Моделирование и анализ информационных систем. Т. 25, № 3 (2018), с. 312–322
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 25, No 3 (2018), pp. 312–322

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-3-312-322

УДК 512.7

О гипотезах Ходжа, Тэйта и Мамфорда–Тэйта для расслоенных произведений семейств регулярных поверхностей с геометрическим родом 1

Орешкина (Никольская) О. В.

получена 24 декабря 2017

Аннотация. Доказаны гипотезы Ходжа, Тэйта и Мамфорда–Тэйта для расслоенного произведения двух неизотривиальных 1-параметрических семейств регулярных поверхностей с геометрическим родом 1 при некоторых условиях на вырожденные слои, ранги групп Нерона–Севери общих геометрических слоёв семейств и представления групп Ходжа в трансцендентных частях рациональных когомологий.

Пусть $\pi_i : X_i \to C \quad (i = 1, 2)$ – проективное неизотривиальное семейство поверхностей (возможно, с вырождениями) над гладкой проективной кривой C. Предположим, что дискриминантные локусы $\Delta_i = \{\delta \in C \mid \mathrm{Sing}(X_{i\delta}) \neq \varnothing\}$ не пересекаются, $h^{2,0}(X_{ks}) = 1, \quad h^{1,0}(X_{ks}) = 0$ для любого гладкого слоя X_{ks}, причём выполнены следующие условия:

(i) для любой точки $\delta \in \Delta_i$ и преобразования Пикара–Лефшеца $\gamma \in \mathrm{GL}(H^2(X_{is}, \mathbb{Q}))$, ассоциированного с гладкой частью $\pi'_i : X'_i \to C \setminus \Delta_i$ морфизма π_i и с обходом вокруг точки $\delta \in C$, имеем неравенство $(\log(\gamma))^2 \neq 0$;

(ii) многообразия $X_i\,(i = 1, 2)$, кривая C и структурные морфизмы $\pi_i : X_i \to C$ определены над некоторым конечнопорожденным подполем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$.

Если для общих геометрических слоев X_{1s} и X_{2s} выполнено хотя бы одно из следующих условий: (a) $b_2(X_{1s}) - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s})$ является нечетным числом, $b_2(X_{1s}) - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s}) \neq b_2(X_{2s}) - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{2s})$; (b) кольцо $\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1s})}\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$ – мнимое квадратичное поле, $b_2(X_{1s}) - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s}) \neq 4$, $\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{2s})}\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$ – вполне вещественное поле или $b_2(X_{1s}) - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s}) > b_2(X_{2s}) - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{2s})$; (c) $[b_2(X_{1s}) - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s}) \neq 4$, $\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1s})}\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} = \mathbb{Q}$; $b_2(X_{1s}) - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s}) \neq b_2(X_{2s}) - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{2s})$, то для расслоенного произведения $X_1 \times_C X_2$ верна гипотеза Ходжа, для любого гладкого проективного k-многообразия X_0 с условием $X_1 \times_C X_2 \widetilde{\to} X_0 \otimes_k \mathbb{C}$ верны гипотеза Тэйта об алгебраических циклах и гипотеза Мамфорда–Тэйта для когомологий чётной степени. Более того, пространство $H^2_{\acute{e}t}(X_0 \otimes_k \overline{k}, \mathbb{Q}_l(1))$ порождается классами дивизоров.

Ключевые слова: гипотезы Ходжа, Тэйта, Мамфорда–Тэйта, расслоенное произведение, группа Мамфорда–Тэйта, l-адическое представление

Для цитирования: Орешкина (Никольская) О. В., "О гипотезах Ходжа, Тэйта и Мамфорда–Тэйта для расслоенных произведений семейств регулярных поверхностей с геометрическим родом 1", *Моделирование и анализ информационных систем*, **25**:3 (2018), 312–322.

Об авторах:
Орешкина (Никольская) Ольга Владимировна, orcid.org/0000-0002-6742-8453, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых,
ул. Горького, 87, г. Владимир, 600000, Россия, e-mail: papichonok@yandex.ru

Благодарности:
Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований
(грант № 16-31-00266).

Введение

Пусть $X -$ гладкое проективное комплексное многообразие, $r \in \mathbb{Z}, \quad r \geq 0$,

$$H^{2r}(X, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \oplus_{p+q=2r} H^{p,q}(X, \mathbb{C})$$

– разложение Ходжа. Гипотеза Ходжа [1] утверждает, что $\mathbb{Q}$-пространство

$$H^{2r}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}(X, \mathbb{C})$$

порождается классами когомологий алгебраических циклов коразмерности r на X. Эта гипотеза верна для всех многообразий размерности ≤ 3, для всех простых абелевых многообразий простой размерности [2], а также для некоторых других типов абелевых многообразий, перечисленных в обзоре [3], для гладких моделей расслоенных произведений некоторых неизотривиальных семейств $K3$-поверхностей над гладкой проективной кривой [4], [5], [6].

