

УДК 517.9

О работе семинара «Нелинейная динамика и вычислительная геометрия» (Workshop “Nonlinear Dynamics and Computational Geometry”)

С 10 по 14 сентября 2012 года в Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова прошел международный семинар «Нелинейная динамика и вычислительная геометрия» (“Nonlinear Dynamics and Computational Geometry”), организованный лабораторией им. Делоне и научно-образовательным центром «Нелинейная динамика». На семинаре с лекциями выступили ведущие ученые как в области нелинейной динамики, так и в области вычислительной геометрии, были обсуждены вопросы взаимодействия этих дисциплин. Ниже представлены тезисы наиболее интересных докладов, прозвучавших на семинаре. По докладу Н.А. Кудряшова была подготовлена статья, которая публикуется в настоящем номере журнала.

Jan Reininghaus (Institute of Science and Technology Austria). Computational Discrete Morse Theory.

I propose a purely combinatorial framework that allows to extract the extremal structure of scalar and vector fields defined on discrete manifolds. The extremal structure of a scalar field consists of critical points and separatrices – certain tangential curves of the gradient field that connect critical points. The extremal structure of a vector field additionally includes periodic orbits – the tangential curves that are closed. These features are of great interest in many applications since they allow to reduce large data sets to their essential structure.

Typically, the critical points are computed by finding all zeros of the gradient or vector field. The critical points of a scalar field are then classified into minima, saddles, and maxima according to the eigenvalues of its Hessian, while the critical points of a vector field are classified into sinks, saddles, and sources by the eigenvalues of its Jacobian. The respective eigenvectors can be used to compute the separatrices as the solution of an autonomous ODE.

One of the biggest challenges for these classical numerical algorithms is the discrete nature of the extremal structure which necessitates a lot of binary decisions. Their result therefore strongly depends on computational parameters. Since Morse theory relates the extremal structure of a generic function to the topology of the manifold, e.g. by the Poincare-Hopf Theorem, such numerical methods may thereby compute inadmissible results. Robin Forman has developed a discrete version of Morse theory. This theory can be seen as a discretization of the set of admissible extremal structures for a given manifold.

In this talk, I propose a general computational framework for data analysis which is based on Forman’s discrete Morse theory in a graph theoretical formulation. The basic idea is to define a combinatorial optimization problem over the set of admissible extremal structures. The result of this framework is thereby provably consistent with the topology of the domain. Also, the

solution of the optimization problem gives rise to a natural hierarchy of extremal structures for a given data set. This hierarchy can be used to remove noise induced extremal structure or to extract its essential extremal structure.

In the context of this unified framework I will discuss efficient algorithms and demonstrate their applicability to 2D for scalar fields, divergence-free vector field, general vector fields, as well as time-dependent scalar fields. Finally, I will present some applications of this framework to computational fluid dynamics, the computation of a global importance measure for critical points, and to memory efficient persistent homology computation.

Гвоздев А. А. (Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова). Нейтринные динамические эффекты в магнитогидродинамической модели сверхновой.

Взрыв сверхновой является одной из ключевых нерешенных задач релятивистской астрофизики. Трудность данной задачи заключается в ее комплексности, включающей теорию гравитации и магнитогидродинамику, кинетику переноса вещества и нейтринного излучения, элементарные процессы взаимодействия нейтрино с горячим, вырожденным, сильно замагниченным веществом внутренней оболочки сверхновой. Для ее решения необходимо, прежде всего, составить полную систему релятивистских гидродинамических уравнений среды внутренней оболочки с самосогласованным учетом переноса нейтринного излучения.

Именно эта проблема обсуждается в данном докладе. На стадии Кельвина – Гельмгольца прохождения основного нейтринного излучения получена самосогласованная система уравнений среды. Решение системы уравнений однозначно определяет распределение напряженности магнитного поля, плотности, температуры вещества, химических потенциалов нейтронов, протонов, электронов и позитронов. При данных функциях распределения частиц вычисляется избыточный импульс, переданный от нейтрино единичному объему среды в единицу времени по вектору напряженности магнитного поля. Этот избыточный импульс – макроскопическое проявление известного эффекта нарушения пространственной четности в слабых взаимодействиях. Оценивается величина нейтринного динамического эффекта и влияние плотности нейтринной силы на дальнейшую генерацию магнитного поля в оболочке. Показывается, что в случае глобального тороидального поля эта сила может привести к одностороннему (в одном из полушарий протозвезды) взрыву сверхновой.

В заключение обсуждается сложность системы уравнений при отказе от упрощающих предположений. По мнению автора, ее решение требует приложения современных математических методов, в том числе и вычислительной геометрии, развитых в задачах нелинейной динамики.

Кащенко С. А. (Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова). Пространственные бифуркации двухкомпонентных систем с малой диффузией.

В настоящее время большой интерес вызывает изучение бифуркационных явлений в нелинейных параболических системах уравнений. Бифуркации автоколебаний в случаях, близких к критическим в задаче об устойчивости состояния равновесия таких систем, рассматривались в работах многих авторов. Методика исследования основывается при этом на результатах о существовании локальных инвариантных интегральных многообразий и на использовании метода нормальных форм. Тем самым вопрос о динамике параболической системы сводится к изучению специальной системы обыкновенных дифференциальных

уравнений. Особенностью рассматриваемых ниже систем с малой диффузией является то обстоятельство, что размерность «критического» многообразия, определяющего динамику всей системы, неограниченно растет при стремлении к нулю малого параметра — коэффициента диффузии. По этой причине стандартные методы оказываются в данной ситуации неприменимы. Тем не менее, формализм теории нормальных форм позволяет по исходной системе строить некоторые универсальные (и более простые, чем исходные) параболические уравнения. По-видимому, одним из первых таких уравнений явилось уравнение Курамото—Цузуки. Особо отметим работу [1], в которой не только дан глубокий анализ уравнения Курамото—Цузуки, но и обсуждены многие важные проблемы, касающиеся динамики двухкомпонентных систем в окрестности точки бифуркации. Кроме этого, выявлены различные классы сложных и интересных аттракторов, что позволило осветить ряд новых аспектов явления самоорганизации. Наиболее существенное отличие исследуемых здесь задач состоит в том, что наличие самих критических случаев в задаче об устойчивости состояния равновесия определяется взаимодействием на высоких модах «обыкновенной» и «диффузионной» частей исходного уравнения. Как оказывается, это может приводить к новым интересным явлениям [2, 3]. Численный анализ инвариантных характеристик аттракторов таких систем при уменьшении коэффициента диффузии выполнен в [4, 5] для случая отрезка. В настоящей работе приведены квазинормальные формы, определяющие динамику системы, для случая двумерной области. Эти формы обладают большой спецификой. Отметим для примера, что локальная динамика двухкомпонентной системы с малой диффузией может определяться нелокальными установившимися режимами краевых задач, состоящих из 3, 4, 5, ... нелинейных параболических уравнений, не содержащих малый параметр. Характерными оказываются явления неограниченного (при стремлении к нулю малого параметра) чередования «рождения» и «гибели» установившегося режима. Отмечено, что квазинормальные формы существенно зависят от геометрии области. Основное внимание в работе уделено разработке формализма построения асимптотики установившихся режимов. С помощью квазинормальных форм определяются главные члены соответствующих разложений, которые являются комбинациями медленно и быстро осциллирующих по пространственным переменным функций. Для некоторых случаев этот формализм удастся строго обосновать и ответить на вопрос об устойчивости построенного режима.

