
Теория функций

©Морозов А. Н., 2018

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-3-323-330

УДК 517.5

О дифференцируемости по Тейлору в пространствах L_p , $0 < p \leq \infty$

Морозов А. Н.

получена 15 января 2018

Аннотация. Функция $f \in L_p[I]$, $p > 0$, называется (k, p) -дифференцируемой в точке $x_0 \in I$, если существует алгебраический многочлен π степени не больше k , для которого выполняется $\|f - \pi\|_{L_p[J_h]} = o(h^{k+\frac{1}{p}})$, где $J_h = [x_0 - h; x_0 + h] \cap I$. Во внутренней точке при $k = 1$ и $p = \infty$ это равносильно определению обычной дифференцируемости функции. Имеется стандартная «иерархия» существования дифференциалов: если $p_1 < p_2$, то из (k, p_2) -дифференцируемости следует (k, p_1) -дифференцируемость. В работах С.Н. Бернштейна, А.П. Кальдерона и А. Зигмунда были даны приложения такой конструкции к построению описания функциональных пространств ($p = \infty$) и изучению локальных свойств решений дифференциальных уравнений ($1 \leq p \leq \infty$) соответственно. Данная статья связана с первой указанной работой. В статье вводится понятие равномерной дифференцируемости. Назовём (k, p) -дифференцируемую во всех точках отрезка I функцию f равномерно (k, p) -дифференцируемой на I , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для каждой точки $x \in I$ выполняется $\|f - \pi\|_{L_p[J_h]} < \varepsilon \cdot h^{k+\frac{1}{p}}$ при $0 < h < \delta$, $J_h = [x-h; x+h] \cap I$, где π – многочлен из условия (k, p) -дифференцируемости в точке x . На основе методов локальных приближений функций алгебраическими многочленами показано, что из равномерной (k, p) -дифференцируемости функции f при некотором $1 \leq p \leq \infty$ следует $f \in C^k[I]$. Следовательно, в таком случае дифференциалы «эквивалентны». Поскольку каждая функция из $C^k[I]$ является равномерно (k, p) -дифференцируемой на отрезке I при $1 \leq p \leq \infty$, то получаем определённый критерий принадлежности функции этому пространству. Диапазон $0 < p < 1$, очевидно, может быть включён в необходимое условие принадлежности функции $C^k[I]$, однако достаточность дифференцируемости по Тейлору в этом диапазоне пока в полной мере не доказана.

Ключевые слова: дифференцируемость функции по Тейлору, локальные приближения функций

Для цитирования: Морозов А. Н., "О дифференцируемости по Тейлору в пространствах L_p , $0 < p \leq \infty$ ", *Моделирование и анализ информационных систем*, **25:3** (2018), 323–330.

Об авторах:

Морозов Анатолий Николаевич, orcid.org/0000-0001-9940-159X канд. физ.-мат. наук, доцент,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003, Россия, e-mail: moroz@uniyar.ac.ru

1. Введение и основные обозначения

Как обычно, $L_p[I]$ обозначает пространство действительных функций, интегрируемых в степени p ($0 < p < \infty$) по Лебегу на отрезке $I = [a; b]$, с величиной

элементов

$$\|f\|_{L_p[I]} = \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}};$$

при $p = \infty$ всюду ниже рассматривается $C[I]$ – пространство непрерывных на отрезке I функций с чебышевской нормой.

Когда неясность исключена, сокращаем обозначения до L_p и $\|f\|_p$ или соответственно до C и $\|f\|_\infty$. Длину I обозначаем $|I|$.

Также используются

$W_p^k = W_p^k[I] = \left\{ f : f^{(k-1)} \text{ абсолютно непрерывна на отрезке } I, f^{(k)} \in L_p[I] \right\}$,
 $k \in \mathbf{N}$, $1 \leq p < \infty$, и (при $p = \infty$) $C^k = C^k[I]$ – пространство k раз непрерывно дифференцируемых на отрезке I функций, – с нормами $\|f\|_p + \|f^{(k)}\|_p$.

