Моделирование и анализ информационных систем. Т. 25, № 3 (2018), с. 257–267
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 25, No 3 (2018), pp. 257–267

Вероятностные модели

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-3-257-267

УДК 517.935

Об оценке средней временной выгоды в вероятностных эколого-экономических моделях

Родина Л. И.[1], Тютеев И.И.

получена 12 марта 2018

Аннотация. Рассматриваются эколого-экономические модели оптимального сбора ресурса, заданные дифференциальными уравнениями с импульсным воздействием, которые зависят от случайных параметров. Предполагаем, что длины интервалов θ_k между моментами импульсов τ_k являются случайными величинами и размеры импульсного воздействия зависят от случайных параметров v_k, $k = 1, 2, \ldots$ Одним из примеров таких объектов является уравнение с импульсами, моделирующее динамику популяции, подверженной промыслу. При отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается дифференциальным уравнением $\dot{x} = g(x)$, а в моменты времени τ_k из популяции извлекается случайная доля ресурса v_k, $k = 1, 2, \ldots$ На процесс сбора можно влиять таким образом, чтобы остановить заготовку в том случае, когда ее доля окажется достаточно большой, чтобы сохранить возможно больший остаток ресурса для увеличения размера следующего сбора. Пусть уравнение $\dot{x} = g(x)$ имеет асимптотически устойчивое решение $\varphi(t) \equiv K$, областью притяжения которого является интервал (K_1, K_2), где $0 \leqslant K_1 < K < K_2$. Построено управление $u = (u_1, \ldots, u_k, \ldots)$, ограничивающее долю добываемого ресурса в каждый момент времени τ_k таким образом, чтобы количество оставшегося ресурса, начиная с некоторого момента τ_{k_0}, было не меньше заданного значения $x \in (K_1, K)$. Для любого $x \in (K_1, K)$ получены оценки средней временной выгоды, выполненные с вероятностью единица. Показано, что существует единственное $x^* \in (K_1, K)$, при котором оценка снизу достигает наибольшего значения. Таким образом, описан способ эксплуатации популяции, при котором значение средней временной выгоды можно оценить снизу с вероятностью единица по возможности наибольшим числом.

Ключевые слова: модель популяции, подверженной промыслу, средняя временная выгода, оптимальная эксплуатация

Для цитирования: Родина Л. И., Тютеев И.И., "Об оценке средней временной выгоды в вероятностных эколого-экономических моделях", *Моделирование и анализ информационных систем*, **25**:3 (2018), 257–267.

Об авторах:
Родина Людмила Ивановна, orcid.org/0000-0003-1077-2189, д-р физ.-мат. наук,
профессор кафедры функционального анализа и его приложений,
Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
ул. Горького, 87, Владимир, 600000 Россия, e-mail: LRodina67@mail.ru

Тютеев Илья Индусович, orcid.org/0000-0002-3850-2781, аспирант,
Удмуртский государственный университет,
ул. Университетская, 1, Ижевск, 426034 Россия, e-mail: it.30@mail.ru

Благодарности:
[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16–01–00346-а).

Введение

Рассматриваются эколого-экономические модели оптимального сбора ресурса, заданные дифференциальными уравнениями с импульсным воздействием, которые зависят от случайных параметров. Предполагаем, что длины интервалов $\theta_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ между моментами импульсов τ_k являются случайными величинами и размеры импульсного воздействия зависят от случайных параметров v_k, $k = 1, 2, \ldots$. Одним из примеров таких объектов является уравнение с импульсами, моделирующее динамику популяции, подверженной промыслу; полагаем, что изменение размера популяции (равное размеру промысловых заготовок) в моменты τ_k, а также сами эти моменты зависят от различных воздействий внешней среды, поэтому динамика популяции описывается уравнением со случайными параметрами. При отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается дифференциальным уравнением $\dot{x} = g(x)$, а в моменты времени τ_k из популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса v_k, $k = 1, 2, \ldots$. Здесь $\theta_k \in \Omega_1 \subseteq [\alpha_1, \beta_1]$, где $0 < \alpha_1 \leqslant \beta_1 < \infty$, $v_k \in \Omega_2 \subseteq [0, 1]$.

Пусть имеется возможность влиять на процесс сбора ресурса таким образом, чтобы остановить заготовку в том случае, когда ее доля окажется достаточно большой (больше некоторого значения $u_k \in [0, 1)$ в момент τ_k), чтобы сохранить возможно больший остаток ресурса для увеличения размера следующего сбора. В этом случае доля добываемого ресурса будет равна $\ell_k = \ell(v_k, u_k)$, где

$$\ell(v_k, u_k) = \begin{cases} v_k, & \text{если} \quad v_k < u_k, \\ u_k, & \text{если} \quad v_k \geqslant u_k. \end{cases}$$

