху для симплекса максимального объёма и соответствующего проектора являются неравенства [5, теоремы 3.2.1, 3.5.1]

$$\xi(S) \le n+2, \quad \|P\| \le \min\left(n+1, \frac{4\sqrt{e}}{3}\sqrt{n+2}+1\right). \tag{7}$$

В связи с теоремой 1 представляется целесообразным оценить θ_n и ξ_n с использованием симплексов максимального объёма. Действительно, для целого ряда значений n такие вычисления позволяют улучшить оценки сверху, полученные теоретическим путём. Для чисел θ_n, $1 \le n \le 20$, эти результаты были описаны в статье [2], см. также [5, § 3.9]. В настоящей статье мы представим результаты оценивания указанным методом чисел ξ_n для $n \le 118$. Кроме того, мы укажем лучшие верхние границы этих чисел, известные на момент написания статьи.

2. Об одном соответствии между $-1/1$-матрицами и $0/1$-матрицами

Под *a/b-матрицей* будем понимать матрицу, каждый элемент которой равен одному из двух чисел a или b. Через h_n и g_n обозначим максимальные величины определителей $0/1$ и $-1/1$-матриц порядка n соответственно. Пусть ν_n — максимальная величина объёма n-мерного симплекса, содержащегося в Q_n. Эти числа связаны соотношениями $g_{n+1} = 2^n h_n$, $h_n = n!\,\nu_n$, см. [9, теорема 2.1].

Максимальные 0/1-определители порядка n позволяют построить симплекс максимального объёма в Q_n. Дополним набор строк такого определителя нулевой строкой. Симплекс S с вершинами в получившихся точках, очевидно, принадлежит Q_n и имеет максимальный объём. Действительно, составим для симплекса S матрицу $\mathbf{A}$ порядка $n+1$ так, как сказано в п. 1. Тогда

$$\mathrm{vol}(S) = \frac{|\det(\mathbf{A})|}{n!} = \frac{h_n}{n!} = \nu_n.$$

Ненулевые вершины n-мерного симплекса максимального объёма в Q_n можно получить и из столбцов максимального 0/1-определителя порядка n. Построенный симплекс S максимального объёма в соответствии с теоремой 1 является почти-экстремальным в смысле определений ξ_n и θ_n — для него $\xi(S) \asymp \xi_n$, $\|P\| \asymp \theta_n$. Подробности этого подхода описаны в [5, гл. 3].

Покажем, что 0/1-матрицы с максимальным определителем могут быть получены некоторым способом из экстремальных $-1/1$-матриц. Пусть $\mathbf{X}$ — невырожденная $-1/1$-матрица порядка $n+1$, $\mathbf{T}$ — 0/1-матрица порядка n. Предположим, что эти матрицы связывает последовательность следующих шагов.

1. Каждый столбец $\mathbf{X}$, начинающийся с -1, умножается на -1.

2. Каждая строка новой матрицы, начинающаяся с -1, также умножается на -1. Матрицу порядка $n+1$, которая получится в результате выполнения шагов 1–2, обозначим через $\mathbf{Y}$. У этой $-1/1$-матрицы первый столбец и первая строка целиком состоят из 1.

3. Пусть $\mathbf{Z}$ — подматрица порядка n матрицы $\mathbf{Y}$, стоящая в строках и столбцах с номерами $2, \ldots, n+1$. В этой матрице производится следующая замена элементов: 1 заменяется на 0, а -1 на 1. Получившаяся 0/1-матрица порядка n, по определению, есть $\mathbf{T}$.

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$|\det(\mathbf{T})| = \frac{|\det(\mathbf{X})|}{2^n}. \tag{8}$$

Если $|\det(\mathbf{X})| = g_{n+1}$, *то* $|\det(\mathbf{T})| = h_n$.

Доказательство. Приведём рассуждение, данное в [2]. Оно базируется на идеях статьи [9, п. 2]. Пусть S_1 — $(n+1)$-мерный симплекс, одна вершина которого является нулевой, а остальные задаются строками $\mathbf{Y}$; S_2 — n-мерный симплекс, одна вершина которого есть $(1,\ldots,1)$, а остальные соответствуют строкам $\mathbf{Z}$; наконец, пусть S_3 — n-мерный симплекс, одна вершина которого есть 0, а остальные соответствуют строкам $\mathbf{T}$. Используя связь между определителями и объёмами, запишем

$$\mathrm{vol}(S_1) = \frac{|\det(\mathbf{Y})|}{(n+1)!} = \frac{|\det(\mathbf{X})|}{(n+1)!}. \tag{9}$$