Определение 1. Функция $f \in L_p[I]$, $0 < p \leq \infty$, называется (k, p) -дифференцируемой в точке $x_0 \in I$, если существует алгебраический многочлен π степени не больше k , для которого выполняется $\|f - \pi\|_{L_p[J_h]} = o(h^{k+\frac{1}{p}})$, где $J_h = [x_0 - h; x_0 + h] \cap I$.

Такой многочлен может быть только один. Во внутренней точке x_0 при $k = 1$ и $p = \infty$ определение равносильно обычной дифференцируемости (существованию производной), однако в общем случае из (k, ∞) -дифференцируемости в точке не следует существование k -й производной. Классическим примером является функция

$$f(x) = \begin{cases} x^{k+1} \sin(\frac{1}{x^k}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

которая (l, ∞) -дифференцируема (следовательно, (l, p) -дифференцируема при $0 < p \leq \infty$) в точке 0 для $l = 1, \dots, k$, но имеет лишь одну обычную производную. Также отметим, что несмотря на естественную «иерархию» существования дифференциалов (если $p_1 < p_2$, то из (k, p_2) -дифференцируемости следует (k, p_1) -дифференцируемость), примеры показывают их качественную близость для достаточно «хороших» функций. Так, функция $f(x) = |x|^\alpha$ является $(1, p)$ -дифференцируемой в нуле только для $\alpha > 1$ при $0 < p \leq \infty$.

Важные приложения данного понятия рассматривались, например, в работах С.Н. Бернштейна [1] / $p = \infty$ /, А.П. Кальдерона и А. Зигмунда [2] / $1 \leq p \leq \infty$ /. Настоящая статья связана с первой работой.

Для $f \in L_p[I]$ и $J \subseteq I$ обычным образом определяется

$$E_k(f; J)_p = \inf \{ \|f - \pi\|_{L_p[J]} : \pi \in P_k \}$$

– наилучшее приближение функции f алгебраическими многочленами степени не выше $k-1$ (порядка k) в $L_p[J]$. Если J не совпадает с I , то такое приближение называют локальным.

Из работы П.Л. Чебышева ([3], с. 23) следует, что если $f \in C[a; b]$ и в точке $x_0 \in (a; b)$ функция f имеет k -ю производную, то

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E_k(f; [x_0 - h; x_0 + h])_\infty}{(2h)^k} = \frac{1}{k! 2^{2k-1}} |f^{(k)}(x_0)|. \quad (1)$$

Бернштейн [1], развивая данный результат, показал, что для существования предела достаточно (k, ∞) -дифференцируемости в точке x_0 , а затем выразил «глобальные» дифференциальные свойства функции при помощи «разделённых локальных приближений». Его формулировка такова.

Теорема 1. Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы непрерывная функция f имела непрерывную производную порядка k во всех точках отрезка $[a; b]$, заключается в том, что

$$\frac{E_k(f, [\alpha; \beta])_\infty}{(\beta - \alpha)^k} \rightarrow \varphi(x), \quad a \leq \alpha < x < \beta \leq b,$$

равномерно по x при $\alpha \rightarrow x$, $\beta \rightarrow x$, где непрерывная функция φ определяется равенством

$$k! \, 2^{2k-1} \varphi(x) = |f^{(k)}(x)|.$$

Пусть $m \in \mathbf{N}$. Рассмотрим разбиение τ_m полуинтервала $I = [a; b)$ на m полуинтервалов равной длины. По заданной функции $f \in L_p[I]$, $0 < p \leq \infty$, и разбиению τ_m построим ступенчатую функцию, определяемую формулой

$$\varphi_m^k(f)_p = \frac{E_k(f, J)_p}{c_{k,p} |J|^{k+\frac{1}{p}}}, \quad \text{при } x \in J,$$

на каждом $J \in \tau_m$, где в правой части применяется константа $c_{k,p} = E_k\left(\frac{x^k}{k!}, [0; 1]\right)_p$. В статьях [4] и [5] автором показано, что условие теоремы Бернштейна сводится к равномерной сходимости последовательности $\{\varphi_m^k(f)_\infty\}$, и аналогичное описание может быть дано для пространств W_p^k . Также показано, что рассмотрение последовательностей $\{\varphi_m^k(f)_q\}$ с переменным индексом q , $1 \leq q \leq \infty$, позволяет осуществлять переход к пространствам с другой нормой, поскольку характер сходимости этих последовательностей является инвариантом относительно q . Вот суммарный результат.