С другой стороны, гипотеза Мамфорда–Тэйта утверждает, что для любого гладкого проективного многообразия X_0 над конечнопорождённым подполем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$ алгебра Ли образа l-адического представления

$$\rho_l^{(n)} : \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \to \mathrm{GL}(H^n_{\text{ét}}(X_0 \otimes_k \overline{k}, \mathbb{Q}_l))$$

изоморфна алгебре Ли $\mathrm{Lie}\ \mathrm{MT}(H^n(X_0 \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))(\mathbb{Q}_l)$ группы l-адических точек группы Мамфорда–Тэйта $\mathrm{MT}(H^n(X_0 \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q}))$ структуры Ходжа $H^n(X_0 \otimes_k \mathbb{C}, \mathbb{Q})$ [7], [8].

Эта гипотеза верна, например, для $K3$-поверхностей [9] и абсолютно простых абелевых многообразий простой размерности [10], [11].

Наконец, гипотеза Тэйта об алгебраических циклах утверждает, что для любого гладкого проективного многообразия X_0 над конечнопорождённым полем k и любого простого числа $l \neq \mathrm{char}(k)$ $\mathbb{Q}_l$-пространство

$$H^{2r}_{\text{ét}}(X_0 \otimes_k k^s, \mathbb{Q}_l(r))^{\mathrm{Gal}(k^s/k)}$$

порождается классами алгебраических циклов коразмерности r на X_0 [12].

Эта гипотеза верна для $K3$-поверхностей [9], для абелевых многообразий над конечными и числовыми полями в случае $r = 1$ ([13], [14]), для абсолютно простых абелевых многообразий простой размерности над конечными полями [15], для регулярных поверхностей с геометрическим родом 1 – слоёв неизотривиального гладкого семейства – в случае $\mathrm{char}(k) = 0$ [16].

Мы доказываем гипотезы Ходжа, Тэйта и Мамфорда–Тэйта для расслоенного произведения двух неизотривиальных 1-параметрических семейств регулярных поверхностей с геометрическим родом 1 при некоторых условиях на вырожденные слои, ранги групп Нерона–Севери общих геометрических слоёв семейств и представления групп Ходжа в трансцендентных частях рациональных когомологий.

Основными результатами являются теорема 1 и следствие 1.

Заметим, что в качестве гладких слоев семейств могут быть $K3$-поверхности, а также минимальные регулярные поверхности основного типа (размерности Кодаиры $\varkappa = 2$) с геометрическим родом 1, принадлежащие одному из следующих типов: (a) поверхности с $K^2 \leq 2$; (b) поверхности с $3 \leq K^2 \leq 8$, модули которых лежат в одной компоненте модулей с поверхностью Тодорова; (c) поверхности с $K^2 = 3$ с кручением группы Пикара $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Автор благодарит С.Г. Танкеева за внимательное прочтение рукописи и интересные обсуждения.

1. Отображение периодов и группы Ходжа

1.1. Типы гладких слоев семейств поверхностей

Пусть V – гладкая проективная поверхность основного типа над конечнопорожденным полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$ с $h^{2,0}(V \otimes_k \mathbb{C}) = 1$. Если минимальная модель поверхности $V \otimes_k \mathbb{C}$ принадлежит одному из следующих типов:

(a) поверхности с $q = 0$ и $K^2 \leq 2$;

(b) поверхности с $q = 0$ и $3 \leq K^2 \leq 8$, модули которых лежат в одной компоненте модулей с поверхностью Тодорова;

(c) поверхности с $q = 0$ и $K^2 = 3$ с кручением группы Пикара $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$;

(d) поверхности с $q = 1$ и $K^2 = 2$;

(e) поверхности с $q = 1$ и $K^2 = 3$ и общим слоем отображения Альбанезе рода 3;

(f) поверхности с $q = 1$ и $K^2 = 4$ в любой из восьми компонент модулей, описанных в работе Пигнателли [17],

то можно считать, что существует такой гладкий проективный k-морфизм $f : \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ над некоторой гладкой связной базой $\mathcal{S}$, что отображение периодов, ассоциированное с вариацией структур Ходжа $R^2 f_{\mathbb{C}*}\mathbb{Q}$, непостоянно, причём многообразие V является слоем морфизма f над некоторой точкой $s \in \mathcal{S}(k)$, гипотеза Тэйта для дивизоров на V и гипотеза Мамфорда–Тэйта для когомологий степени 2 верны [16, теорема 9.3].

1.2. Определение групп Ходжа и Мамфорда–Тэйта

Пусть S – гладкое проективное многообразие. Рассмотрим разложение Ходжа

$$H^n(S, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}(S, \mathbb{C}),$$

где $H^{p,q}(S, \mathbb{C})$ – пространство гармонических форм типа (p, q).

Пусть $U^1 = \{e^{i\theta} | \theta \in \mathbb{R}\}$ – единичная окружность. Определим ее действие в $H^n(S, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ следующим образом: $e^{i\theta}$ действует на $H^{p,q}(S, \mathbb{C})$ как умножение на число $e^{i\theta(p-q)}$. В итоге мы получаем морфизм групп

$$U^1 \xrightarrow{h} \mathrm{GL}(H^n(S, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}).$$

Определение 1. *Группой Ходжа структуры Ходжа $H^n(S, \mathbb{Q})$ называется наименьшая алгебраическая $\mathbb{Q}$-подгруппа $\mathrm{Hg}(H^n(S, \mathbb{Q})) \hookrightarrow \mathrm{GL}(H^n(S, \mathbb{Q}))$, группа $\mathbb{R}$-точек которой содержит $h(U^1)$.*

По теореме Лефшеца о дивизорах имеем:

$$H^2(S, \mathbb{Q})^{\mathrm{Hg}(H^2(S,\mathbb{Q}))} = H^2(S, \mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(S, \mathbb{C}) = \mathrm{NS}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S),$$

где $\mathrm{NS}(S)$ – группа Нерона–Севери многообразия S.