Таким образом, мы рассматриваем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана дифференциальным уравнением с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(x), \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta x\big|_{t=\tau_k} &= -\ell(v_k, u_k)x, \quad k = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\Delta x\big|_{t=\tau_k} = x(\tau_k) - x(\tau_k - 0)$, $\theta_k = \tau_k - \tau_{k-1} \in \Omega_1$, $(x, v_k, u_k) \in [0, +\infty) \times \Omega_2 \times [0, 1]$. Предполагаем, что решения уравнения непрерывны справа, функция $g(x)$ определена и непрерывно дифференцируема для всех $x \in [0, +\infty)$. Пусть также имеет место следующее условие — *существует* $K > 0$ *такое, что* $\varphi(t) \equiv K$ *является асимптотически устойчивым решением уравнения* $\dot{x} = g(x)$. Данное условие выполнено, если $K > 0$ — стационарное состояние уравнения $\dot{x} = g(x)$ и $g'(K) < 0$ (см. [1, с. 30]). В частности, оно выполнено для следующих уравнений:

1. Логистическое уравнение $\dot{x} = (a - bx)x$, где коэффициенты $a > 0$ и $b > 0$ являются показателями роста популяции и внутривидовой конкуренции соответственно. Этим уравнением также описывается эффективность рекламного воздействия на покупателей при реализации нового товара.

2. Уравнение, учитывающее нижнюю критическую границу численности популяции и самоограничение при больших плотностях $\dot{x} = a\dfrac{\beta x^2}{\beta + \gamma x} - dx - \delta x^2$; здесь все постоянные $a, \beta, \gamma, d, \delta$ положительные (модель динамики популяции А.Д. Базыкина, см. [1, с. 44]).

3. Уравнение динамики популяции $\dot{x} = ax(x-L)(K-x)$, где $a > 0$, $K > L > 0$, L — нижняя критическая плотность популяции, K — стационарная плотность.

4. Уравнение Гомпертца $\dot{x} = -\dfrac{\varepsilon x}{\ln K} \ln \dfrac{x}{K}$, где $\varepsilon > 0$, $K > 1$.

Обозначим $U \doteq \{u : u = (u_1, \ldots, u_k, \ldots)\}$, где $u_k \in [0,1]$, $\theta \doteq (\theta_1, \ldots, \theta_k, \ldots)$, $\theta_k \in \Omega_1$, $\ell \doteq (\ell_1, \ldots, \ell_k, \ldots)$, $\ell_k = \ell(v_k, u_k)$. Пусть $X_k = X_k(\theta, \ell, x_0)$ — количество ресурса до сбора в момент τ_k, $k = 1, 2, \ldots$, зависящее от длин промежутков $\theta_1, \ldots, \theta_k$ между моментами сбора, долей ресурса $\ell_i = \ell(v_i, u_i)$, $i = 1, \ldots, k-1$, собранного в предыдущие моменты времени, и начального значения x_0. Для любого $x_0 \geqslant 0$ введем в рассмотрение функцию

$$H_*(\theta, \ell, x_0) \doteq \varliminf_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k(\theta, \ell, x_0)\ell_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \theta_k}, \qquad (2)$$

которую назовем *средней временной выгодой* от извлечения ресурса.

Предположим, что областью притяжения решения $\varphi(t) \equiv K$ является интервал (K_1, K_2), где $0 \leqslant K_1 < K < K_2$. В данной работе построено управление $u = (u_1, \ldots, u_k, \ldots)$, ограничивающее долю добываемого ресурса в каждый момент времени τ_k таким образом, чтобы количество оставшегося ресурса, начиная с некоторого момента τ_{k_0} (зависящего от x_0), было не меньше заданного значения $x \in (K_1, K)$. Для любого $x \in (K_1, K)$ получены оценки средней временной выгоды, выполненные с вероятностью единица. Показано, что существует единственное $x^* \in (K_1, K)$, при котором оценка снизу достигает наибольшего значения. Таким образом, мы описываем способ эксплуатации популяции, при котором значение средней временной выгоды $H_*(\theta, \ell, x_0)$ можно оценить снизу с вероятностью единица по возможности наибольшим числом.

Отметим, что в детерминированном случае, когда длины промежутков между импульсами и величины импульсного воздействия фиксированы, различные задачи оптимальной эксплуатации популяций исследуются в [2–5]. Одной из первых работ, посвященной оптимальному сбору ресурса в вероятностных моделях, является, по-видимому, [6], в которой показано, что стохастическую рыбную популяцию можно эксплуатировать до достижения определенного уровня (escapement level), не зависящего от текущего размера популяции. Сравнение различных характеристик для вероятностной и детерминированной моделей проводится в [6,7]; вопросы оптимальной эксплуатации популяций, заданных различными вероятностными моделями, также рассматриваются в [8–10] (более подробный обзор литературы приведен в [7]). В работе [11] получены оценки функции $H_*(\theta, \ell, x_0)$ в случае, когда динамика популяции задана логистическим уравнением $\dot{x} = (a - bx)x$ и длины промежутков между импульсами одинаковые. Здесь также показано, что при недостаточном ограничении на извлечение ресурса значение средней временной выгоды (2) может равняться нулю для всех или для почти всех значений случайных параметров.