Теорема 2. Для того, чтобы функция f из L_q , $1 \leq q \leq \infty$, принадлежала пространству W_p^k , необходимо и достаточно, чтобы последовательность функций $\{\varphi_m^k(f)_q\}$ сходилась в пространстве L_p . При этом предельная функция совпадает с $|f^{(k)}|$.

Наряду с функцией $\varphi_m^k(f)_p$ будем рассматривать

$$U_m^k(f, I)_p = \inf \left\{ \|f - s_k\|_{L_p[I]} : s_k|_{J \in \tau_m} \in P_k \right\} = \left(\sum_{J \in \tau_m} E_k(f, J)_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

— наилучшее приближение функции f в пространстве $L_p[I]$ кусочно-полиномиальными функциями степени не выше $k-1$ с интервалами полиномиальности из τ_m ;

$$U_m^k(f, I)_\infty = \max_{J \in \tau_m} E_k(f, J)_\infty.$$

Между $U_m^k(f)_p$ и величиной функции $\varphi_m^k(f)_p$ имеется прямая зависимость —

$$\frac{m^k}{|I|^k} U_m^k(f, I)_p = c_{k,p} \|\varphi_m^k(f)_p\|_{L_p[I]}, \quad (2)$$

сразу вытекающая из определений.

Следствие. Для $f \in W_p^k[I]$ выполняется

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m^k U_m^k(f, I)_p = c_{k,p} |I|^k \|f^{(k)}\|_{L_p[I]}.$$

Определим далее для $0 < p \leq \infty$ обычные L_p -модули гладкости –

$$\omega_k(f, t)_p = \sup_{0 < h < t} \|\Delta_h^k f\|_{L_p[a; b-kh]}, \quad \text{где } \Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x + ih).$$

Пусть

$$H_p^k = \left\{ f \in L_p : \sup_{t>0} t^{-k} \omega_k(f, t)_p < \infty \right\}.$$

Как показал Ю.А. Брудный [6], [7], пространства H_p^k при $1 < p < \infty$ совпадают с W_p^k , а $H_1^k = \{f : f \in W_1^{(k-1)}, f^{(k-1)} \text{ имеет ограниченную вариацию}\}$. (Следовательно, пополнение C^k по норме

$$\|\cdot\|_p + \sup_{t>0} t^{-k} \omega_k(\cdot, t)_p$$

даёт W_p^k .) При $0 < p < 1$ другое описание H_p^k неизвестно.

2. Равномерная (k, p) -дифференцируемость

Покажем сначала, что формула (1) распространяется на все рассматриваемые значения p и для существования предела достаточно дифференцируемости функции по Тейлору в данной точке.

Лемма. При $0 < p \leq \infty$ для каждого I выполняется $E_k\left(\frac{x^k}{k!}, I\right)_p = c_{k,p} |I|^{k+\frac{1}{p}}$.

Доказательство. Используя замену переменной, переводящую $[a; b]$ в $[0; 1]$, существование многочлена наилучшего приближения и свойства E_k , при всех $0 < p \leq \infty$ получаем

$$E_k(x^k, [a; b])_p = (b-a)^{\frac{1}{p}} E_k\left(\left((b-a)x + a\right)^k, [0; 1]\right)_p = (b-a)^{k+\frac{1}{p}} E_k(x^k, [0; 1])_p.$$

Лемма доказана.

Введём обозначение $\Lambda_p^k f(x_0) = k! a_k$, где a_k – коэффициент при степени k многочлена из условия (k, p) -дифференцируемости функции f в точке x_0 . Для краткости далее пишем $p_* = \min\{p; 1\}$.