В прямоугольнике $\Omega = \{0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi\}$ рассмотрим систему двух параболических уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \left[D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + (A_0 + \varepsilon A_1)u + F(u) \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi, y) \equiv u(t, x, y + 2\pi) \equiv u(t, x, y). \quad (2)$$

Здесь $u = (u_1, u_2)$, ε — малый положительный параметр, матрицы D_1 и D_2 положительно определены, а нелинейная вектор-функция $F(u)$ достаточно гладкая и имеет в нуле порядок малости выше первого. Удобно считать, что $F(u) = F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + O(\|u\|^4)$, где $F_2(*, *)$ и $F_3(*, *, *)$ линейны по каждому аргументу. Фазовым пространством краевой задачи (1), (2) считаем пространство C_Ω непрерывных на Ω функций (со стандартной нормой).

Задача об устойчивости состояния равновесия $u \equiv 0$ тесно связана с поведением спектра семейства матриц $A(z) = A_0 - z_1 D_1 - z_2 D_2$, где $z = (z_1, z_2)$ и $z_j \geq 0$ ($j = 1, 2$). При условии, когда для всех $z_j \geq 0$ ($j = 1, 2$) вещественные части всех собственных значений

$A(z)$ отрицательны, состояние равновесия $u \equiv 0$ асимптотически устойчиво при малых ε , и все решения с начальными при $t = 0$ условиями из некоторой (не зависящей от ε) окрестности в C_Ω этого состояния равновесия определены при $t > 0$ и стремятся при $t \rightarrow \infty$ к нулевому вектору. Если же для некоторого $\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ собственное значение $A(\bar{z})$ имеет положительную вещественную часть, то нулевое решение (1), (2) неустойчиво для малых ε . При этом наибольший характеристический показатель решений линейной (при $F(u) \equiv 0$) системы положителен и имеет порядок $O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тем самым задача о динамике системы (1), (2) перестает быть локальной.

Ниже основное предположение состоит в том, что реализуется «критический» случай, т. е. найдется такое $z_0 = (z_{10}, z_{20})$ ($z_{j0} \geq 0$, $j = 1, 2$), что матрица $A(z_0)$ имеет собственное значение с нулевой вещественной частью, а все собственные значения $A(z)$ при $z_j \geq 0$ и $z_j \neq z_{j0}$ ($j = 1, 2$) имеют отрицательные вещественные части. В этой ситуации бесконечно много характеристических показателей решений (1), (2) (для $F(u) \equiv 0$) стремятся к нулю, когда $\varepsilon \rightarrow 0$, а значит, реализуется критический случай «бесконечной размерности». При сформулированном условии рассмотрим вопрос о структуре решений из некоторой достаточно малой окрестности решения $u \equiv 0$ краевой задачи (1), (2).

Приведем результаты для наиболее простого случая, когда $z_0 = 0$ ($z_{10} = z_{20} = 0$), т. е. критический случай определяется «обыкновенной» частью уравнения (1): матрица A_0 имеет собственное значение с нулевой вещественной частью. Сначала рассмотрим ситуацию, когда A_0 имеет простое нулевое собственное значение. Пусть $A_0 a = 0$, $A_0^* b = 0$ и $(a, b) = 1$. Квазинормальной формой в этом случае называют краевую задачу

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = (D_1 a, b) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + (D_2 a, b) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + (A_1 a, b) \xi + (F_2(a, a), b) \xi^2, \quad (3)$$

$$\xi(t, x + 2\pi, y) \equiv \xi(t, x, y + 2\pi) \equiv \xi(t, x, y). \quad (4)$$

Здесь $\tau = \varepsilon t$, $(D_1 a, b) \geq 0$, $(D_2 a, b) \geq 0$. Дополнительно предположим, что выполнены условия невырожденности $(D_1 a, b) \neq 0$, $(D_2 a, b) \neq 0$. Грубому состоянию равновесия $\xi_0(x, y)$ краевой задачи (3), (4) отвечает состояние равновесия $u(x, y, \varepsilon)$ (той же устойчивости) краевой задачи (1), (2).

Более интересен случай, когда матрица A_0 имеет пару чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega$ ($\omega > 0$). Пусть $A_0 a = i\omega a$, $A_0^* b = -i\omega b$, $(a, b) = 1$, $(\bar{a}, b) = 0$. Квазинормальная форма, которую в этой ситуации и называют уравнением Курамото—Цузуки, определяется краевыми условиями (4) и уравнением вида

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = (D_1 a, b) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + (D_2 a, b) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + (A_1 a, b) \xi + d|\xi|^2 \xi. \quad (5)$$

Рассматривается затем более сложная ситуация, когда

$$z_{10} > 0, \quad z_{20} > 0. \quad (6)$$

Сразу укажем на две из отличительных особенностей этого случая. Во-первых, потеря устойчивости в линейном (при $F(u) \equiv 0$) приближении может теперь происходить только на высоких модах порядка $\varepsilon^{-1/2}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Во-вторых, если для $z_{10} = z_{20} = 0$ переход от случая отрезка к случаю прямоугольника Ω связан лишь с изменением диффузионной части (динамика краевых задач (3), (4) и (5), (4), конечно, для двумерной области становится существенно богаче), то при условии (6) этот переход приводит к принципиальным изменениям. Так, например, меняется даже количество уравнений, составляющих квазинормальную форму.

Отметим, далее, что в приложениях важное из сформулированных выше ограничений — требование единственности значений z_{10} и z_{20} — часто не выполняется. В качестве примера рассмотрим с краевыми условиями (2) уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D \Delta u + (A_0 + \varepsilon A_1)u + F(u), \quad (7)$$

где D — положительно-определенная матрица, а Δ — оператор Лапласа. Роль матрицы $A(z)$ здесь играет матрица $A_0 - (z_1 + z_2)D$ ($z_1, z_2 \geq 0$). Таким образом, критический случай в задаче об устойчивости доставляет лишь значение суммы $p_0 = z_{10} + z_{20}$. Коротко остановимся на построении квазинормальной формы для этого случая.