1. Описание вероятностной модели

Вероятностная модель, заданная дифференциальным уравнением со случайными параметрами (1), подробно описана в работах [12, 13]. Приведем краткое описание для полноты изложения. В данной модели моменты τ_k являются моментами скачков для системы с импульсным воздействием; в частном случае, $\tau_1, \tau_2, \ldots$ — это моменты промысловых заготовок для модели популяции, подверженной промыслу. Полагаем, что $\tau_0 = 0$, $\theta_k = \tau_k - \tau_{k-1} \in \Omega_1 \subseteq [\alpha_1, \beta_1]$ и величина скачка в момент τ_k зависит от случайного параметра $v_k \in \Omega_2 \subseteq [0, 1]$. Таким образом, все параметры принадлежат множеству $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, причем любое из множеств Ω_1 или Ω_2 может содержать только один элемент. Если все множество Ω состоит из одного элемента, вероятностная модель совпадает с детерминированной.

Определим вероятностное пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$ как прямое произведением вероятностных пространств $(\Sigma_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ и $(\Sigma_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$. Здесь Σ_1 означает множество числовых последовательностей $\theta = (\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_k, \ldots)$, где $\theta_k \in \Omega_1$, система множеств $\mathfrak{A}_1$ является наименьшей сигма-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами

$$E_k \doteq \{\theta \in \Sigma_1 : \theta_1 \in I_1, \ldots, \theta_k \in I_k\}, \quad \text{где} \;\; I_i \doteq (t_i, s_i], \;\; i = 1, \ldots, k,$$

а вероятностная мера μ_1 определена следующим образом. Для каждого промежутка I_i, $i = 1, 2, \ldots$, определим вероятностную меру $\widetilde{\mu}_1(I_i) = F_1(s_i) - F_1(t_i)$ с помощью функции распределения $F_1(t)$. На алгебре цилиндрических множеств построим меру

$$\widetilde{\mu}_1(E_k) = \widetilde{\mu}_1(I_1) \cdot \ldots \cdot \widetilde{\mu}_1(I_k),$$

тогда в силу теоремы А. Н. Колмогорова (см., например, [14, с. 176]) на измеримом пространстве $(\Sigma_1, \mathfrak{A}_1)$ существует единственная вероятностная мера μ_1, которая является продолжением меры $\widetilde{\mu}_1$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}_1$. Таким же образом определяем вероятностное пространство $(\Sigma_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$, где $\Sigma_2 \doteq \{v : v = (v_1, \ldots, v_k, \ldots)\}$, $v_k \in \Omega_2$, мера $\widetilde{\mu}_2$ задана с помощью функции распределения $F_2(t)$.

Отметим, что $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2 = \{\sigma : \sigma = (\omega_1, \ldots, \omega_k, \ldots)\}$, где $\omega_k = (\theta_k, v_k) \in \Omega$. Зададим сигма-алгебру $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ и меру $\mu = \mu_1 \times \mu_2$, которая является прямым произведением вероятностных мер μ_1 и μ_2. Это означает, что $\mu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$ для всех $A \in \mathfrak{A}_1$, $B \in \mathfrak{A}_2$.

2. Оценка средней временной выгоды для вероятностной модели динамики популяции

Определим $\varphi(t, x)$ как решение уравнения $\dot{x} = g(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$, где $t \geqslant 0$, $x \geqslant 0$. Если $\vartheta \in \Omega_1$, то функция $\varphi(\vartheta, x)$ является случайной величиной, заданной на множестве Ω_1. Положим $u(x, \varphi(\vartheta, x)) = 1 - \dfrac{x}{\varphi(\vartheta, x)}$.

Рассмотрим функцию

$$\ell(\omega, x) = \ell\big(v, u(x, \varphi(\vartheta, x))\big) = \begin{cases} v, & \text{если} \;\; v < u(x, \varphi(\vartheta, x)), \\ u(x, \varphi(\vartheta, x)), & \text{если} \;\; v \geqslant u(x, \varphi(\vartheta, x)), \end{cases} \tag{3}$$

которая является случайной величиной на множестве $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

Если $g(K) = 0$, то уравнение $\dot{x} = g(x)$ имеет решение $\varphi(t) \equiv K$. Если $g'(K) < 0$, то решение $\varphi(t) \equiv K$ асимптотически устойчиво. Напомним, что областью асимптотической устойчивости (областью притяжения) решения $\varphi(t) \equiv K$ уравнения $\dot{x} = g(x)$ является множество всех точек $x \in \mathbb{R}$, обладающих свойством $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t, x) = K$.

Буквой M будем обозначать математическое ожидание случайной величины, m_θ — математическое ожидание длин интервалов $\theta_1, \theta_2, \ldots$ Отметим, что $0 < \alpha_1 \leqslant m_\theta \leqslant \beta_1 < \infty$.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *уравнение $\dot{x} = g(x)$ имеет асимптотически устойчивое решение $\varphi(t) \equiv K$ и интервал (K_1, K_2) является областью притяжения этого решения $(0 \leqslant K_1 < K < K_2)$;*

2) *$\Omega_1 \subseteq [\alpha_1, \beta_1]$, где $0 < \alpha_1 \leqslant \beta_1 < \infty$, $\Omega_2 \subseteq [0, 1]$ и $F_2(0) < 1$.*

Тогда для любых $(x, x_0) \in (K_1, K) \times (K_1, K_2)$ существует управление $u \in U$ такое, что для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнены неравенства

$$\frac{M\big(\varphi(\vartheta, x)\ell(\omega, x)\big)}{m_\theta} \leqslant H_*\big(\theta, \ell, x_0\big) \leqslant \frac{KM\ell(\omega, x)}{m_\theta}. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть X_k — размер популяции перед и x_k — размер популяции после извлечения ресурса в некоторый момент времени τ_k; тогда $x_k = (1 - \ell_k)X_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Покажем, что управления u_k, при которых выполнено (4), можно определить равенствами $u_k = 1 - \dfrac{x}{\varphi(\theta_k, x)}$ при всех $k > k_0$, где k_0 зависит от начального размера популяции x_0. Рассмотрим три случая.