Определим действие группы $\mathbb{C}^\times = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathrm{G}_m)(\mathbb{R})$ в $H^n(S,\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ следующим образом: элемент $z \in \mathbb{C}^\times$ действует на $H^{p,q}(S,\mathbb{C})$ как умножение на число $z^p\overline{z}^q$. В итоге получаем морфизм групп

$$\mathbb{C}^\times \xrightarrow{h} \mathrm{GL}(H^n(S,\mathbb{Q})) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}.$$

Определение 2. *Группой Мамфорда–Тэйта* $\mathrm{MT}(H^n(S,\mathbb{Q}))$ *называется наименьшая алгебраическая* $\mathbb{Q}$*-подгруппа* $\mathrm{MT}(H^n(S,\mathbb{Q})) \hookrightarrow \mathrm{GL}(H^n(S,\mathbb{Q}))$, *группа* $\mathbb{R}$*-точек которой содержит* $h(\mathbb{C}^\times)$.

Описание группы $\mathrm{Hg}(H^2(S,\mathbb{Q}))$ в случае, когда $h^{2,0}(S) = 1$, содержится в работе Ю.Г. Зархина [18].

1.3. Точки, общие в смысле Ходжа, непостоянное отображение периодов и бесконечная группа монодромии

Лемма 1. [19, п. 1.10]. *Пусть* $f : \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ *– гладкий проективный морфизм над гладкой связной комплексной кривой* $\mathcal{S}$, *слоями которого являются поверхности* $\mathcal{X}_s$ *с* $h^{2,0}(\mathcal{X}_s) = 1$. *Если отображение периодов, ассоциированное с вариацией структур Ходжа* $R^2 f_*\mathbb{Q}$, *непостоянно, то существует такое счётное подмножество* $\Delta_{\mathrm{countable}} \subset \mathcal{S}$, *что функция* $s \mapsto \operatorname{rank}\mathrm{NS}(\mathcal{X}_s)$ *постоянна на множестве* $\mathcal{S} \setminus \Delta_{\mathrm{countable}}$.

По определению, $s \in \mathcal{S} \setminus \Delta_{\mathrm{countable}}$, если и только если связная компонента единицы замыкания в $\mathbb{Q}$-топологии Зариского образа представления монодромии $\pi_1(\mathcal{S}, s) \to \mathrm{GL}(H^2(\mathcal{X}_s,\mathbb{Q}))$ является нормальной подгруппой группы Ходжа $\mathrm{Hg}(H^2(\mathcal{X}_s,\mathbb{Q}))$ [20, §0, теорема о нормальной подгруппе]. Такие точки s называются общими в смысле Ходжа.

Лемма 1 позволяет заменять выражение "точка, общая в смысле Ходжа" на выражение "общая геометрическая точка", где "общность" точки означает ее принадлежность множеству $\mathcal{S}\setminus\Delta_{\mathrm{countable}}$ для некоторого счётного подмножества $\Delta_{\mathrm{countable}} \hookrightarrow \mathcal{S}$.

Предложение 1. [20, §1, предложение 1.2]. *Пусть* $f : \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ *– гладкое проективное семейство поверхностей с* $h^{2,0} = 1$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

а) отображение периодов голоморфной 2-формы не является отображением $\mathcal{S}$ *в точку (другими словами, отображение периодов, ассоциированное с вариацией структур Ходжа* $R^2 f_*\mathbb{Q}$, *непостоянно)*;

б) образ представления монодромии $\pi_1(\mathcal{S}, s) \to \mathrm{GL}(H^2(\mathcal{X}_s,\mathbb{Q}))$ *бесконечен.*

Мы называем проективное семейство $f : \mathcal{X} \to S$ гладких поверхностей, удовлетворяющее условиям предложения 1, *неизотривиальным.* Если $\overline{f} : \overline{\mathcal{X}} \to \overline{S}$ – его компактификация, то семейство $\overline{f} : \overline{\mathcal{X}} \to \overline{S}$ также называется неизотривиальным.

2. Доказательство основной теоремы

2.1. Формулировка основной теоремы

Теорема 1. *Пусть* $\pi_i : X_i \to C \quad (i = 1, 2)$ *– проективное неизотривиальное семейство поверхностей (возможно, с вырождениями) над гладкой проективной* *кривой C. Предположим, что дискриминантные локусы*

$$\Delta_i = \{\delta \in C \mid \operatorname{Sing}(X_{i\delta}) \neq \varnothing\} \quad (i = 1, 2)$$

не пересекаются, $h^{2,0}(X_{ks}) = 1, \quad h^{1,0}(X_{ks}) = 0$ для любого гладкого слоя X_{ks}, причём выполнены следующие условия:

(i) *любой вырожденный слой $X_{i\delta} \subset X_i$ является объединением гладких неприводимых поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями и геометрическим родом 0 (случай сильного вырождения);*

(ii) *замыкание образа монодромии $\pi_1(C \setminus \Delta_i, s) \to \mathrm{GL}(H^2(X_{is}, \mathbb{Q}))$ в топологии Зариского является связной $\mathbb{Q}$-группой;*