Предполагаем здесь, что $r = (F_2(a, a), b) \neq 0$. Положим

$$\Omega_\varphi(\varepsilon) = \sqrt{\frac{p_0}{\varepsilon}}[(\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon} \theta_{1\varphi})x + (\sin \varphi + \sqrt{\varepsilon} \theta_{2\varphi})y].$$

Здесь $\theta_{1\varphi}, \theta_{2\varphi} \in (-p_0^{-1/2}, 0]$ и такие, что числа $(p_0 \varepsilon^{-1})^{1/2}(\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon} \theta_{1\varphi})$ и $(p_0 \varepsilon^{-1})^{1/2}(\sin \varphi + \sqrt{\varepsilon} \theta_{2\varphi})$ целые, а через M обозначено произвольное конечное множество точек из отрезка $[0, 2\pi]$. Пусть относительно множества M выполнено следующее условие (типа общности положения): вместе с каждой точкой $\varphi \in M$ этому же множеству принадлежат все те точки отрезка $[0, 2\pi]$, которые отличаются по модулю 2π от φ на $\pi/3$, на $2\pi/3$ и на π . Условимся считать, что $\xi_{\varphi+2\pi} \equiv \xi_\varphi$, $\xi_{\varphi\pm\pi} \equiv \bar{\xi}_\varphi$. Положим в краевой задаче (7), (2)

$$u = \varepsilon \bigcup_{\varphi \in M} \xi_\varphi(\tau, x, y) \exp i\Omega_\varphi(\varepsilon) + \varepsilon^{3/2} \bigcup_{\varphi \in M} v_\varphi(\tau, x, y) \exp i\Omega_\varphi(\varepsilon) + \dots \quad (8)$$

После стандартных вычислений получим квазинормальную форму для амплитуд $\xi_\varphi(\tau, x, y)$, которая определяется уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \tau} = & 4\lambda_0 p_0 \left[\cos^2 \varphi \frac{\partial^2 \xi_\varphi}{\partial x^2} + \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 \xi_\varphi}{\partial x \partial y} + \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 \xi_\varphi}{\partial y^2} + \right. \\ & + 2i\sqrt{p_0}(\theta_{1\varphi} \cos \varphi + \theta_{2\varphi} \sin \varphi) \left(\cos \varphi \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial y} \right) - \\ & \left. - (\theta_{1\varphi} \cos \varphi + \theta_{2\varphi} \sin \varphi)^2 \xi_\varphi \right] + (A_1 a, b) \xi_\varphi + \\ & + r \xi_{\varphi+\pi/3} \xi_{\varphi-\pi/3}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\tau = \varepsilon t$, и краевыми условиями

$$\xi_\varphi(t, x + 2\pi, y) \equiv \xi_\varphi(t, x, y + 2\pi) \equiv \xi_\varphi(t, x, y). \quad (10)$$

Эта краевая задача представляет собой наборы из шести изолированных систем уравнений для $\xi_\varphi, \xi_{\varphi\pm\pi/3}, \xi_{\varphi\pm 2\pi/3}, \xi_{\varphi+\pi}$ (удобно считать, что $\varphi \in (-\infty, \infty)$ и зависимость от этого параметра 2π -периодическая). Амплитуда установившегося режима имеет здесь порядок ε .

Завязка всех систем уравнений, фигурирующих в (9), происходит при учете в квазинормальной форме следующих по порядку кубических слагаемых, перед которыми стоит множитель ε .

Бифуркационные явления и сами квазинормальные формы существенно зависят от выбора области Ω . Укажем некоторые из таких особенностей на примере круга $\Omega_0 =$

$\{x^2 + y^2 \leq \pi^2\}$. В области Ω_0 рассмотрим систему (7) с краевыми условиями $\frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\pi} = 0$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Построение квазинормальных форм и здесь, конечно, основывается на использовании формул типа (8), где вместо функций $\exp i\Omega_\varphi(\varepsilon)$ следует теперь взять соответствующие собственные функции оператора Лапласа. Основное отличие получающихся квазинормальных форм состоит в том, что параболические уравнения содержат существенно больше нелинейных слагаемых. Например, для случая $r \neq 0$ соответствующая система уравнений не распадается на подсистемы из шести уравнений. Тем самым можно говорить о том, что в рассматриваемой задаче резонирует большее число мод. Таким образом, геометрия области Ω существенно влияет на динамику двухкомпонентной системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ по постановлению № 220, договор № 11.G34.31.0053 и при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашения 14.B37.21.0457.

1. *Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.* Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах / Под ред. А. А. Самарского. М., 1986. С. 7–59.
2. *Кащенко С. А.* О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299, № 5. С. 1049–1052.
3. *Кащенко С. А.* Пространственные особенности высокомодовых бифуркаций двухкомпонентных систем с малой диффузией // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 2. С. 262–270.
4. *Глызин С. Д.* Разностные аппроксимации уравнения «реакция-диффузия» на отрезке // Моделирование и анализ информационных систем. 2009. Т. 16, № 3. С. 96–116.
5. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Релаксационные колебания и диффузионный хаос в реакции Белоусова // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51, № 8. С. 1400 – 1418.

Кубышкин Е. П. (Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова). Оптимальное управление поведением решений одной начально-краевой задачи для гибридной системы дифференциальных уравнений.

Рассматривается следующая начально-краевая задача

$$J_* \ddot{\theta} + \int_0^1 (x+a) y_{tt}(x, t) dx = M(t), \quad (1)$$

$$y_{tt} + y_{xxxx} = -(x+a)\ddot{\theta}, \quad (2)$$

$$y(0, t) = y_x(0, t) = 0, y_{xx}(1, t) = y_{xxx}(1, t) = 0, \quad (3)$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, \quad y(x, 0) = y_0(x), \quad y_t(x, 0) = \dot{y}_0(x), \quad (4)$$

для определения функций $\theta(t), y(x, t)$ в области $Q = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$. Здесь $M(t) \in L_\infty(0, T)$, $J_* = J_0 + a^2 + a + 1/3$, где $J_0, a > 0$.

Для (1) – (4) рассматриваются следующие задачи оптимального управления.

Задача 1. Определить функцию $M(t) \in L_\infty(0, T)$, переводящую решение краевой задачи (1) – (3) из начального фазового состояния (4) в конечное

$$\theta(T) = \theta_T, \quad \dot{\theta}(T) = \dot{\theta}_T, \quad y(x, T) = y_T(x), \quad y_t(x, T) = \dot{y}_T(x) \quad (5)$$

в заданный момент времени T и минимизирующую функционал

$$\Phi(M) = \|M(t)\|_{L_\infty(0, T)} = \sup_{0 \leq t \leq T} (\text{ess}|M(t)|). \quad (6)$$

Задача 2 (Задача быстрогодействия). Определить функцию $M(t) \in L_\infty(0, T)$, $\Phi(M) \leq L < \infty$, переводящую решение начально-краевой задачи (1) – (4) из начального фазового состояния (4) в конечное (5) за минимальное время T .