1. Если $x_0 \in [x, K]$, то $X_1 = \varphi(\theta_1, x_0) \geqslant \varphi(\theta_1, x)$. Поскольку (K_1, K_2) является областью притяжения решения $\varphi(t) \equiv K$, то функция $t \mapsto \varphi(t, x)$ возрастает для любого $x \in (K_1, K)$, поэтому $\varphi(t, x) > \varphi(0, x) = x$ для всех $t > 0$, $x \in (K_1, K)$. Положим $u_k = 1 - \dfrac{x}{\varphi(\theta_k, x)}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, тогда из неравенства $\ell_1 \leqslant u_1$ следует, что

$$x_1 = (1 - \ell_1)X_1 \geqslant (1 - u_1)X_1 = \frac{xX_1}{\varphi(\theta_1, x)} \geqslant x.$$

Далее, $X_2 = \varphi(\theta_2, x_1) \geqslant \varphi(\theta_2, x)$. Аналогично получаем, что $X_k \geqslant \varphi(\theta_k, x)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Поэтому, если $u = (u_1, \ldots, u_k, \ldots)$, то $\ell_k = \ell(\omega_k, x)$ и

$$H_*\big(\theta, \ell, x_0\big) \geqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \theta_k} \sum_{k=1}^{n} \varphi(\theta_k, x)\ell(\omega_k, x). \tag{5}$$

2. Пусть $x_0 \in (K_1, x)$. Положим $u_k = 0$ для всех $k = 1, \ldots, k_0$, где $k_0 = k_0(x_0)$ — первое из натуральных чисел, таких что $x_k = X_k = \varphi(\tau_k, x_0) \geqslant x$. Данное значение k_0 существует, так как точка x_0 содержится в области притяжения решения $\varphi(t) \equiv K$. Определим $u_k = 1 - \dfrac{x}{\varphi(\theta_k, x)}$ для всех $k > k_0$, тогда $X_k \geqslant \varphi(\theta_k, x)$ при всех $k > k_0$; это доказывается так же, как в первом пункте. Следовательно, неравенство (5) справедливо при выбранном управлении $u = (u_1, \ldots, u_k, \ldots)$.

Отметим, что случайные величины $\varphi(\theta_k, x)\ell(\omega_k, x)$ независимы, одинаково распределены и так как $0 \leqslant \varphi(\theta_k, x)\ell(\omega_k, x) < Ku(x, \varphi(\theta_k, x))$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то

$$M\big|\varphi(\theta_k, x)\ell(\omega_k, x)\big| < KMu(x, \varphi(\theta_k, x)) \leqslant K < \infty.$$

Тогда из усиленного закона больших чисел Колмогорова следует, что для почти всех $\sigma \in \Sigma$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi(\theta_k, x)\ell(\omega_k, x) = M\big(\varphi(\vartheta, x)\ell(\omega, x)\big).$$

Из усиленного закона больших чисел также следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \theta_k = m_\theta$, поэтому из (5) получаем первое неравенство в (4).

Далее, если $x_0 \leqslant K$, то $X_k \leqslant K$ для любых u_k и всех $k \in \mathbb{N}$, поэтому

$$H_*\big(\theta, \ell, x_0\big) \leqslant K \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\theta_k} \sum_{k=1}^{n} \ell(\omega_k, x) = \frac{KM\ell(\omega, x)}{m_\theta}$$

для почти всех $\sigma \in \Sigma$, то есть выполнено последнее неравенство в (4).

3. Покажем, что утверждение теоремы справедливо при $x_0 \in (K, K_2)$. Пусть $k_1 = k_1(x_0)$ — наименьшее из натуральных чисел, таких что $x_k \leqslant K$ при $u_1 = \ldots = u_k = 1$; покажем, что данное число существует с вероятностью единица. Отметим сначала, что такое число существует, если $v_{k_1} = 1$ при некотором $k_1 \in \mathbb{N}$; тогда $x_k = 0$ при всех $k \geqslant k_1$.