Предложение 1. Если функция f является (k, p) -дифференцируемой ($p > 0$) во внутренней точке x_0 отрезка I , то

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E_k(f, [x_0 - h; x_0 + h])_p}{c_{k,p} (2h)^{k+\frac{1}{p}}} = |\Lambda_p^k f(x_0)|.$$

Доказательство. Пусть $\pi(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$, $J_h = [x_0 - h; x_0 + h]$, и выполняется $\|f - \pi\|_{L_p[J_h]} = o(h^{k+\frac{1}{p}})$. Из леммы, применённой к $J = J_h$, следует

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{E_k(f, J)_p}{c_{k,p} |J|^{k+\frac{1}{p}}} \right)^{p*} - (k!|a_k|)^{p*} \right| = \frac{|E_k(f, J)_p^{p*} - E_k(a_kx^k, J)_p^{p*}|}{(c_{k,p} |J|^{k+\frac{1}{p}})^{p*}} \leq \\ & \leq \left(\frac{E_k(f(x) - a_kx^k, J)_p}{c_{k,p} |J|^{k+\frac{1}{p}}} \right)^{p*} = \left(\frac{E_k(f - \pi, J)_p}{c_{k,p} |J|^{k+\frac{1}{p}}} \right)^{p*} \leq \left(\frac{\|f - \pi\|_{L_p[J]}}{c_{k,p} |J|^{k+\frac{1}{p}}} \right)^{p*} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $|J| \rightarrow 0$.

Определение 2. Назовём (k, p) -дифференцируемую во всех точках отрезка I функцию f равномерно (k, p) -дифференцируемой на I , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для каждой точки $x \in I$ выполняется $\|f - \pi\|_{L_p[J_h]} < \varepsilon \cdot h^{k+\frac{1}{p}}$ при $0 < h < \delta$, $J_h = [x - h; x + h] \cap I$, где π – многочлен из условия (k, p) -дифференцируемости в точке x .

Для такой функции f определена функция $\Lambda_p^k f$.

Теорема 3. Если функция f равномерно (k, p) -дифференцируема на I при некотором $0 < p \leq \infty$, то последовательность $\{\varphi_m^k(f)_p\}$ сходится равномерно на I к функции $|\Lambda_p^k f|$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in I$ и некоторое разбиение τ_m . Пусть полуинтервал $J = [x_{i-1}; x_i)$ из τ_m содержит точку x_0 , a_k – коэффициент при степени k многочлена π из условия (k, p) -дифференцируемости функции f в точке x_0 . Положим $h = \max\{x_0 - x_{i-1}, x_i - x_0\}$, тогда $h \leq |J| \leq 2h$. Рассуждая, как в предложении 1, получаем

$$\begin{aligned} & \left| (\varphi_m^k(f)_p(x_0))^{p*} - |\Lambda_p^k f(x_0)|^{p*} \right| = \left| \left(\frac{E_k(f, J)_p}{c_{k,p} |J|^{k+\frac{1}{p}}} \right)^{p*} - (k!|a_k|)^{p*} \right| \leq \\ & \leq \left(\frac{E_k(f - \pi, J)_p}{c_{k,p} |J|^{k+\frac{1}{p}}} \right)^{p*} \leq \left(\frac{\|f - \pi\|_{L_p[J]}}{c_{k,p} |J|^{k+\frac{1}{p}}} \right)^{p*} \leq \left(\frac{\|f - \pi\|_{L_p[J_h]}}{c_{k,p} h^{k+\frac{1}{p}}} \right)^{p*}. \end{aligned}$$

Здесь $J_h = [x_0 - h; x_0 + h] \cap I$. Поскольку $|J| = \frac{|I|}{m}$, то условие теоремы влечёт равномерную сходимость последовательности $\{\varphi_m^k(f)_p\}$ к $|\Lambda_p^k f|$.

Следствие. Если функция f удовлетворяет условию теоремы 3 при некотором $p \geq 1$, то $f \in C^k[I]$, $\Lambda_p^k f = f^{(k)}$.

Утверждение автоматически следует из объединения результатов теорем 2 и 3.

Отметим, из полученного результата вытекает такой факт: если при некотором значении $p \geq 1$ функция f равномерно (k, p) -дифференцируема на I , то в каждой точке $x_0 \in I$ коэффициент a_l , $l = 0, 1, \dots, k$, – при степени l многочлена π из условия (k, p) -дифференцируемости f в точке x_0 , – совпадает с $\frac{f^{(l)}(x_0)}{l!}$.