В дальнейшем $\lambda_n = \beta_n^4$ и $v_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) — совокупность собственных значений и соответствующих собственных функций спектральной краевой задачи

$$v^{IV}(x) - J_0^{-1}(x+a)(av'''(0) - v''(0)) = \lambda v(x), \quad (7)$$

$$v(0) = v'(0) = 0, v''(1) = v'''(1) = 0. \quad (8)$$

Система собственных значений и собственных функций краевой задачи (7)-(8) построена в [1]. Показано, что β_n являются положительными корнями характеристического уравнения $1 + \text{ch } \beta \cos \beta + (2a \text{ sh } \beta \sin \beta + \beta^{-1}((a^2 \beta^2 + 1) \text{ ch } \beta \sin \beta + (a^2 \beta^2 - 1) \text{ sh } \beta \cos \beta)) / (J_0 \beta^2) = 0$, а $\langle v_n(x), v_m(x) \rangle = \delta_{nm}$, $\langle v(x), u(x) \rangle = (v(x), u(x))_{L_2(0,1)} - J_*^{-1}(x+a, v(x))_{L_2(0,1)}(x+a, u(x))_{L_2(0,1)}$. Там же получен явный вид функций $v_n(x)$.

В $L_2(0, 1)$ введем еще одно скалярное $\langle v(x), u(x) \rangle$ и норму $\|u(x)\|_H = \langle u(x), u(x) \rangle^{1/2}$. Обозначим через $H_j(0, 1)$ ($j = 1, 2, 3$) пространство функций $y(x) \in L_2(0, 1)$ вида $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n v_n(x)$, $y_n = \langle y(x), v_n(x) \rangle$, $\|y(x)\|_{H_j(0,1)} = (\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^j y_n^2)^{1/2}$ ($\omega_n = \beta_n^2$). Отметим, что $H_j(0, 1) \in W_2^j(0, 1)$. В $L_2(Q_T)$ введем норму $\|y(x, t)\|_{H(Q_T)} = (\int_0^T \langle y(x, t), y(x, t) \rangle dt)^{1/2}$. Обозначим через $H_2(Q_T)$ подпространство $L_2(Q_T)$, полученное замыканием в норме $\|y(x, t)\|_{H_2(Q_T)} = (\int_0^T (\|y_t(x, t)\|_{H_2(0,1)}^2 + \|y_{xx}(x, t)\|_{L_2(0,1)}^2) dt)^{1/2}$ множества функций $y(x, t) \in C^{3,1}(Q_T)$, $y(0, t) = y_x(0, t) = y_{xx}(1, t) = y_{xxx}(1, t) = 0$. Отметим, что $H_2(Q_T) \in W_2^{2,1}(Q_T)$.

Пусть

$$y_0(x) \in H_2(0, 1), y_1(x) \in L_2(0, 1), \zeta(t) \in W_2^1(0, T), \\ w(x, t) \in H_2(Q_T), \zeta(T) = 0, w(x, T) = 0. \quad (9)$$

Под обобщенным решением начально-краевой задачи (1)–(4), определенным в области Q_T , будем понимать пару функций $\theta(t), y(x, t)$ ($\theta(0) = \theta_0$, $y(x, 0) = y_0(x)$), удовлетворяющих интегральному соотношению

$$\int_0^T \left[(\dot{\theta}(t) + J_0^{-1} \langle x+a, y_t(x, t) \rangle) \dot{\zeta}(t) + \langle y_t(x, t), w_t(x, t) \rangle - (y_{xx}(x, t), w_{xx}(x, t))_{L_2(0,1)} + \right. \\ \left. + (-J_*^{-1} \langle x+a, w(x, t) \rangle + J_*^{-1} \zeta(t)) M(t) \right] dt + (\dot{\theta}_0 + J_0 \langle x+a, \dot{y}_0(x) \rangle) \zeta(0) + \langle \dot{y}_0(x), w(x, 0) \rangle = 0$$

для любых функций $\zeta(t)$ и $w(x, t)$ вида (9).

Утверждение 1. Обобщенное решение начально-краевой задачи (1)–(4) существует, единственно и задается формулами

$$\theta(t) = \theta_0 + \theta_1 t + J_0^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} d_n (a_{0n} + b_{0n} t - y_n(t)) + J_*^{-1} \int_0^t (t - \tau) M(\tau) d\tau,$$

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) y_n(t), \quad y_n(t) = a_{0n} \cos(\omega_n t) + b_{0n} \omega_n^{-1} \sin(\omega_n t) - J_0^{-1} \omega_n^{-1} d_n \int_0^t \sin(t-\tau) M(\tau) d\tau,$$

где $a_{0n} = \langle y_0(x), v_n(x) \rangle$, $b_{0n} = \langle \dot{y}_0(x), v_n(x) \rangle$, $d_n = \langle x + a, v_n(x) \rangle$. При этом $d_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots$).

Отсюда, перевод решения начально-краевой задачи из (4) в (5) эквивалентен выполнению равенств:

$$(1, M(t))_{L_2(0,T)} = A_0(T) = J_*(\dot{\theta}_T - \dot{\theta}_0) + J^* J_0^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} d_n (b_{Tn} - b_{0n}), \quad (10)$$

$$(T - t, M(t))_{L_2(0,T)} = A_1(T) = J_*(\theta_T - \theta_0 - \dot{\theta}_0 T) + J^* J_0^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} d_n (a_{Tn} - a_{0n} - b_{0n} T), \quad (11)$$

$$(\sin(\omega_n(T-t)), M(t))_{L_2(0,T)} = A_{2n+1}(T) = J_0 d_n^{-1} (a_{0n} \omega_n \cos(\omega_n T) + b_{0n} \sin(\omega_n T) - a_{Tn} \omega_n), \quad (12)$$

$$(\cos(\omega_n(T-t)), M(t))_{L_2(0,T)} = A_{2n}(T) = J_0 d_n^{-1} (-a_{0n} \omega_n \sin(\omega_n T) + b_{0n} \cos(\omega_n T) - b_{Tn}). \quad (13)$$

Утверждение 2. Пусть $y_0(x), y_T(x) \in H_3(0, 1)$, $\dot{y}_0(x), \dot{y}_T(x) \in H_1(0, 1)$.

Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} A_n^2(T) < \infty$.

Положим $\varphi_0(t) = 1$, $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_{2j}(t) = \cos(\omega_j t)$, $\varphi_{2j+1}(t) = \sin(\omega_j t)$ ($j = 1, 2, \dots$) и перепишем (10)-(13) в виде

$$\int_0^T \varphi_n(t) M(t) dt = \beta_n(T) \quad (n = 0, 1, \dots), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^2(T) < \infty. \quad (14)$$

Введем в рассмотрение линейный непрерывный функционал в $L_1(0, T)$ вида

$$F(u) = \int_0^T u(t) M(t) dt \quad (\|F\| = \|M(t)\|_{L_{\infty}(0,T)}). \quad (15)$$

Задача 1 может быть сформулирована как следующая проблема моментов в $L_1(0, T)$.

Найти функционал вида (15), удовлетворяющий условиям (14) и имеющий минимальную норму $\|F\| = m(T)$ (оптимальный функционал).

Сформулируем двойственную к проблеме моментов задачу.