Пусть теперь $v_k \neq 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Поскольку функция $t \mapsto \varphi(t, x)$ монотонно убывает при $x > K$, то $X_{k+1} = \varphi(\theta_{k+1}, x_k) < x_k$, если $x_k > K$, $k = 0, 1, \ldots$. Далее, если $u_k = 1$, то $\ell(v_k, 1) = v_k$; поэтому, если $x_0 > K$ и $u_1 = 1$, то $x_1 = X_1(1-v_1) < x_0(1-v_1)$; если $x_1 > K$ и $u_1 = u_2 = 1$, то

$$x_2 = X_2(1 - v_2) < x_1(1 - v_2) < x_0(1 - v_1)(1 - v_2).$$

Аналогично получаем, что если $x_k > K$ и $u_1 = \ldots = u_{k+1} = 1$, то

$$x_{k+1} < x_0(1 - v_1)(1 - v_2) \cdot \ldots \cdot (1 - v_{k+1}).$$

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\{C_k(v)\}_{k=1}^{\infty}$, где $C_k(v) = C_k(v_k) = 1 - v_k$. Введем также последовательность $\{S_k(v)\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$S_k(v) = \ln(1 - v_1) + \ldots + \ln(1 - v_k),$$

которая является случайным блужданием на прямой. Покажем, что если $F_2(0) < 1$, то

$$M \ln(1 - v_k) < 0. \tag{6}$$

Действительно, так как $v_k \in [0, 1)$, то $\ln(1 - v_k) \leqslant 0$, поэтому для математического ожидания либо выполнено неравенство (6), либо $M\ln(1 - v_k) = 0$. В последнем случае $v_k = 0$ с вероятностью единица [14, глава 2, §6], что противоречит условию $F_2(0) = \widetilde{\mu}_2(v_k = 0) < 1$. Из (6) следует, что с вероятностью единица $S_k(v)$ уходит в минус бесконечность (см. [15, глава 12, §2]). Это означает, что существует множество $\Sigma_2^0 \subseteq \Sigma_2$ такое, что $\mu_2(\Sigma_2^0) = 1$ и $\lim\limits_{k\to\infty} S_k(v) = -\infty$ для всех $v \in \Sigma_2^0$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} C_1(v_1)\cdot\ldots\cdot C_k(v_k) = 0$ для всех $v \in \Sigma_2^0$, поэтому с вероятностью единица найдется $k_1 = k_1(x_0)$ такое, что $X_{k_1}(1 - v_{k_1}) \leqslant K$.

Выберем управление $u_k = 1$ для всех $k = 1, \ldots, k_1 - 1$, $u_{k_1} = 1 - \dfrac{x}{X_{k_1}}$ и $u_k = 1 - \dfrac{x}{\varphi(\theta_k, x)}$ для всех $k > k_1$. Тогда из $x_{k_1} = X_{k_1}(1-\ell_{k_1})$ и неравенства $v_k \leqslant \ell(v_k, u_k) \leqslant u_k$ получаем, что

$$x = X_{k_1}(1 - u_{k_1}) \leqslant x_{k_1} \leqslant X_{k_1}(1 - v_{k_1}) \leqslant K.$$

Дальнейшее доказательство повторяет доказательство первых двух пунктов. $\square$

3. Построение наибольшей оценки снизу для средней временной выгоды, выполненной с вероятностью единица

Из равенства (3) следует, что

$$\varphi(\vartheta, x)\ell(\omega, x) = \begin{cases} v\varphi(\vartheta, x), & \text{если} \quad v < u(x, \varphi(\vartheta, x)), \\ \varphi(\vartheta, x) - x, & \text{если} \quad v \geqslant u(x, \varphi(\vartheta, x)). \end{cases}$$

Предположим, что распределения F_1 и F_2 имеют плотности f_1 и f_2 соответственно. Рассмотрим математическое ожидание случайной величины $\varphi(\vartheta, x)\ell(\omega, x)$ как функцию переменной x :

$$m(x) \doteq M\big(\varphi(\vartheta, x)\ell(\omega, x)\big) = \int_0^\infty \varphi(t, x) f_1(t)dt \int_0^{u(x,\varphi(t,x))} s f_2(s)ds + \\ + \int_0^\infty \big(\varphi(t, x) - x\big)\Big(1 - F_2\big(u(x, \varphi(t, x))\big)\Big) f_1(t)dt. \quad (7)$$

Утверждение 1. *Пусть распределения F_1 и F_2 имеют плотности f_1 и f_2 соответственно, $g(K_1) = g(K) = 0$, $g'(K) < 0$, $g'(K_1) > 0$, $g''(x) < 0$ при $x \in (K_1, K)$. Тогда функция $m(x)$ достигает максимального значения при $x = x^*$, где $x^* \in (K_1, K)$ является единственным решением уравнения $m'(x) = 0$:*

$$\int_0^\infty \varphi'_x(t, x) f_1(t)dt \int_0^{u(x,\varphi(t,x))} s f_2(s)ds + \int_0^\infty \big(\varphi'_x(t, x) - 1\big)\Big(1 - F_2\big(u(x, \varphi(t, x))\big)\Big) f_1(t)dt = 0. \quad (8)$$

Доказательство. Напомним, что через $\varphi(t, x)$ мы обозначаем решение уравнения $\dot{x} = g(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$. Покажем, что неравенства $\varphi'_x(t, x) \geqslant 0$ и $\varphi''_{xx}(t, x) \leqslant 0$ выполнены для всех $(t, x) \in (0, \infty) \times (K_1, K)$.