Ненулевые вершины S_1 принадлежат грани $x_1 = 1$ куба $[-1,1]^n$, поэтому высота этого симплекса, опущенная из нулевой вершины, равна 1. Далее, симплекс S_2 конгруэнтен грани симплекса S_1, лежащей на указанной грани куба. Из формулы для объёма симплекса следует, что

$$\mathrm{vol}(S_1) = \frac{\mathrm{vol}(S_2)}{n+1}. \tag{10}$$

Замены чисел, отмеченные в шаге 3, есть результат аффинного преобразования куба $[-1,1]^n$ в куб $[0,1]^n$, при котором вершина $(1,\ldots,1)$ первого куба переходит в вершину $(0,\ldots,0)$ второго куба. При этом преобразовании меры множеств умножаются на 2^{-n}. Так как S_3 есть образ S_2, то

$$\mathrm{vol}(S_3) = \frac{\mathrm{vol}(S_2)}{2^n}. \tag{11}$$

Наконец,

$$\mathrm{vol}(S_3) = \frac{|\det(\mathbf{T})|}{n!}. \tag{12}$$

Применяя последовательно (12), (11) и (10), получим:

$$|\det(\mathbf{T})| = n!\,\mathrm{vol}(S_3) = \frac{n!\,\mathrm{vol}(S_2)}{2^n} = \frac{(n+1)!\,\mathrm{vol}(S_1)}{2^n} = \frac{|\det(\mathbf{X})|}{2^n}.$$

Равенство (8) установлено. Если $|\det(\mathbf{X})| = g_{n+1}$, то $|\det(\mathbf{T})| = 2^{-n}g_{n+1} = h_n$. □

Третий и второй шаги описанной процедуры допускают обращение. В результате выполнения обратной процедуры из 0/1-матрицы $\mathbf{T}$ порядка n получается $-1/1$-матрица $\mathbf{Y}$ порядка $n+1$, первая строка и первый столбец которой состоят из 1. Точно так же, как равенство (8), устанавливается соотношение $|\det(\mathbf{Y})| = 2^n|\det(\mathbf{T})|$. Если $|\det(\mathbf{T})| = h_n$, то $|\det(\mathbf{Y})| = g_{n+1}$.

Располагая информацией о максимальном $-1/1$-определителе порядка n и действуя описанным выше способом, можно найти вершины симплекса S максимального объёма в Q_n. Вычислив для S коэффициент поглощения $\xi(S)$, получим оценку $\xi_n \le \xi(S)$. Если при некотором n значение $\xi(S)$ меняется в зависимости от имеющегося выбора S, то в качестве верхней границы ξ_n естественно взять минимальное из найденных значений $\xi(S)$.

3. Уточнение оценок ξ_n

Описанная в предыдущем пункте процедура была применена нами для уточнения оценок ξ_n при $8 \le n \le 118$. Использовались данные о максимальных $-1/1$-определителях, приведенные на сайте http://www.indiana.edu/~maxdet/ . На указанном сайте представлены максимальные $-1/1$-определители до порядка 119 включительно. Следует отметить, что среди перечисленных определителей имеются и такие, максимальность которых пока не доказана, а для некоторых порядков определители вообще не приводятся. Нельзя также утверждать, что при каждом n известны все неэквивалентные матрицы, для которых значение определителя максимально.

Таблица 1: Оценки ξ_n $(8 \le n \le 55)$
Table 1: Estimates of ξ_n $(8 \le n \le 55)$