Найти

$$\min_{\xi=(\xi_0, \xi_1, \dots)} \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j \varphi_j(t) \right\|_{L_1(0,T)} = \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j^* \varphi_j(t) \right\|_{L_1(0,T)} = \|u^*(t)\|_{L_1(0,T)} = l^{-1}(T)$$

при условии $\sum_{j=0}^{\infty} \xi_j \beta_j(T) = 1$.

Утверждение 3. $m(T) = l(T)$.

Утверждение 4. Решение задачи (1) дается формулой

$$M^*(t) = l(T) \text{sign}(u^*(t)). \quad (16)$$

Обозначим через $S(l(T))$ множество функционалов вида (15), имеющих норму $l(T)$. Элемент $u_0(t) = u^*(t) / \|u^*(t)\|_{L_1(0,T)}$ назовем экстремальным.

Утверждение 5 (Принцип максимума). Оптимальный функционал $F_*(u)$, вида (15) и определенный функцией $M^*(t)$, выделяется из всех функционалов вида (15), имеющих ту же норму $l(T)$, следующим свойством максимума на экстремальном элементе:

$$F_*(u_0) = \max_{M(t) \in S(l(T))} F(u_0).$$

Утверждение 6. $\lim_{T \rightarrow 0} l(T) = \infty$, $\lim_{T \rightarrow \infty} l(T) = 0$.

Обозначим через T^* первый положительный корень уравнения $l(T) = L$.

Утверждение 7. Решение задачи 2 дает пара $(T^*, M^*(t))$, где $M^*(t)$ определяется формулой (16).

1. *Кубышкин Е.П.* Оптимальное управление поворотом твердого тела с гибким стержнем // Прикладная математика и механика. 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 240–249.

Nesterov P. (P. G. Demidov Yaroslavl State University). Systems with Oscillatory Decreasing Coefficients: Method of Averaging and Asymptotics of Solutions.

Systems containing oscillatory decreasing coefficients (ODC) arise in different fields, e.g., quantum mechanics, radiophysics, microelectronics, elasticity theory etc. The simplest example of the oscillatory decreasing function is $f(t) = v(t)P(t)$, where $v(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ and $P(t)$ is a periodic function or trigonometric polynomial (almost periodic function). It is well-known that ODC may effect the qualitative behavior of solutions of the dynamical systems. The classical example of this kind is due to von Neumann and Wigner [4]. In our research we propose a method for asymptotic integration of linear dynamical systems with ODC. This method uses the following results: averaging changes of variable in systems with ODC [5] and Levinson's fundamental theorem (see, e.g., [3]). We illustrate this method by analyzing some problems coming from various applications [1, 6, 8]. We also speak about some extensions of the proposed method [2, 7] and outline the directions of our current research [9].

The reported study was partially supported by RFBR (research project No. 12-01-31004 мол_a) and by the Government of the Russian Federation (Decree No. 220, Contract No. 11.G34.31.0053 and Contract No. 14.B37.21.2016).

1. *Burd V., Nesterov P.* Parametric resonance in adiabatic oscillators // Results Math. 2010. Vol. 58, No. 1 – 2. P. 1–15.
2. *Burd V., Nesterov P.* Asymptotic behaviour of solutions of the difference Schrödinger equation // J. Difference Equ. Appl. 2011. Vol. 17, No. 11. P. 1555–1579.
3. *Eastham M.S.P.* The asymptotic solution of linear differential systems. Oxford: Clarendon Press, 1989.
4. *Neumann J.v., Wigner E.* Über merkwürdige diskrete Eigenwerte // Physikalische Zeitschrift. 1929. Vol. 30. P. 465–467.
5. *Nesterov P.N.* Averaging method in the asymptotic integration problem for systems with oscillatory-decreasing coefficients // Differ. Equ. 2007. Vol. 43, No. 6. P. 745–756.
6. *Nesterov P.* On the asymptotics for solutions of system of two linear oscillators with slowly decreasing coupling // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2009. Vol. 89, No. 6. P. 466–480.

7. *Nesterov P.* Method of averaging for systems with main part vanishing at infinity // Math. Nachr. 2011. Vol. 284, No. 11-12. P. 1496–1514.
8. *Nesterov P.* On eigenvalues of the one-dimensional Dirac operator with oscillatory decreasing potential // Math. Phys. Anal. Geom. 2012. Vol. 15, No. 3. P. 257–298.
9. *Nesterov P.* Asymptotic integration of functional differential systems with oscillatory decreasing coefficients // Monatsh. Math. DOI: 10.1007/s00605-012-0437-2 (to appear) .

Кащенко И. С. (Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова). О сложности локальной динамики простейшего нелинейного уравнения с запаздыванием.

В настоящей работе мы покажем сложность локальной динамики одного из наиболее простых нелинейных уравнений с запаздыванием вида

$$\dot{x} + x = ax(t - T) + fx^3, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Уравнение (1) асимптотическими методами изучалось в работах [1, 2, 3, 4].

Основное предположение будет состоять в том, что запаздывание T достаточно велико, т.е.

$$T = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \ll 1.$$

Перейдем в (1) к быстрому времени: сделаем замену $t \rightarrow tT$, $x(tT) \rightarrow x(t)$. В результате получим более удобное для анализа уравнение

$$\varepsilon \dot{x} + x = ax(t - 1) + fx^3. \quad (2)$$

Также будем считать, что в (2) выполнено условие $a = -(1 + \mu)$, где $\mu \ll 1$. Представим μ в виде $\mu = \varepsilon^p a_1$, $0 < p < 2$. Отметим, что параметры a_1 и p можно выбирать неединственным образом.

В работах [2, 3, 4] показано, что при выполнении этих условий локальная динамика (2) определяется семейством параболических уравнений, зависящим от положительного параметра ω ,

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + fu^3, \quad u(\tau, r) = -u(\tau, r + 1). \quad (3)$$

Периодическому решению $u_*(\tau, r)$ системы (3) соответствует асимптотическое по невязке решение $x_*(t)$ исходного уравнения (2) вида

$$x_*(t) = \varepsilon^{p/2} u_*(\varepsilon^p t, (\omega \varepsilon^{p/2-1} + \theta)t) + o(\varepsilon^{p/2}). \quad (4)$$

Параметр $\theta = \theta(\omega, \varepsilon) \in [0, 1)$ здесь определяется так, что значение выражения $\omega \varepsilon^{p/2-1} + \theta$ является целым числом.

В [2, 3, 4] приведены формулы, с помощью которых можно построить асимптотическое по невязке решение (2) с любой точностью. Однако аналитическими методами мы, кроме отдельных случаев, доказать устойчивость таких решений не можем. Проведем численный счет уравнения (2).

Выберем несколько значений a_1 и ω и для каждой пары численно найдем какое-нибудь устойчивое решение краевой задачи (3). Затем по формуле (4) на основе полученных решений построим приближение решения исходного уравнения с запаздыванием (2). На рисунке 1 показаны графики получившихся функций.