Из единственности решений уравнения следует, что функция $x \mapsto \varphi(t,x)$ возрастающая. Действительно, если существуют такие $x_1 < x_2$, что $\varphi(t,x_1) \geqslant \varphi(t,x_2)$, то найдется точка $t_* \in (0,t]$ такая, что $\varphi(t_*,x_1) = \varphi(t_*,x_2)$; получили противоречие.

Рассмотрим функцию $\psi(t,x) \doteq \varphi'_x(t,x)$, которая удовлетворяет уравнению $\dot{y} = g'_x(\varphi(t,x))y$ и начальному условию $\psi(0,x) = 1$ для всех $x \in [K_1, K]$ (см. [16, глава 5, §23]). Так как $g''(x) < 0$ при $x \in (K_1,K)$, то $g'(x)$ убывает на данном интервале. Функция $x \mapsto \varphi(t,x)$ возрастающая, поэтому $x \mapsto g'_x(\varphi(t,x))$ убывает для любого фиксированного $t \in (0,\infty)$. Таким образом, если $x_1 < x_2$, то

$$g'_x(\varphi(t,x_1)) > g'_x(\varphi(t,x_2))$$

при каждом $t \in (0,\infty)$. Поэтому в силу теоремы Чаплыгина о дифференциальном неравенстве (см. [17]) $\psi(t,x_1) > \psi(t,x_2)$, то есть $\varphi'_x(t,x_1) > \varphi'_x(t,x_2)$ для любого $t \in (0,\infty)$. Это означает, что функция $x \mapsto \varphi'_x(t,x)$ убывающая, тогда $\varphi''_{xx}(t,x) \leqslant 0$ для всех $(t,x) \in (0,\infty) \times (K_1,K)$, причем множество тех $x \in (K_1,K)$, при которых $\varphi''_{xx}(t,x) = 0$, не более чем счетно.

Чтобы показать, что (8) имеет единственное решение, нужно доказать, что функция $m'(x)$ убывает на интервале (K_1,K) и на концах интервала удовлетворяет неравенствам $m'(K_1) > 0$, $m'(K) < 0$. Найдем

$$m''(x) = \int_0^\infty \varphi''_{xx}(t,x) f_1(t)dt \int_0^{u(x,\varphi(t,x))} s f_2(s)ds + \\ + \int_0^\infty \varphi''_{xx}(t,x)\Big(1 - F_2\big(u(x,\varphi(t,x))\big)\Big) f_1(t)dt.$$

Тогда из условий, полученных для функции $\varphi''_{xx}(t,x)$, следует, что $m''(x) \leqslant 0$ для всех $x \in (K_1,K)$ и множество тех $x \in (K_1,K)$, при которых $m''(x) = 0$, не более чем счетно; поэтому $m'(x)$ убывает на (K_1,K). Далее, так как $g(K_1) = g(K) = 0$, то $\varphi(t,K) \equiv K$, $\varphi(t,K_1) \equiv K_1$, поэтому $u(K,\varphi(t,K)) = u(K_1,\varphi(t,K_1)) = 0$; из (8) следует, что

$$m'(K) = (1 - F_2(0)) \int_0^\infty \big(\varphi'_x(t,K) - 1\big) f_1(t)dt. \tag{9}$$

Функция $\psi(t,K) \doteq \varphi'_x(t,K)$ удовлетворяет уравнению $\dot{y} = g'(K)y$, где $g'(K) < 0$; поэтому $\psi(t,K)$ является убывающей и, так как $\psi(0,K) = 1$, то $\varphi'_x(t,K) = \psi(t,K) < 1$ для всех $t \in (0,\infty)$. Таким образом, из (9) следует, что $m'(K) < 0$. Аналогично, из неравенства $g'(K_1) > 0$ получаем, что $m'(K_1) > 0$. □

При доказательстве теоремы 1 построено управление $u \in U$ такое, что для любых $(x,x_0) \in (K_1,K) \times (K_1,K_2)$ неравенства (4) выполнены при почти всех $\sigma \in \Sigma$. Пусть математическое ожидание $m(x) = M\big(\varphi(\vartheta,x)\ell(\omega,x)\big)$ достигает максимального значения при $x = x^* \in (K_1,K)$. В следующем утверждении приведено одно из управлений $u^* = (u_1^*, u_2^*, \ldots) \in U$, при котором среднюю временную выгоду $H_*\big(\theta,\ell,x_0\big)$ можно оценить снизу по возможности наибольшим числом. Данное управление u^* ограничивает долю добываемого ресурса в каждый момент сбора τ_k таким образом, чтобы количество оставшегося ресурса, начиная с некоторого момента времени $\tau_{k_0}(x_0)$, было не меньше значения x^*. Оно строится по тому же принципу, что и управление $u \in U$ в теореме 1.