(iii) *многообразия $X_i\,(i = 1, 2)$, кривая C и структурные морфизмы $\pi_i : X_i \to C$ определены над некоторым конечнопорожденным подполем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$.*

Если для общих геометрических слоев X_{1s} и X_{2s} выполнено хотя бы одно из следующих условий:

(a) $b_2(X_{1s}) - \operatorname{rank}\mathrm{NS}(X_{1s})$ *является нечетным числом,*
$b_2(X_{1s}) - \operatorname{rank}\mathrm{NS}(X_{1s}) \neq b_2(X_{2s}) - \operatorname{rank}\mathrm{NS}(X_{2s})$;

(b) *кольцо* $\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1s})}\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$ *– мнимое квадратичное поле,*
$b_2(X_{1s}) - \operatorname{rank}\mathrm{NS}(X_{1s}) \neq 4$,
$\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{2s})}\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$ *– вполне вещественное поле или*
$b_2(X_{1s}) - \operatorname{rank}\mathrm{NS}(X_{1s}) > b_2(X_{2s}) - \operatorname{rank}\mathrm{NS}(X_{2s})$;

(c) $b_2(X_{1s}) - \operatorname{rank}\mathrm{NS}(X_{1s}) \neq 4$, $\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1s})}\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} = \mathbb{Q}$,
$b_2(X_{1s}) - \operatorname{rank}\mathrm{NS}(X_{1s}) \neq b_2(X_{2s}) - \operatorname{rank}\mathrm{NS}(X_{2s})$,

то для расслоенного произведения $X_1 \times_C X_2$ верна гипотеза Ходжа, для любого гладкого проективного k-многообразия X_0 с условием $X_1 \times_C X_2 \widetilde{\to} X_0 \otimes_k \mathbb{C}$ верны гипотеза Тэйта об алгебраических циклах и гипотеза Мамфорда–Тэйта для когомологий чётной степени. Более того, пространство $H^2_{\acute{e}t}(X_0 \otimes_k \overline{k}, \mathbb{Q}_l(1))$ порождается классами дивизоров.

2.2. Морфизмы трансцендентных частей и представления монодромии

Положим $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, $C' = C \setminus \Delta \overset{j}{\hookrightarrow} C$, $\pi'_i = \pi_i \mid_{\pi_i^{-1}(C')}$: $\pi_i^{-1}(C') \overset{\mathrm{def}}{=} X'_i \to C'$, $\pi : X_1 \times_C X_2 \to C$ – структурный морфизм расслоенного произведения, $\pi' = \pi \mid_{\pi^{-1}(C')}$: $\pi^{-1}(C') \overset{\mathrm{def}}{=} X' \to C'$.

Всюду в дальнейшем $G_i^{(2)}$ – замыкание в $\mathbb{Q}$-топологии Зариского образа представления монодромии $\pi_1(C', s) \to \mathrm{GL}(H^2(X_{is}, \mathbb{Q}))$.

Лемма 2. При выполнении условий теоремы 1 для общих геометрических слоёв X_{1s}, X_{2s} имеем:

$$\mathrm{Hom}_{\pi_1(C', s)}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}, \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}) = 0.$$

Эта лемма доказана в [19, п. 2.3] для случая (a); в [5, лемма 2] для случая (b); в [6, п. 1.4] для случая (c).

2.3. Рациональные когомологии степени 2 и группы Нерона–Севери

Из леммы 2 легко получается следующий результат:

Лемма 3. [19, п. 2.8]. *Имеем*: $H^2(X_k, \mathbb{Q}) = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_k)$, $H^2(X, \mathbb{Q}) = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X)$.

Кроме того, согласно сильной теореме Лефшеца $H^4(X_k, \mathbb{Q}) = H^2(X_k, \mathbb{Q}) \smile \mathrm{cl}_{X_k}(H_k)$, где H_k – гиперплоское сечение многообразия X_k. Поэтому из леммы 3 следует, что пространство $H^4(X_k, \mathbb{Q})$ порождается алгебраическими классами когомологий.

2.4. Доказательство основной теоремы

Пусть
$$f : Z \to \pi^{-1}(\Delta)$$
– нормализация схемы $\pi^{-1}(\Delta)$. Тогда Z – несвязное объединение гладких неприводимых компонент дивизора $\pi^{-1}(\Delta)$. Поскольку $f : Z \to \pi^{-1}(\Delta)$ – разрешение особенностей замкнутой подсхемы $i_\Delta : \pi^{-1}(\Delta) \hookrightarrow X$, то имеется точная последовательность смешанных $\mathbb{Q}$-структур Ходжа [21, следствие (8.2.8)]:
$$H^2(Z, \mathbb{Q}) \xrightarrow{(i_\Delta f)_*} H^4(X, \mathbb{Q}) \to H^4(X', \mathbb{Q}),$$
где $(i_\Delta f)_*$ – морфизм бистепени $(1, 1)$ смешанных структур Ходжа. Поэтому
$$(i_\Delta f)_* \, H^2(Z, \mathbb{Q}) = \mathrm{Ker}\left[H^4(X, \mathbb{Q}) \to H^4(X', \mathbb{Q})\right].$$

Действуя по алгоритму п. 2.8 в [19], легко проверить, что имеется точная последовательность
$$0 \to (i_\Delta f)_* \, \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(Z) \to [H^4(X, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X, \mathbb{C})] \to H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q}) \to 0,$$
в которой пространство $H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q})$ порождается образами алгебраических классов на X. Значит, для X верна гипотеза Ходжа об алгебраических циклах.