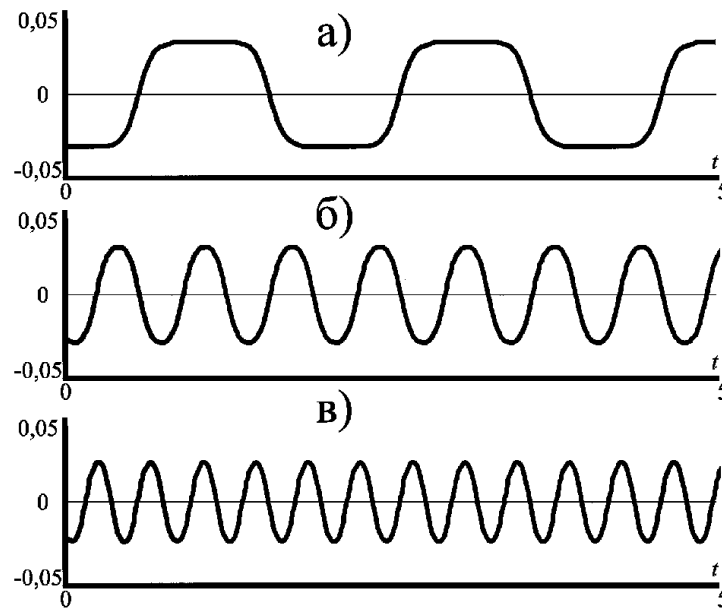


Рис. 1. Графики функций, построенные на основе решений нормализованной формы (3) по формуле (4). Значения параметров: а) $a_1 = 5$, $p = 1,23$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $f = -1$, $\omega = 4$; б) $a_1 = 1$, $p = 1$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $f = -1$, $\omega = 4$; в) $a_1 = 1$, $p = 1$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $f = -1$, $\omega = 3$.

Важным является тот факт, что при всех значениях параметров, которые использовались при построении графиков, выполняется тождество $a_1 \varepsilon^p \equiv 10^{-3}$. То есть все полученные по формуле (4) функции являются приближением решений одного и того же уравнения

$$10^{-3} \dot{x} + x = -1,001x(t-1) - x^3. \quad (5)$$

Возьмем функции, графики которых приведены на рис. 1, в качестве начальных условий для уравнения (5) и численными методами построим решения полученных начальных задач. На рис. 2 приведены графики соответствующих решений при значении времени $t = 3000$.

Мы видим, что в малой окрестности состояния равновесия уравнения (5) существует несколько решений. Эти решения близки к тем, что были предсказаны на основании анализа нормализованной формы (3) (см. рис. 1).

Отметим, что если в уравнении вида (2) для параметра выполнено условие $|a| < 1$, то нулевое решение экспоненциально устойчиво. То есть при $a = -1$ происходит бифуркация, в результате которой, как мы показали, рождается асимптотически большое количество циклов (мы привели численные расчеты для трех, но понятно, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ их количество неограниченно растет).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ по постановлению № 220, договор № 11.G34.31.0053 и при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашения 14.B37.21.0457 и 14.B37.21.2016.

1. *Кащенко С. А.* Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, №8. С. 1448–1451.

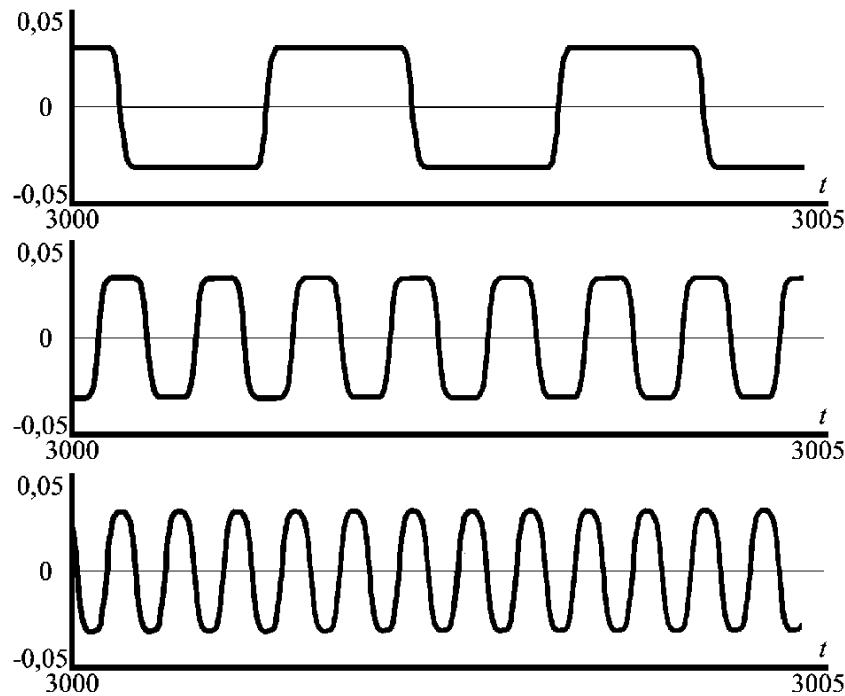


Рис. 2. Графики некоторых решений уравнения (5).

2. *Кащенко И. С.* Динамические свойства уравнений первого порядка с большим запаздыванием // Моделирование и анализ информационных систем. 2007. Т. 14, № 2. С. 58–62.
3. *Кащенко И. С.* Асимптотический анализ поведения решений уравнения с большим запаздыванием // Доклады Академии Наук. 2008. Т. 421, № 5 С. 586–589.
4. *Кащенко И. С.* Локальная динамика уравнений с большим запаздыванием // Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики. 2008. Т. 48, № 12. С. 2141–2150.

Глызин С. Д. (Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова). **Инвариантные характеристики диффузионного хаоса.** Рассматривается параболическая краевая задача вида

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x}{\partial t} &= D_1 \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + r_1[1 + a(1 - z) - x]x, & \frac{\partial x}{\partial s} \Big|_{s=0} &= \frac{\partial x}{\partial s} \Big|_{s=1} = 0, \\
 \frac{\partial y}{\partial t} &= D_2 \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + r_2[x - y]y, & \frac{\partial y}{\partial s} \Big|_{s=0} &= \frac{\partial y}{\partial s} \Big|_{s=1} = 0, \\
 \frac{\partial z}{\partial t} &= D_3 \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + r_3[\alpha x + (1 - \alpha)y - z]z, & \frac{\partial z}{\partial s} \Big|_{s=0} &= \frac{\partial z}{\partial s} \Big|_{s=1} = 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

представляющая собой распределенную на отрезке $0 \leq s \leq 1$ модель реакции Белоусова–Жаботинского (см. [1, 2, 3, 4, 5, 6]). Здесь $x(t, s)$, $y(t, s)$, $z(t, s)$ — концентрации реагирующих частей, D_j , $j = 1, 2, 3$ — некоторые положительные параметры, которые в дальнейшем

считаем пропорциональными одному параметру $d > 0$. Точнее говоря, положим в (1)

$$(D_1, D_2, D_3) = d(D_1^0, D_2^0, D_3^0), \quad D_1^0 = 0.01, \quad D_2^0 = 0.08, \quad D_3^0 = 0.01; \\ r_1 = 1, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = 3, \quad \alpha = 0.2, \quad a = 100 \quad (2)$$

и будем интересоваться аттракторами получившейся краевой задачи, возникающими в ее фазовом пространстве $(x, y, z) \in C([0, 1]; \mathbb{R}^3)$ при уменьшении d .