n	$\xi_{\mathbf{n}} \le$		**n**	$\xi_{\mathbf{n}} \le$		**n**	$\xi_{\mathbf{n}} \le$	
8	$\frac{61}{7} = 8.71\ldots$	AB	24	$\frac{339}{14} = 24.21\ldots$	B	40	$\frac{1808}{45} = 40.17\ldots$	B
9	$\frac{28}{3} = 9.33\ldots$	B	25	$\frac{379}{15} = 25.26\ldots$	B	41	$\frac{8479}{205} = 41.36\ldots$	B
10	$\frac{97}{9} = 10.77\ldots$	A	26	$\frac{4853}{182} = 26.66\ldots$	B	42	$\frac{40204}{945} = 42.54\ldots$	B
11	11	H	27	27	H	43	43	H
12	$\frac{184}{15} = 12.26\ldots$	B	28	$\frac{781}{27} = 28.92\ldots$	A	44	$\frac{1933}{43} = 44.95\ldots$	A
13	$\frac{529}{39} = 13.56\ldots$	B	29	$\frac{5963}{203} = 29.37\ldots$	B	45	$\frac{2493}{55} = 45.32\ldots$	B
14	$\frac{193}{13} = 14.84\ldots$	A	30	$\frac{2981}{98} = 30.41\ldots$	B	46	$\frac{2113}{45} = 46.95\ldots$	A
15	15	H	31	31	H	47	47	H
16	$\frac{163}{10} = 16.3$	B	32	$\frac{1600}{49} = 32.65\ldots$	B	48	$\frac{2301}{47} = 48.95\ldots$	A
17	$\frac{296}{17} = 17.41\ldots$	B	33	$\frac{543}{16} = 33.93\ldots$	A	49	$\frac{689}{14} = 49.21\ldots$	B
18	$\frac{321}{17} = 18.88\ldots$	AB	34	$\frac{5237}{152} = 34.45\ldots$	B	50	$\frac{1162}{23} = 50.52\ldots$	B
19	19	H	35	35	H	51	51	H
20	$\frac{596}{29} = 20.55\ldots$	B	36	$\frac{875}{24} = 36.45\ldots$	B	52	$\frac{2701}{51} = 52.96\ldots$	A
21	$\frac{219}{10} = 21.9$	A	37	$\frac{4139}{111} = 37.28\ldots$	B	53	$\frac{36707}{689} = 53.27\ldots$	B
22	$\frac{481}{21} = 22.90\ldots$	A	38	$\frac{2309}{60} = 38.48\ldots$	B	54	$\frac{2017}{37} = 54.51\ldots$	B
23	23	H	39	39	H	55	55	H

Таблица 2: Оценки ξ_n $(56 \le n \le 103)$
Table 2: Estimates of ξ_n $(56 \le n \le 103)$

n	$\xi_{\mathbf{n}} \le$		**n**	$\xi_{\mathbf{n}} \le$		**n**	$\xi_{\mathbf{n}} \le$	
56	$\frac{394}{7} = 56.28\ldots$	B	72	$\frac{5181}{71} = 72.97\ldots$	A	88	$\frac{7741}{87} = 88.97\ldots$	A*
57	$q = 57.61\ldots$	B	73	$\frac{48128}{657} = 73.25\ldots$	B	89	$\frac{3959}{44} = 89.97\ldots$	A*
58	$\frac{31455}{539} = 58.35\ldots$	B	74	$\frac{2458}{33} = 74.48\ldots$	B	90	$\frac{1538}{17} = 90.47\ldots$	B
59	59	H	75	75	H	91	91	H
60	$\frac{1985}{33} = 60.15\ldots$	B	76	$\frac{5773}{75} = 76.97\ldots$	A	92	$\frac{8461}{91} = 92.97\ldots$	A
61	$\frac{11219}{183} = 61.30\ldots$	B	77	$\frac{2963}{38} = 77.97\ldots$	A	93	$\frac{4323}{46} = 93.97\ldots$	A
62	$\frac{21299}{341} = 62.46\ldots$	B	78	$\frac{4081}{52} = 78.48\ldots$	B	94	$\frac{5857}{62} = 94.46\ldots$	B
63	63	H	79	79	H	95	95	H
64	$\frac{4093}{63} = 64.96\ldots$	A	80	$\frac{3937}{49} = 80.34\ldots$	B	96	$\frac{9213}{95} = 96.97\ldots$	A
65	$\frac{33949}{520} = 65.28\ldots$	B	81	$\frac{3653}{45} = 81.17\ldots$	B	97	$\frac{18863}{194} = 97.23\ldots$	B
66	$\frac{5918}{89} = 66.49\ldots$	B	82	$\frac{8990}{109} = 82.47\ldots$	B	98	$\frac{4234}{43} = 98.46\ldots$	B
67	67	H	83	83	H	99	99	H
68	$\frac{4621}{67} = 68.97\ldots$	A	84	$\frac{42406}{501} = 84.64\ldots$	B	100	$\frac{714817}{7110} = 100.53\ldots$	B
69	$\frac{2379}{34} = 69.97\ldots$	A	85	$\frac{152113}{1785} = 85.21\ldots$	B	101	$\frac{51097}{505} = 101.18\ldots$	B
70	$\frac{3313}{47} = 70.48\ldots$	B	86	$\frac{1643}{19} = 86.47\ldots$	B	102	$\frac{19555}{191} = 102.38\ldots$	B
71	71	H	87	87	H	103	103	H