С другой стороны, поскольку пространство $H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q})$ порождается образами алгебраических классов на X, то из точности последовательности рациональных структур Ходжа [19, формула (2.16)]
$$0 \to (i_\Delta f)_* \, H^2(Z, \mathbb{Q}) \to H^4(X, \mathbb{Q}) \to H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q}) \to 0$$
следует, что
$$\mathrm{Hg}(H^4(X, \mathbb{Q})) = \mathrm{Hg}((i_\Delta f)_* H^2(Z, \mathbb{Q}))$$
в силу тривиальности действия окружности U^1 на алгебраических классах когомологий типа (2, 2), поэтому согласно [3, лемма B.53] имеем
$$\mathrm{MT}(H^4(X, \mathbb{Q})) = \mathrm{G}_m \cdot \mathrm{Hg}(H^4(X, \mathbb{Q})) = \mathrm{G}_m \cdot \mathrm{Hg}((i_\Delta f)_* H^2(Z, \mathbb{Q})) =$$
$$= \mathrm{MT}((i_\Delta f)_* H^2(Z, \mathbb{Q})).$$

Значит, достаточно доказать гипотезу Мамфорда-Тэйта для когомологий степени 2 многообразия Z, являющегося несвязным объединением произведений вида

$S \times T$ или $T \times S$, где S – гладкая проективная поверхность с геометрическим родом 0, T – гладкая регулярная поверхность с геометрическим родом 1.

Заметим, что в силу формулы Кюннета $H^2(S \times T, \mathbb{Q}) = H^2(S, \mathbb{Q}) \oplus H^2(T, \mathbb{Q})$, потому что $H^1(T, \mathbb{Q}) = 0$.

С другой стороны, $p_g(S) = 0$, поэтому $H^2(S, \mathbb{Q})$ порождается классами дивизоров. Значит, гипотеза Мамфорда–Тэйта для когомологий четной степени сводится к гипотезе Мамфорда–Тэйта для поверхности T, а этот случай следует из результатов Моонена [16, теорема 9.3].

Наконец, хорошо известно, что из гипотезы Мамфорда-Тэйта для когомологий X_0 чётной степени следует эквивалентность доказанной выше гипотезы Ходжа для $X_1 \times_{\mathbb{C}} X_2 = X_0 \otimes_k \mathbb{C}$ и гипотезы Тэйта для X_0 (с учётом леммы 3).

2.5. Следствие из основной теоремы

Следствие 1. *Пусть* $\pi_i : X_i \to C \quad (i = 1, 2)$ *– проективное неизотривиальное семейство поверхностей (возможно, с вырождениями) над гладкой проективной кривой* C. *Предположим, что дискриминантные локусы*

$$\Delta_i = \{\delta \in C \mid \operatorname{Sing}(X_{i\delta}) \neq \varnothing\} \quad (i = 1, 2)$$

не пересекаются, $h^{2,0}(X_{ks}) = 1, \quad h^{1,0}(X_{ks}) = 0$ *для любого гладкого слоя* X_{ks}, *причём выполнены следующие условия:*

(*i*) *для любой точки* $\delta \in \Delta_i$ *и преобразования Пикара–Лефшеца*

$$\gamma \in \operatorname{GL}(H^2(X_{is}, \mathbb{Q})),$$

ассоциированного с гладкой частью $\pi_i' : X_i' \to C \setminus \Delta_i$ *морфизма* π_i *и с обходом вокруг точки* $\delta \in C$, *имеем неравенство* $(\log(\gamma))^2 \neq 0$;

(*ii*) *многообразия* $X_i \, (i = 1, 2)$, *кривая* C *и структурные морфизмы* $\pi_i : X_i \to C$ *определены над некоторым конечнопорожденным подполем* $k \hookrightarrow \mathbb{C}$.

Если для общих геометрических слоев X_{1s} *и* X_{2s} *выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

(*a*) $b_2(X_{1s}) - \operatorname{rank} \operatorname{NS}(X_{1s})$ *является нечетным числом,*
$b_2(X_{1s}) - \operatorname{rank} \operatorname{NS}(X_{1s}) \neq b_2(X_{2s}) - \operatorname{rank} \operatorname{NS}(X_{2s})$;

(*b*) *кольцо* $\operatorname{End}_{\operatorname{Hg}(X_{1s})} \operatorname{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$ *– мнимое квадратичное поле,*
$b_2(X_{1s}) - \operatorname{rank} \operatorname{NS}(X_{1s}) \neq 4$,
$\operatorname{End}_{\operatorname{Hg}(X_{2s})} \operatorname{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$ *– вполне вещественное поле или*
$b_2(X_{1s}) - \operatorname{rank} \operatorname{NS}(X_{1s}) > b_2(X_{2s}) - \operatorname{rank} \operatorname{NS}(X_{2s})$;