Следствие 1. *Пусть* $m(x)$ *достигает максимального значения при* $x = x^* \in (K_1, K)$; $\widetilde{u}_k^* \doteq 1 - \dfrac{x^*}{\varphi(\theta_k, x^*)}$, $k \in \mathbb{N}$. *Управление* $u^* = (u_1^*, u_2^*, \ldots) \in U$, *при котором для любого* $x_0 \in (K_1, K_2)$ *при почти всех* $\sigma \in \Sigma$ *выполнены неравенства*

$$\frac{M\big(\varphi(\vartheta, x^*)\ell(\omega, x^*)\big)}{m_\theta} \leqslant H_*\big(\theta, \ell, x_0\big) \leqslant \frac{KM\ell(\omega, x^*)}{m_\theta},$$

можно определить следующим образом:

1) *если* $x_0 \in [x^*, K]$, *то* $u_k^* = \widetilde{u}_k^*$ *для всех* $k \in \mathbb{N}$;

2) *если* $x_0 \in (K_1, x^*)$, *то* $u_k^* = 0$ *для всех* $k = 1, \ldots, k_0$ *и* $u_k^* = \widetilde{u}_k^*$ *для всех* $k > k_0$, *где* $k_0 = k_0(x_0)$ *— наименьшее из натуральных чисел, таких что* $x_k \geqslant x^*$ *при* $u_1 = \ldots = u_k = 0$;

3) *если* $x_0 \in (K, K_2)$, *то* $u_k^* = 1$ *для всех* $k = 1, \ldots, k_1 - 1$, $u_{k_1}^* = 1 - \dfrac{x^*}{X_{k_1}}$, $u_k^* = \widetilde{u}_k^*$ *для всех* $k > k_1$; *здесь* $k_1 = k_1(x_0)$ *— наименьшее из натуральных чисел, таких что* $x_k \leqslant K$ *при* $u_1 = \ldots = u_k = 1$.

Пример 1. Найдем оценку средней временной выгоды $H_*\big(\theta, \ell, x_0\big)$ для уравнения (1), в котором $g(x) = x(1-x)$; то есть при отсутствии эксплуатации динамика популяции задана логистическим уравнением $\dot{x} = x(1-x)$. Пусть распределение F_1 длин интервалов $\theta_1, \theta_2, \ldots$ между моментами извлечения ресурса является равномерным на отрезке $[1, 2]$, а распределение F_2 величин $v_1, v_2, \ldots$ — равномерным на отрезке $[0, 1]$.

Отметим, что решением уравнения $\dot{x} = x(1-x)$, удовлетворяющим начальному условию $\varphi(0, x) = x$, является функция

$$\varphi(t, x) = \frac{xe^t}{1 - x + xe^t}$$

и, кроме того, данное уравнение имеет асимптотически устойчивое решение $\varphi(t) \equiv 1$. Выпишем математическое ожидание случайной величины $\varphi(\vartheta, x)\ell(\omega, x)$, опуская промежуточные вычисления:

$$m(x) = \int_1^2 \frac{xe^t dt}{1 - x + xe^t} \int_0^{(1-x)(1-e^{-t})} sds + \int_1^2 x(1-x)(1-e^{-t})dt = \\ = \frac{1}{2}\Big(\ln\big(x(e^2 - 1) + 1\big) - \ln\big(x(e-1) + 1\big) - x^2 + (e^{-2} - e^{-1})x(1-x)\Big).$$

Также найдем

$$M\ell(\omega, x) = \int_1^2 dt \int_0^{(1-x)(1-e^{-t})} sds + (1-x)\int_1^2 (e^{-t} - e^{-2t})(1 - x + xe^t)dt = \\ = \frac{(1-x)^2}{4}\big(2 - e^{-2} + e^{-4}\big) + x(1-x)\big(1 - e^{-1} + e^{-2}\big).$$

Функция $m(x)$ достигает максимального значения при $x \approx 0,382$,

$$m(0,382) \approx 0,397, \;\; M\ell(\omega; 0,382) \approx 0,438, \;\; m_\theta = 1,5, \;\; K = 1,$$

поэтому из (4) получаем оценку средней временной выгоды

$$0,265 \leqslant H_*\big(\theta, \ell, x_0\big) \leqslant 0,292,$$

которая справедлива для почти всех $\sigma \in \Sigma$.

Список литературы / References

[1] Ризниченко Г. Ю., *Лекции по математическим моделям в биологии. Ч. 1*, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Ижевск, 2002; [Riznichenko G. Yu., *Lektsii po matematicheskim modelyam v biologii. Ch. 1*, NIC "Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika", Izhevsk, 2002, (in Russian).]

[2] Bainov D.D., "Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population", *Applied Mathematics and Computation*, **39**:3 (1990), 37–48.

[3] Belyakov A.O., Davydov A.A., Veliov V.M., "Optimal cyclic exploitation of renewable resources", *J. Dyn. Control Syst*, **21**:3 (2015), 475–494.

[4] Беляков А.О., Давыдов А.А., "Оптимизация эффективности циклического использования возобновляемого ресурса", *Тр. Ин-та матем. и механ. УрО РАН*, **22**:2 (2016), 38–46; [Belyakov A.O., Davydov A.A., "Efficiency optimization for the cyclic use of a renewable resource", *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, **22**:2 (2016), 38–46, (in Russian).]

[5] Aseev S., Manzoor T., *Optimal growth, renewable resources and sustainability*, International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA), Laxenburg, Austria, 2016.