Любая функция f из $C^k[I]$ является, конечно, равномерно (k, p) -дифференцируемой на I при всех $0 < p \leq \infty$. Это легко выводится, например, из хорошо известной

формулы для остаточного члена разложения k раз дифференцируемой функции (форма Лагранжа)

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x - x_0)^{k-1} + \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x - x_0)^k,$$

где точка ξ заключена между x_0 и x . Последнее слагаемое можно записать в виде

$$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \alpha(x - x_0) \cdot (x - x_0)^k, \text{ где } \alpha(x - x_0) = \frac{f^{(k)}(\xi) - f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Из непрерывности $f^{(k)}$ следует, что все функции $\alpha(x - x_0)$ можно одновременно ограничить сколь угодно малым положительным числом ε для любых точек x_0 и x из I , удалённых друг от друга не больше, чем на соответствующее число δ .

Таким образом, получаем определённый критерий принадлежности функции пространству C^k . Возвращаясь к вопросу о соотношении дифференциалов, видим, что равномерная (k, p) -дифференцируемость ($p \geq 1$) функции f на I влечёт равномерную (k, ∞) -дифференцируемость, т.е. дифференциалы в такой ситуации «эквивалентны».

Пространства $L_p, 0 < p < 1$, гораздо меньше изучены. Распространяется ли на них теорема 2, на данный момент неизвестно (см. [8]), поэтому выводы в этих случаях не являются завершёнными.

Предложение 2. Если функция f равномерно (k, p) -дифференцируема на I при некотором $0 < p < 1$, то $f \in H_p^k[I]$, $|\Lambda_p^k f| \in C[I]$, и выполняется

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m^k U_m^k(f, I)_p = c_{k,p} |I|^k \|\Lambda_p^k f\|_p.$$

Доказательство. По теореме 3 последовательность $\{\varphi_m^k(f)_p\}$ (ступенчатых функций с условием «смещения узлов») сходится равномерно к $|\Lambda_p^k f|$. Предположив, что $|\Lambda_p^k f|$ не является непрерывной функцией, получим противоречие.

Существование предела в утверждении теоремы сразу следует из равенства (2).

Делаем вывод – последовательность $\{m^k U_m^k(f, I)_p\}$ ограничена, т.е. для некоторого M при всех m выполняется неравенство

$$U_m^k(f, I)_p \leq \frac{M}{m^k}.$$

В работе И.П. Иродовой [9] доказано при всех $0 < p \leq \infty$, что если для некоторой степенной (и даже более общего вида) функции ψ выполняется $U_m^k(\cdot, I)_p \leq \psi\left(\frac{1}{m}\right)$, то $\omega_k(\cdot, t)_p \leq \beta \psi(t)$ с постоянной β , зависящей от $k, p, |I|$. Получается

$$\omega_k(f, t)_p \leq \beta M t^k,$$

т.е. $f \in H_p^k$.

Предложение доказано.

В заключение отметим, что классическое понятие «равномерной непрерывности» получается в шкале «равномерной (k, p) -дифференцируемости» при $k = 0$. Этот факт граничит с несколькими другими, поэтому заслуживает отдельного рассмотрения.