(*c*) $[b_2(X_{1s}) - \operatorname{rank} \operatorname{NS}(X_{1s}) \neq 4$, $\operatorname{End}_{\operatorname{Hg}(X_{1s})} \operatorname{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} = \mathbb{Q}$;
$b_2(X_{1s}) - \operatorname{rank} \operatorname{NS}(X_{1s}) \neq b_2(X_{2s}) - \operatorname{rank} \operatorname{NS}(X_{2s})$,

то для расслоенного произведения $X_1 \times_C X_2$ *верна гипотеза Ходжа, для любого гладкого проективного* k*-многообразия* X_0 *с условием* $X_1 \times_C X_2 \widetilde{\to} X_0 \otimes_k \mathbb{C}$ *верны гипотеза Тэйта об алгебраических циклах и гипотеза Мамфорда–Тэйта для когомологий чётной степени. Более того, пространство* $H^2_{\acute{e}t}(X_0 \otimes_k \overline{k}, \mathbb{Q}_l(1))$ *порождается классами дивизоров.*

Доказательство. Пусть D^* – проколотый диск на C с центром $\delta \in \Delta_i$. Фундаментальная группа $\pi_1(D^*, s) \widetilde{\to} \mathbb{Z}$ действует на когомологиях общего слоя X_{is}, $s \in D^*$.

Обозначим через $\gamma \in \mathrm{GL}(H^2(X_{is}, \mathbb{Q}))$ образ образующей группы $\pi_1(D^*, s)$, называемый *преобразованием Пикара–Лефшеца* или *локальным преобразованием монодромии*.

По условию следствия преобразование Пикара–Лефшеца γ удовлетворяет условию $N^2 \neq 0$, где $N = \log(\gamma)$. Это свойство сохраняется при переходе к подходящей гладкой проективной модели схемы $X_i \times_C \widetilde{C}$ над $\widetilde{C}$, где $\widetilde{C} \longrightarrow C$ – произвольное определённое над k разветвлённое накрытие кривой C. Действительно, можно считать, что отображение $\widetilde{C} \longrightarrow C$ индуцирует отображение проколотых дисков $\widetilde{D}^* \to D^*$, задаваемое формулой $t = \tau^n$ в локальных координатах t и τ на C и $\widetilde{C}$ соответственно (так, что точка δ задается уравнением $t = 0$). Морфизм $\widetilde{D}^* \to D^*$ не разветвлён, имеет степень n и определяет вложение $\pi_1(\widetilde{D}^*, \widetilde{s}) \hookrightarrow \pi_1(D^*, s)$, поэтому $\widetilde{\gamma} = \gamma^n$. Остаётся заметить, что $\log(\gamma^n) = n\log(\gamma)$, так что $(\log(\widetilde{\gamma}))^2 \neq 0$.

Используя в случае необходимости такую замену базы $\widetilde{C} \longrightarrow C$, мы можем считать, что выполнено условие (ii) теоремы 1.

Проверим, что в рассматриваемом случае можно считать выполненным условие (i) теоремы 1.

Действительно, в силу теоремы Мамфорда о полустабильных редукциях [22, с. 53–54] мы можем считать, что все вырожденные слои морфизма $\pi_i : X_i \to C$ являются объединениями гладких неприводимых поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями.

Пусть $X_{i\delta} = V_1 + \ldots + V_n$, где V_j – неприводимая компонента дивизора $X_{i\delta}$. Тогда по теореме Вик. С. Куликова [23, теорема 2.7] имеем:

$$p_g(X_{is}) = \sum_{j=1}^{n} p_g(V_j) + \frac{1}{2}\,\mathrm{ckh}^1 + h^2(\Pi(X_{i\delta})), \tag{2.1}$$

где в рассматриваемом случае

$$p_g(X_{is}) \overset{\mathrm{def}}{=} h^{2,0}(X_{is}) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X_{is}, \Omega^2_{X_{is}}) = 1,$$
$$p_g(V_j) \overset{\mathrm{def}}{=} h^{2,0}(V_j) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(V_j, \Omega^2_{V_j}),$$
$$\mathrm{ckh}^1 \overset{\mathrm{def}}{=} \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Coker}(\bigoplus_i H^1(V_i, \mathbb{Q}) \to \bigoplus_{i<j} H^1(V_i \cap V_j, \mathbb{Q})),$$
$$h^2(\Pi(X_{i\delta})) \overset{\mathrm{def}}{=} \dim H^2(\Pi(X_{i\delta})),$$

$\Pi(X_{i\delta})$ – полиэдр, ассоциированный с вырождением $X_{i\delta} = V_1 + \ldots + V_n$. Кроме того, $N^2 = (\log(\gamma))^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $h^2(\Pi(X_{i\delta})) = 0$ [23, теорема 2.7, (a)].

В нашем случае $N^2 \neq 0$, поэтому $h^2(\Pi(X_{i\delta})) \neq 0$. В силу формулы (2.1) и равенства $p_g(X_{is}) = 1$ имеем равенства $p_g(V_j) = 0$ для всех j. Значит, выполнено условие (i) теоремы 1.