Таблица 3: Оценки ξ_n $(104 \le n \le 118)$
Table 3: Estimates of ξ_n $(104 \le n \le 118)$

n	$\xi_{\mathbf{n}} \le$		**n**	$\xi_{\mathbf{n}} \le$	
104	$\frac{10813}{103} = 104.98\ldots$	A*	112	$\frac{6727}{60} = 112.11\ldots$	B
105	$\frac{5511}{52} = 105.98\ldots$	A	113	$\frac{25591}{226} = 113.23\ldots$	B
106	$\frac{7021}{66} = 106.37\ldots$	B	114	$\frac{24247}{212} = 114.37\ldots$	B
107	107	H	115	115	H
109	$\frac{107131}{981} = 109.20\ldots$	B	116	$\frac{13453}{115} = 116.98\ldots$	A*
110	$\frac{22627}{205} = 110.37\ldots$	B	117	$\frac{132583}{1131} = 117.22\ldots$	B
111	111	H	118	$\frac{8641}{73} = 118.36\ldots$	B

Для уточнения оценок ξ_n на основе максимальных (или предположительно максимальных) определителей были построены симплексы максимального (или предположительно максимального) объёма в Q_n. Как следует из теоремы 2, в качестве вершин симплекса максимального объёма можно взять строки матрицы $\mathbf{T}$ и дополнить их нулевой вершиной $(0, \ldots, 0)$.

Как отмечалось в п. 1, для симплекса S максимального объёма в Q_n выполняются равенства $d_1(S) = \ldots = d_n(S) = 1$. Поэтому, если для некоторого симплекса $\hat{S} \subset Q_n$ и некоторого i выполняется $d_i(\hat{S}) < 1$, то объём $\hat{S}$ не максимален. Проверка условий $d_i(S) = 1$ осуществлялась для всех симплексов S, полученных из матриц $\mathbf{T}$. Для единственной приведённой на сайте матрицы порядка 101 не все осевые диаметры соответствующего симплекса оказались равными 1. Среди осевых диаметров, кроме 1, встретились также значения $\frac{711}{719}$ и $\frac{237}{245}$. Это означает, что приведённый $-1/1$-определитель порядка 101 не является максимальным.

Перейдём к описанию полученных результатов. Наиболее точные из найденных верхних границ ξ_n содержатся в таблицах 1, 2 и 3.

Наряду со значением n и верхней границей ξ_n мы приводим также сведения о способе получения данной оценки. При этом мы используем следующие обозначения:

- A — оценка получена из неравенства (6). Использование максимального симплекса не позволило улучшить эту оценку.

- B — приводится наименьшее значение $\xi(S)$, полученное из рассмотрения одного или нескольких симплексов максимального объёма в Q_n. Это значение меньше, чем правая часть (6).

- AB — полученное для максимальных симплексов значение $\xi(S)$ совпадает с правой частью (6).
- H — число $n+1$ является адамаровым. Приводится точное значение $\xi_n = n$.
- A* — использовано неравенство (6), так как для данного n на сайте не приводится ни одного максимального определителя.

Для $n = 57$ в таблице 2 использовано обозначение $q = \frac{34018994107517188105}{590424166322794597}$.

Все приведённые оценки ξ_n получены из рассмотрения симплексов, вершины которых совпадают с вершинами куба Q_n. Следовательно, эти значения являются верхними границами не только для ξ_n, но и для ξ_n'.

Для вычислений и подготовки таблиц использовался набор программ на языке Wolfram Language (см., например, [1] и [11]).

Список литературы / References

[1] Климов В. С., Ухалов А. Ю., *Решение задач математического анализа с использованием систем компьютерной математики*, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, 2014, 96 с.; [Klimov V. S., Ukhalov A. Yu., *Reshenie zadach matematicheskogo analiza s ispolzovaniem sistem kompyuternoi matematiki*, P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, 2014, 96 pp., (in Russian).]

[2] Невский М. В., Хлесткова И. В., "К вопросу о минимальной линейной интерполяции", *Современные проблемы математики и информатики*, **9**, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, 2008, 31–37; [Nevskij M. V., Khlestkova I. V., "K voprosu o minimalnoi lineinoi interpolyacii", *Sovremennye problemy matematiki i informatiki*, **9**, P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, 2008, 31–37, (in Russian).]

[3] Невский М. В., "Об одном соотношении для минимальной нормы интерполяционного проектора", *Модел. и анализ информ. систем*, **16**:1 (2009), 24–43; [Nevskij M. V., "On a certain relation for the minimal norm of an interpolational projection", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **16**:1 (2009), 24–43, (in Russian).]