Список литературы / References

- [1] Бернштейн С. Н., “К вопросу о локальном наилучшем приближении функций”, *Докл. АН СССР*, **26**:9 (1940), 839–842; [Bernstein S. N., “On the Question of Local Best Approximation of Functions”, *Dokl. USSR Acad. Sci.*, **26**:9 (1940), 839–842, (in Russian).]
- [2] Calderon A. P., Zygmund A., “Local properties of solution of elliptic partial differential equation”, *Studia Math.*, **20** (1961), 171–225.
- [3] Чебышев П. Л., *Собрание сочинений*, В 5 т. Т. 2, Изд. АН СССР, М.-Л., 1947; [Chebyshev P. L., *Collected Works*, In 5 v. V. 2, Izd. AN SSSR, Moscow–Leningrad, 1954, (in Russian).]
- [4] Морозов А. Н., “Аналог теоремы Бернштейна в пространстве L_1 ”, *Матем. заметки*, **57**:5 (1995), 699–703; English transl.: Morozov A. N., “Analog of Bernstein’s Theorem in the Space L_1 ”, *Math. Notes*, **57**:5 (1995), 485–488.
- [5] Морозов А. Н., “Об одном описании пространств дифференцируемых функций”, *Матем. заметки*, **70**:5 (2001), 758–768; English transl.: Morozov A. N., “On a Characterization of Spaces of Differentiable Functions”, *Math. Notes*, **70**:5 (2001), 688–697.
- [6] Брудный Ю. А., “Критерии существования производных в L^p ”, *Математический сборник*, **73**:1 (1967), 42–64; English transl.: Brudnyi Yu. A., “Criteria for the Existence of Derivatives in L^p ”, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, **2**:1 (1967), 35–55.
- [7] Брудный Ю. А., “Пространства, определяемые с помощью локальных приближений”, *Тр. ММО*, **24** (1971), 69–132; English transl.: Brudnyi Yu. A., “Spaces Defined by Means of Local Approximations”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **24** (1971), 73–139.
- [8] Морозов А. Н., “Локальные приближения дифференцируемых функций”, *Мат. заметки*, **100**:2 (2016), 248–255; English transl.: Morozov A. N., “Local Approximations of Differentiable Functions”, *Math. Notes*, **100**:2 (2016), 256–262.
- [9] Иродова И. П., “Свойства функций, заданных скоростью убывания кусочно-полиномиальной аппроксимации”, *Исследования по теории функций многих вещественных переменных*, Сб. науч. трудов, Ярославль, 1980, 92–117; [Irodova I. P., “Svoystva funktsiy, zadannykh skorostyu ubyvaniya kusochno-polinomialnoy approksimatsii”, *Issledovaniya po teorii funktsiy mnogikh veshchestvennykh peremennykh*, Sb. nauch. trudov, Yaroslavl, 1980, 92–117, (in Russian).]

Morozov A. N., “On the Taylor Differentiability in Spaces L_p , $0 < p \leq \infty$ ”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:3 (2018), 323–330.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-3-323-330

Abstract. The function $f \in L_p[I]$, $p > 0$, is called (k, p) -differentiable at a point $x_0 \in I$ if there exists an algebraic polynomial of π of degree no more than k for which holds $\|f - \pi\|_{L_p[J_h]} = o(h^{k+\frac{1}{p}})$, where $J_h = [x_0 - h; x_0 + h] \cap I$. At an internal point for $k = 1$ and $p = \infty$ this is equivalent to the usual definition of the function differentiability. At an interior point for $k = 1$ and $p = \infty$, the definition is equivalent to the usual differentiability of the function. There is a standard “hierarchy” for the existence of differentials (if $p_1 < p_2$, then (k, p_2) -differentiability should be (k, p_1) -differentiability.) In the works of S.N. Bernstein, A.P. Calderon and A. Zygmund were given applications of such a construction to build a description of functional spaces ($p = \infty$) and the study of local properties of solutions of differential equations ($1 \leq p \leq \infty$), respectively. This article is related to the first mentioned work. The article introduces the concept of uniform differentiability. We say that a function f , (k, p) -differentiable at all points of the segment I , is uniformly (k, p) -differentiable on I if for any number $\varepsilon > 0$ there is a number $\delta > 0$ such that for each point $x \in I$ runs $\|f - \pi\|_{L_p[J_h]} < \varepsilon \cdot h^{k+\frac{1}{p}}$ for $0 < h < \delta$, $J_h = [x - H; x + h] \cap I$, where π is the polynomial of the terms of the (k, p) -differentiability at the point x . Based on the methods of local approximations of functions by algebraic polynomials it is shown that a uniform (k, p) -differentiability of the function f at some $1 \leq p \leq \infty$ implies $f \in C^k[I]$. Therefore, in this case the

differentials are "equivalent". Since every function from $C^k[I]$ is uniformly (k, p) -differentiable on the interval I at $1 \leq p \leq \infty$, we obtain a certain criterion of belonging to this space. The range $0 < p < 1$, obviously, can be included into the necessary condition the membership of the function $C^k[I]$, but the sufficiency of Taylor differentiability in this range has not yet been fully proven.

Keywords: Taylor differentiability of function, local approximations of functions

On the authors:

Anatoly N. Morozov, orcid.org/0000-0001-9940-159X, PhD,

P.G. Demidov Yaroslavl State University,

14 Sovetskaya str., Yaroslavl, 150003, Russia, e-mail: moroz@uniyar.ac.ru