Остаётся заметить, что если $W \to V$ – сюръективный k-морфизм гладких проективных k-многообразий, то из гипотезы Мамфорда–Тэйта для когомологий чётной степени многообразия W следует гипотеза Мамфорда–Тэйта для когомологий чётной степени многообразия V [24, следствие 4.4]. Это доказывает следствие 1, потому что из гипотезы Мамфорда–Тэйта для X_0 следует эквивалентность доказанной выше гипотезы Ходжа для $X_1 \times_C X_2 = X_0 \otimes_k \mathbb{C}$ и гипотезы Тэйта для X_0. $\square$

Замечание 1. Предположим, что общий слой $X_{k\eta}$ морфизма $\pi_k : X_k \to C (k = 1, 2)$ имеет размерность Кодаиры $\varkappa(X_{k\eta}) = 2$ (другими словами, является поверхностью основного типа) и род кривой C больше 1. Тогда для расслоенного произведения $X = X_1 \times_C X_2$ имеем в силу теоремы Каваматы [25, теорема 2] и теоремы Биркара [26, теорема 1.3]:

$$\varkappa(X) \geqslant \varkappa(X_{1\eta} \times_{\kappa(\eta)} X_{2\eta}) + \varkappa(C) \geqslant \varkappa(X_{1\eta}) + \varkappa(X_{2\eta}) + \varkappa(C) = 5,$$

так что в рассматриваемом случае многообразие X является многообразием основного типа.

Список литературы

[1] Hodge W. V. D., “The topological invariants of algebraic varieties”, *Proceedings of International Congress of Mathematicians*, **1**, 1952, 182–192.

[2] Танкеев С. Г., “Циклы на простых абелевых многообразиях простой размерности”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **46**:1 (1982), 155–170; English transl.: Tankeev S. G., “Cycles on simple abelian varieties of prime dimension”, *Mathematics of the USSR–Izvestiya*, **20**:1 (1983), 157–171.

[3] Gordon B. B., “A survey of the Hodge conjecture for Abelian varieties”, Appendix in: Lewis J.D., *A survey of the Hodge conjecture. 2 ed.*, CRM Monograph Series, **10**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999, 297–356.

[4] Никольская О. В., “Об алгебраических циклах на расслоенном произведении семейств K3 поверхностей”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **77**:1 (2013), 145–164; English transl.: Nikolskaya O. V., “On algebraic cycles on a fibre product of families of K3 surfaces”, *Izv. Math.*, **77**:1 (2013), 143–162.

[5] Никольская О. В., “О геометрии гладкой модели расслоенного произведения семейств K3 поверхностей”, *Матем. сб.*, **205**:2 (2014), 123–130; English transl.: Nikolskaya O. V., “On the geometry of a smooth model of a fibre product of families of K3 surfaces”, *Sbornik: Mathematics*, **205**:2 (2014), 269–276.

[6] Никольская О. В. , “Об алгебраических классах когомологий на гладкой модели расслоенного произведения семейств K3 поверхностей”, *Матем. заметки*, **96**:5 (2014), 738–746; English transl.: Nikolskaya O. V. , “On algebraic cohomology classes on a smooth model of a fiber product of families of K3 surfaces”, *Math. Notes*, **96**:5 (2014), 745–752.

[7] Mamford D., “Families of abelian varieties”, *Proc. of Symposium in Pure Math. AMS*, **IX** (1966), 347–351.

[8] Serre J.-P. , “Representations l-adiques”, *Algebraic number theory*, Papers contributed for the International Symposium, Kyoto, 1976, ed. S. Iyanaga, Japan Society for the Promotion of Science, Tokyo, 1977, 177–193.

[9] Танкеев С.Г., “Поверхности типа $K3$ над числовыми полями и гипотеза Мамфорда-Тэйта. II”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **59**:3 (1995), 179—206; English transl.: Tankeev S.G., “Surfaces of $K3$ type over number fields and the Mumford-Tate conjecture. II”, *Russion Akad. Sci. Izv. Math.*, **59**:3 (1995), 619–646.

[10] Танкеев С. Г., “Циклы на простых абелевых многообразиях простой размерности над числовыми полями”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **31**:6 (1987), 1214—1227; English transl.: Tankeev S. G., “Cycles on simple abelian varieties of prime dimension over number fields”, *Mathematics of the USSR–Izvestiya*, **31**:3 (1988), 527–540.

[11] Pink R., "l-adic algebraic monodromy group cocharacters, and the Mumford-Tate conjecture", *J. reine. angew. Math.*, **495** (1998), 187–237.

[12] Tate J., "Algebraic cycles and poles of zeta functions", *Arithmetical Algebraic Geometry*, Proc. Conf. Purdue Univ., 1963, Harper and Row, New York, 1965, 93–110.

[13] Tate J., "Endomorphisms of abelian varieties over finite fields", *Invent. Math.*, **2** (1966), 134–144.

[14] Faltings G., "Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern", *Invent. Math.*, **73**:3 (1983), 349–366.

[15] Танкеев С. Г., "О циклах на абелевых многообразиях простой размерности над конечными и числовыми полями", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **47**:2 (1983), 356—365; English transl.: Tankeev S. G., "On cycles on abelian varieties of prime dimension over finite and number fields", *Mathematics of the USSR–Izvestiya*, **22**:2 (1984), 329–337.

[16] Moonen B., "On the Tate and Mumford-Tate conjectures in codimension one for varieties with $h^{2,0} = 1$", *Duke Math. J.*, **166**:4 (2017), 739–799.

[17] Pignatelli R., "Some (big) irreducible components of the moduli space of minimal surfaces of general type with $p_g = q = 1$ and $K^2 = 4$", *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei* (9) *Mat. Appl.*, **20**:3 (2009), 207–226.