[4] Невский М. В., "Об одном свойстве n-мерного симплекса", *Матем. заметки*, **87**:4 (2010), 580–593; English transl.: Nevskii M. V., "On a property of n-dimensional simplices", *Math. Notes*, **87**:4 (2010), 543–555.

[5] Невский М. В., *Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции*, Ярославль: Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, 2012; [Nevskii M. V., *Geometricheskie ocenki v polinomialnoy interpolyacii*, P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, 2012, (in Russian).]

[6] Невский М. В., Ухалов А. Ю., "О числовых характеристиках симплекса и их оценках", *Модел. и анализ информ. систем*, **23**:5 (2016), 603–619; [Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., "On numerical characteristics of a simplex and their estimates", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 603–619, (in Russian).]

[7] Невский М. В., Ухалов А. Ю., "Новые оценки числовых величин, связанных с симплексом", *Модел. и анализ информ. систем*, **24**:1 (2017), 94–110; [Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., "New estimates of numerical values related to a simplex", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:1 (2017), 94–110, (in Russian).]

[8] Холл М., *Комбинаторика*, Мир, Москва, 1970; [Hall M., Jr, *Combinatorial theory*, Blaisdall publishing company, Waltham (Massachusets) – Toronto – London, 1967, (in English).]

[9] Hudelson M., Klee V., Larman D., “Largest j-simplices in d-cubes: some relatives of the Hadamard maximum determinant problem”, *Linear Algebra Appl.*, **241–243** (1996), 519–598.

[10] Lassak M., “Parallelotopes of maximum volume in a simplex”, *Discrete Comput. Geom.*, **21**:3 (1999), 449–462.

[11] Mangano S., *Mathematica cookbook*, O’Reilly Media Inc., Cambridge, 2010.

[12] Nevskii M., “Properties of axial diameters of a simplex”, *Discrete Comput. Geom.*, **46**:2 (2011), 301–312.

[13] Scott P. R., “Lattices and convex sets in space”, *Quart. J. Math. Oxford (2)*, **36** (1985), 359–362.

[14] Scott P. R., “Properties of axial diameters”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **39**:3 (1989), 329–333.

Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., "On Minimal Absorption Index for an n-Dimensional Simplex", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:1 (2018), 140–150.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-140-150

Abstract. Let $n \in \mathbb{N}$ and let Q_n be the unit cube $[0,1]^n$. For a nondegenerate simplex $S \subset \mathbb{R}^n$, by σS denote the homothetic copy of S with center of homothety in the center of gravity of S and ratio of homothety σ. Put $\xi(S) = \min\{\sigma \geq 1 : Q_n \subset \sigma S\}$. We call $\xi(S)$ an absorption index of simplex S. In the present paper, we give new estimates for the minimal absorption index of the simplex contained in Q_n, i. e., for the number $\xi_n = \min\{\xi(S) : S \subset Q_n\}$. In particular, this value and its analogues have applications in estimates for the norms of interpolation projectors. Previously the first author proved some general estimates of ξ_n. Always $n \leq \xi_n < n+1$. If there exists an Hadamard matrix of order $n+1$, then $\xi_n = n$. The best known general upper estimate has the form $\xi_n \leq \frac{n^2-3}{n-1}$ $(n > 2)$. There exists a constant $c > 0$ not depending on n such that, for any simplex $S \subset Q_n$ of maximum volume, inequalities $c\xi(S) \leq \xi_n \leq \xi(S)$ take place. It motivates the use of maximum volume simplices in upper estimates of ξ_n. The set of vertices of such a simplex can be consructed with application of maximum $0/1$-determinant of order n or maximum $-1/1$-determinant of order $n+1$. In the paper, we compute absorption indices of maximum volume simplices in Q_n constructed from known maximum $-1/1$-determinants via a special procedure. For some n, this approach makes it possible to lower theoretical upper bounds of ξ_n. Also we give best known upper estimates of ξ_n for $n \leq 118$.

Keywords: n-dimensional simplex, n-dimensional cube, homothety, absorption index, interpolation, numerical methods

On the authors:
Mikhail V. Nevskii, orcid.org/0000-0002-6392-7618, Doctor of Science,
Centre of Integrable Systems, P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl, 150003, Russian Federation, e-mail: mnevsk55@yandex.ru

Alexey Y. Ukhalov, orcid.org/0000-0001-6551-5118, PhD,
Centre of Integrable Systems, P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl, 150003, Russian Federation, e-mail: alex-uhalov@yandex.ru

Acknowledgments:
This work was carried out within the framework of the state programme of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, project № 1.10160.2017/5.1