Для решения поставленной проблемы выполним в (1) стандартную дискретизацию. В связи с этим фиксируем произвольно натуральное N и в точках $s = (j - 1/2)/N$, $j = 1, 2, \dots, N$ заменим частные производные по s соответствующими разностными операторами. В результате приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= dD_1^0 N^2 (x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}) + r_1 [1 + a(1 - z_j) - x_j] x_j, \\ \dot{y}_j &= dD_2^0 N^2 (y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}) + r_2 [x_j - y_j] y_j, \\ \dot{z}_j &= dD_3^0 N^2 (z_{j+1} - 2z_j + z_{j-1}) + r_3 [\alpha x_j + (1 - \alpha) y_j - z_j] z_j, \end{aligned} \quad (3)$$

где $x_j(t) = x(t, s)|_{s=(j-1/2)/N}$, $y_j(t) = y(t, s)|_{s=(j-1/2)/N}$, $z_j(t) = z(t, s)|_{s=(j-1/2)/N}$, $j = 1, \dots, N$, причем $x_0 = x_1$, $y_0 = y_1$, $z_0 = z_1$, $x_{N+1} = x_N$, $y_{N+1} = y_N$, $z_{N+1} = z_N$.

При интерпретации численных экспериментов, проводившихся для системы (3) при условиях (2) и при различных значениях d , N , удобно ввести понятие вероятностного аттрактора (см. [10]). А именно, вероятностным аттрактором $A_N \subset \mathbb{R}^{3N}$ системы (3) назовем наименьшее замкнутое множество, содержащее ω -предельные множества ее траекторий для почти всех (в смысле меры Лебега) начальных условий из конуса $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{3N}$ векторов с неотрицательными координатами. Нас будут интересовать такие характеристики инвариантного множества A_N , как ляпуновская размерность $d_L(A_N)$, вычисляющаяся по известной формуле Каплана–Йорке, и старший ляпуновский показатель $\lambda_{\max}(A_N)$ (использовалась методика, изложенная в статье [11]).

При построении зависимости величин $d_L(A_N)$ и $\lambda_{\max}(A_N)$ от N выяснилось, что при $N \geq 52$ аттрактор A_N состоит по крайней мере из двух непересекающихся компонент $A_N^{(1)}$ и $A_N^{(2)}$, которым соответствуют различные наборы ляпуновских показателей. В связи с этим вычисление величин d_L и $\lambda_{\max}$ проводилось отдельно для каждой компоненты, и поэтому для $A_N^{(1)}$ эти величины были найдены при $10 \leq N \leq 100$, а для $A_N^{(2)}$ – только при $52 \leq N \leq 100$.

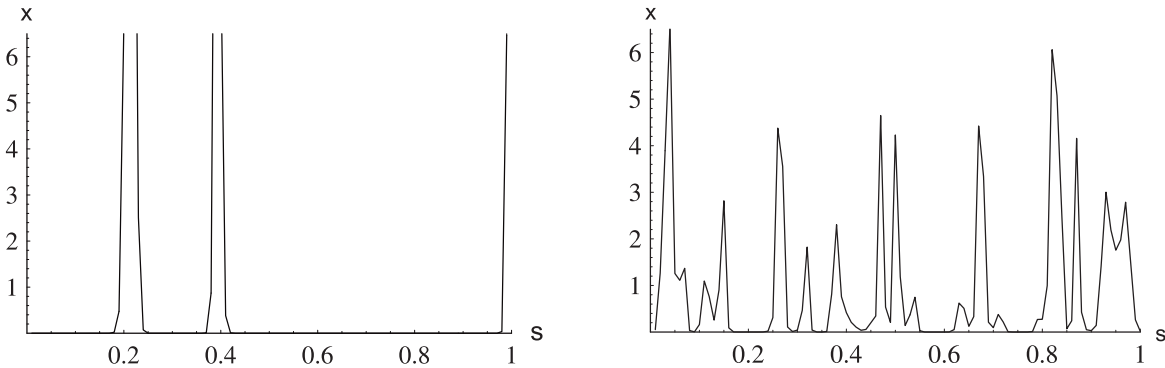


Рис. 1.

Качественное различие между аттракторами $A_N^{(1)}$ и $A_N^{(2)}$ иллюстрирует рис. 1, где слева изображен график компоненты $x(t, s)$ решения краевой задачи (1) при фиксированном t ,

построенной по точкам $(x_j(t), s = (j - 1/2)/N, j = 1, \dots, N)$ при $N = 100, d = 0.002$ для случая $A_N^{(1)}$, а справа – аналогичный график, соответствующий случаю $A_N^{(2)}$.

Основная особенность аттрактора $A_N^{(1)}$ заключается в том, что его компоненты $x_j(t)$ по своим свойствам близки к компоненте $x(t)$ релаксационного цикла точечной сингулярно возмущенной системы, соответствующей (1). А именно, все они почти одновременно становятся величинами порядка $10^{-10} - 10^{-20}$, остаются таковыми некоторое конечное время, а затем претерпевают достаточно высокие всплески δ -образного характера (см. левый график на рис. 1). В случае же $A_N^{(2)}$ ситуация принципиально меняется: по сравнению с $A_N^{(1)}$ уменьшаются величины всплесков компонент $x_j(t)$ и увеличиваются их минимумы (см. правый график на рис. 1). В связи с этим в дальнейшем аттрактор $A_N^{(1)}$ будем называть релаксационным хаосом, а аттрактор $A_N^{(2)}$ – хаосом типа самоорганизации.

Интересно отметить, что для системы (3) термин "самоорганизация" имеет прозрачный биологический смысл. Действительно, в биологической интерпретации $x_j(t)$ – это локальные плотности численности жертвы, и в режиме самоорганизации происходит следующее: жертва искусственно (за счет миграций) создает себе неоднородную среду обитания и повышает свой уровень жизни – всплески ее численности становятся менее интенсивными и одновременно увеличиваются минимумы компонент $x_j(t), j = 1, \dots, N$.

Отдельно остановимся на вопросе о том, какие выводы из проделанного численного анализа можно сделать об аттракторах распределенной модели (1) при условиях (2) и при $d = 0.002$. Вычисления позволяют заключить, что при $N \rightarrow \infty$ величины $d_L(A_N^{(2)})$ и $\lambda_{\max}(A_N^{(2)})$ стремятся к некоторым конечным положительным пределам. Тем самым, есть все основания ожидать, что краевая задача (1) имеет хаотический аттрактор $A^{(2)} = \lim_{N \rightarrow \infty} A_N^{(2)}$, который, как и аттрактор $A_N^{(2)}$, уместно назвать хаосом типа самоорганизации.