[18] Zarhin Yu. G., "Hodge groups of $K3$ surfaces", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **341** (1983), 193–220.

[19] Никольская О.В., "Об алгебраических циклах на расслоенных произведениях неизотривиальных семейств регулярных поверхностей с геометрическим родом 1", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:4 (2016), 440–465; [Nikol'skaya O.V., "On algebraic cycles on fibre products of non-isotrivial families of regular surfaces with geometric genus 1", *Model. Anal. Inform. Sist.*, **23**:4 (2016), 440–465, (in Russian).]

[20] Мустафин Г.А., "Семейства алгебраических многообразий и инвариантные циклы", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **49**:5 (1985), 948–978; English transl.: Mustafin G.A., "Families of algebraic varieties and invariant cycles", *Mathematics of the USSR–Izvestiya*, **27**:2 (1986), 251–278.

[21] Deligne P., "Théorie de Hodge. III", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **44** (1974), 5–77.

[22] Kempf G. et al., *Toroidal embeddings. I*, Lecture Notes in Mathematics, **339**, Springer-Verlag, Berlin – New York, 1973.

[23] Куликов Вик. С., "Вырождения $K3$-поверхностей и поверхностей Энриквеса", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**:5 (1977), 1008–1042; English transl.: Kulikov Vic. S., "Degenerations of $K3$ surfaces and Enriques surfaces", *Math. USSR–Izv.*, **11**:5 (1977), 957–988.

[24] Танкеев С. Г., "Об арифметике и геометрии общего гиперповерхностного сечения", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:2 (2002), 173–204; English transl.: Tankeev S. G., "The arithmetic and geometry of a generic hypersurface section", *Izv. Math.*, **66**:2 (2002), 393–424.

[25] Kawamata Y., "Kodaira dimension of algebraic fiber spaces over curves", *Invent. Math.*, **66**:1 (1982), 57–71.

[26] Birkar C., "Iitaka conjecture $C_{n,m}$ in dimension six", *Compositio Mathematica*, **2009**:6 (1979), 1442–1446.

Oreshkina (Nikol'skaya) O. V., "On the Hodge, Tate and Mumford-Tate Conjectures for Fibre Products of Families of Regular Surfaces with Geometric Genus 1", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:3 (2018), 312–322.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-3-312-322

Abstract. The Hodge, Tate and Mumford-Tate conjectures are proved for the fibre product of two non-isotrivial 1-parameter families of regular surfaces with geometric genus 1 under some conditions on degenerated fibres, the ranks of the Néron - Severi groups of generic geometric fibres and representations of Hodge groups in transcendental parts of rational cohomology.

Let $\pi_i : X_i \to C \quad (i = 1, 2)$ be a projective non-isotrivial family (possibly with degeneracies) over a smooth projective curve C. Assume that the discriminant loci $\Delta_i = \{\delta \in C \mid \mathrm{Sing}(X_{i\delta}) \neq \varnothing\} \quad (i = 1, 2)$ are disjoint, $h^{2,0}(X_{ks}) = 1, \quad h^{1,0}(X_{ks}) = 0$ for any smooth fibre X_{ks}, and the following conditions hold:

(i) for any point $\delta \in \Delta_i$ and the Picard-Lefschetz transformation $\gamma \in \mathrm{GL}(H^2(X_{is}, \mathbb{Q}))$, associated with a smooth part $\pi'_i : X'_i \to C \setminus \Delta_i$ of the morphism π_i and with a loop around the point $\delta \in C$, we have $(\log(\gamma))^2 \neq 0$;

(ii) the variety $X_i \, (i = 1, 2)$, the curve C and the structure morphisms $\pi_i : X_i \to C$ are defined over a finitely generated subfield $k \hookrightarrow \mathbb{C}$.

If for generic geometric fibres X_{1s} and X_{2s} at least one of the following conditions holds:

(a) $b_2(X_{1s}) - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s})$ is an odd prime number, $\quad b_2(X_{1s}) - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s}) \neq b_2(X_{2s}) - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{2s})$;

(b) the ring $\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1s})} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$ is an imaginary quadratic field, $\quad b_2(X_{1s}) - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s}) \neq 4$, $\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{2s})} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$ is a totally real field or $b_2(X_{1s}) - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s}) > b_2(X_{2s}) - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{2s})$;

(c) $[b_2(X_{1s}) - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s}) \neq 4, \mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1s})} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} = \mathbb{Q}; \quad b_2(X_{1s}) - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s}) \neq b_2(X_{2s}) - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{2s})$,

then for the fibre product $X_1 \times_C X_2$ the Hodge conjecture is true, for any smooth projective k-variety X_0 with the condition $X_1 \times_C X_2 \widetilde{\to} X_0 \otimes_k \mathbb{C}$ the Tate conjecture on algebraic cycles and the Mumford-Tate conjecture for cohomology of even degree are true.

Keywords: Hodge, Tate and Mumford-Tate conjectures, fibre product, Mumford-Tate group, l-adic representation

On the authors:
Olga V. Oreshkina (Nikol'skaya), orcid.org/0000-0002-6742-8453, PhD,
A.G. and N.G. Stoletov Vladimir State University,
87 Gorky str., Vladimir, 600000, Russia, e-mail: papichonok@yandex.ru.

Acknowledgments:
This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research under the Grant No 16-31-00266.