[6] Reed W.J., "Optimal escapement levels in stochastic and deterministic harvesting models", *Journal of Environmental Economics and Management*, **6** (1979), 350–363.

[7] Kapaun U., Quaas M. F., "Does the optimal size of a fish stock increase with environmental uncertainties?", *Economics Working Paper*, 2012, № 2012-09, 1–40.

[8] Clark C., Kirkwood G., "On uncertain renewable resource stocks: Optimal harvest policies and the value of stock surveys", *Journal of Environmental Economics and Management*, **13**:3 (1986), 235–244.

[9] Reed W.J., Clarke H.R., "Harvest decisions and assert valuation for biological resources exhibiting size-dependent stochastic growth", *International Economic Review*, **31** (1990), 147–169.

[10] Weitzman M.L., "Landing fees vs harvest quotas with uncertain fish stocks", *Journal of Environmental Economics and Management*, **43** (2002), 325–338.

[11] Родина Л.И., "Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу", *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **28**:1 (2018), 48–58; [Rodina L.I., "Optimization of average time profit for a probability model of the population subject to a craft", *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **28**:1 (2018), 48–58, (in Russian).]

[12] Родина Л.И., Хаммади А.Х., "Статистические характеристики множества достижимости управляемых систем со случайными коэффициентами", *Известия вузов. Математика*, 2014, № 11, 50–63; English transl.: Rodina L.I., Khammadi A.K., "Statistical characteristics of attainability set of controllable systems with random coefficients", *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, **58**:11 (2014), 43–53.

[13] Родина Л.И., Тютеев И.И., "Об асимптотических свойствах решений разностных уравнений со случайными параметрами", *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **26**:1 (2016), 79–86; [Rodina L.I., Tyuteev I.I., "About asymptotical properties of solutions of difference equations with random parameters", *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **26**:1 (2016), 79–86, (in Russian).]

[14] Ширяев А.Н., *Вероятность*, Наука, М., 1989; [Shiryaev A.N., *Veroyatnost*, Nauka, Moskow, 1989, (in Russian).]

[15] Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* Т. 2, Мир, М., 1984; [Feller V., *Vvedenie v teoriyu veroyatnostej i ee prilozheniya.* V. 2, Mir, Moskow, 1984, (in Russian).]

[16] Филиппов А.Ф., *Введение в теорию дифференциальных уравнений*, Едиториал УРСС, М., 2004; [Filippov A.F., *Vvedenie v teoriyu differencial'nyh uravnenij*, Editorial URSS, Moskow, 2004, (in Russian).]

[17] Чаплыгин С.А., *Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений*, Гостехиздат, М.–Л., 1950; [Chaplygin S.A., *Novyj metod priblizhennogo integrirovaniya differencialnyh uravnenij*, Gostekhizdat, M.–L., 1950, (in Russian).]

Rodina L. I., Tyuteev I.I., "On Estimation of an Average Time Profit in Probabilistic Environmental and Economic Models", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:3 (2018), 257–267.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-3-257-267

Abstract. We consider environmental-economical models of optimal harvesting, given by the differential equations with impulse action, which depend on random parameters. We assume, that lengths of intervals θ_k between the moments of impulses τ_k are random variables and the sizes of impulse influence depend on random parameters v_k, $k = 1, 2, \ldots$ One example of such objects is an equation with impulses, modelling dynamics of the population subject to harvesting. In the absence of harvesting, the population development is described by the differential equation $\dot{x} = g(x)$ and in time moments τ_k some random share of resource v_k, $k = 1, 2, \ldots$ is taken from population. We can control gathering process so that to stop harvesting when its share will appear big enough to keep possible biggest the rest of a resource to increase the size of the following gathering. Let the equation $\dot{x} = g(x)$ have an asymptotic stable solution $\varphi(t) \equiv K$ and the interval (K_1, K_2) is the attraction area of the given solution (here $0 \leqslant K_1 < K < K_2$). We construct the control $u = (u_1, \ldots, u_k, \ldots)$, limiting a share of harvesting resource at each moment of time τ_k, so that the quantity of the remained resource, since some moment τ_{k_0}, would be not less than the given value $x \in (K_1, K)$. For any $x \in (K_1, K)$ the estimations of average time profit, valid with probability one, are received. It is shown, that there is a unique $x^* \in (K_1, K)$, at which the lower estimation reaches the greatest value. Thus, we described the way of population control at which the value of average time profit can be lower estimated with probability 1 by the greatest number whenever possible.

Keywords: model of a population subject to harvesting, average time profit, optimal exploitation

On the authors:
Lyudmila I. Rodina, orcid.org/0002-0007-1896-0951, Doctor of Physics and Mathematics,
Professor of the Department of Functional Analysis and its Applications,
Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs,
87 Gorky str., Vladimir, 600000 Russia, e-mail: LRodina67@mail.ru

Ilya I. Tyuteev, orcid.org/0009-0203-2514-7755, graduate student,
Udmurt State University,
1 Universitetskaya str., Izhevsk, 426034, Russia, e-mail: it.30@mail.ru

Acknowledgments:
This work was supported by Russian Foundation of Basic Researches, project No 16-01-00346-a.