В случае $A_N^{(1)}$ ситуация несколько сложнее. Здесь $d_L(A_N^{(1)})$ при $N \rightarrow \infty$ также сходится к некоторому положительному пределу, а предел $\lambda_{\max}(A_N^{(1)})$, по всей видимости, равен нулю. Это означает, что аттрактор $A^{(1)} = \lim_{N \rightarrow \infty} A_N^{(1)}$ релаксационного типа в распределенной модели (1) при $d = 0.002$ хотя и существует, но не является хаотическим (он становится хаотическим при меньших значениях d).

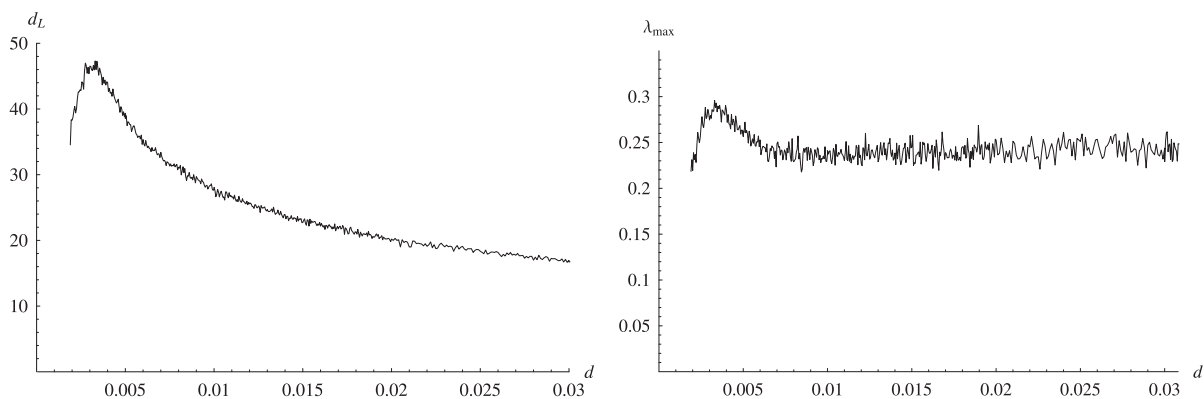


Рис. 2.

Рассмотрим теперь вопрос о зависимости характеристик d_L и $\lambda_{\max}$ от параметра d при фиксированном N . Соответствующие численные эксперименты проводились при различ-

ных N ($N = 20, 50, 60$), их результаты представлены на рис. 2 (в этом случае значения d_L и $\lambda_{\max}$ вычислялись на хаосе типа самоорганизации).

Приведенные графики свидетельствуют о том, что при согласованном уменьшении d и увеличении N в системе (3) возникают хаотические аттракторы сколь угодно высокой размерности. Точнее говоря, величины d_L и $\lambda_{\max}$, рассматриваемые как функции переменной d , достигают своих максимальных значений в одной и той же точке $d = d_N^*$, причем $d_L|_{d=d_N^*} \rightarrow \infty$, $\lambda_{\max}|_{d=d_N^*} \rightarrow \lambda_{\max}^0 > 0$ при $N \rightarrow \infty$. Ясно также, что неограниченный рост размерностей хаотических аттракторов происходит при $d \rightarrow 0$ и в исходной краевой задаче (1), поскольку, как уже отмечалось выше, при $N \rightarrow \infty$ и при фиксированном d аттракторы $A_N^{(1)}$ и $A_N^{(2)}$ сходятся к соответствующим аттракторам распределенной модели.

Суммируя проделанные построения, отметим, что для распределенной модели (1) с помощью численных методов удалось установить феномен диффузионного хаоса – неограниченный рост размерностей хаотических аттракторов при пропорциональном уменьшении коэффициентов диффузии. Попутно было обнаружено два типа хаотических автоколебаний – релаксационный хаос и хаос типа самоорганизации. Автоколебательные режимы первого типа по своим свойствам в определенном смысле близки к однородному циклу $(x(t, s), y(t, s), z(t, s)) \equiv (x(t), y(t), z(t))$, где $x(t), y(t), z(t)$ – компоненты устойчивого релаксационного цикла точечной системы. В случае же хаоса типа самоорганизации функции $x(t, s), y(t, s), z(t, s)$ оказываются существенно более изрезанными по пространственной переменной s (см. рис. 1). Именно по этой причине режимы самоорганизации наблюдаются в системе (3) лишь при достаточно больших N .

В заключение отметим, что в отличие, скажем, от уравнения Гинзбурга – Ландау (см. [7, 8]) возникновение диффузионного хаоса в краевой задаче (1) не связано напрямую с потерей устойчивости однородного цикла. Более того, если положить, например, в (2) $\alpha = 0$, сохранив значения остальных параметров, то этот цикл остается устойчивым при любом $d > 0$, а при малых d сосуществует с диффузионным хаосом.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ по постановлению № 220, договор № 11.G34.31.0053 и при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.0457.

1. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Релаксационные колебания и диффузионный хаос в реакции Белоусова // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51, № 8. С. 1400 – 1418.
2. Белоусов Б.П. Периодически действующая реакция и ее механизм // Автоволновые процессы в системах с диффузией. Горький: Ин-т прикл. физики АН СССР, 1981. С. 176 – 186.
3. Жаботинский А.М. Концентрационные автоколебания. М.: Наука, 1974.
4. Колесов Ю.С. Проблема адекватности экологических уравнений. Ярославль, 1985. Деп. ВИНТИ. 1985. № 1901-85.
5. Кащенко С. А. Асимптотика решений обобщенного уравнения Хатчинсона // Моделирование и анализ информационных систем. 2012. Т. 19, № 3. С. 32 – 62.
6. Кащенко С. А. Асимптотика релаксационных колебаний в математической модели реакции Белоусова // Динамика биологических популяций. Горький: ГГУ, 1987. С. 51 – 55.

7. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Конечномерные модели диффузионного хаоса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50. № 5. С. 860 – 875.
8. Глызин С. Д. Разностные аппроксимации уравнения «реакция-диффузия» на отрезке // Моделирование и анализ информационных систем. 2009. Т. 16, № 3. С. 96 – 116.
9. Ruoff P., Noyes R.M. An Amplified Oregonator Model Simulating Alternative Excitabilities, Transitions in Types of Oscillations, and Temporary Bistability in a Closed System // J. Chem. Phys. 1986. V. 84. № 5. P. 1413 – 1423.
10. Milnor J. On the concept of attractor // Commun. Math. Phys. 1985. V. 99. № 2. P. 177 – 196.
11. Глызин Д.С., Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 2. С. 268 – 273.