Моделирование и анализ информационных систем. Т. 25, №3 (2018), с. 331–342
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 25, No 3 (2018), pp. 331–342

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-3-331-342

УДК 517.518

Изопериметрические и функциональные неравенства

Климов В. С.

получена 3 января 2018

Аннотация. Устанавливаются оценки снизу интегрального функционала

$$\int\limits_{\Omega} f(u(x), \nabla u(x))\, dx,$$

где Ω – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$, интегрант $f(t,p)\,(t \in [0,\infty),\ p \in \mathbb{R}^n)$ – функция, B-измеримая по переменному t и выпуклая и четная по переменному p, $\nabla u(x)$ – градиент (в смысле Соболева) функции $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$. В первом и втором разделах существенную роль играют свойства перестановок дифференцируемых функций, а также изопериметрическое неравенство вида $H^{n-1}(\partial A) \geqslant \lambda(m_n A)$, связывающее $(n-1)$-мерную меру Хаусдорфа $H^{n-1}(\partial A)$ относительной границы ∂A множества $A \subset \Omega$ с его n-мерной мерой Лебега $m_n A$. Интегрант f при этом предполагается изотропным, т.е. $f(t,p) = f(t,q)$, если $|p| = |q|$. Намечены приложения установленных результатов к многомерным вариационным задачам.

Для функций u, обращающихся в нуль на границе области Ω, предположение об изотропности f можно опустить. В этом случае существенную роль начинают играть операции симметризации по Штейнеру и Шварцу интегранта f и функции u. Соответствующие варианты оценок снизу обсуждаются в третьем пункте. Принципиально новым здесь является то, что операция симметризации применяется не только к функции u, но и к интегранту f. Геометрическую основу результатов третьего пункта составляют неравенство Брунна–Минковского, а также свойства симметризации алгебраической суммы множеств.

Ключевые слова: перестановка, выпуклая функция, мера, градиент, симметризация, изопериметрическое неравенство

Для цитирования: Климов В. С., "Изопериметрические и функциональные неравенства", *Моделирование и анализ информационных систем*, **25**:3 (2018), 331–342.

Об авторах:
Климов Владимир Степанович, orcid.org/0000-0001-9560-8315, д-р физ.-мат. наук, профессор,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Российская Федерация, e-mail: VSK76@list.ru

1. Перестановки функций

Начало теории перестановок относится к работам Я. Штейнера и Г. Шварца, в которых изучались симметризации множеств и симметричные перестановки функций.

Эти исследования были продолжены в трудах Г. Харди и Г. Литтлвуда, рассматривавших перестановки функций и последовательностей. В конце 30-х годов прошлого века сложилось новое направление в математике – теория вложения пространств Соболева. Первые результаты этой теории были получены с помощью симметричных перестановок. В последующие два десятилетия основным в теории вложения стал метод интегральных представлений. Лишь отдельные функциональные неравенства (оценки емкостей, площадей поверхности, основной частоты упругой мембраны, жёсткости кручения и т.п.) устанавливались с помощью методов симметризации [1]. Возрождение интереса к геометрическим методам произошло в 1960 г., когда В.Г. Мазья и независимо Федерер и Флеминг переоткрыли тесную связь теорем вложения с изопериметрическими неравенствами. Ряд важных результатов, полученных методами геометрической теории меры и относящихся к пространствам Соболева, содержится в монографии [2]. Подробное изложение истории вопроса и значительную библиографию можно найти в [1] – [10].

Пусть Ω – измеримое подмножество $\mathbb{R}^n$, n-мерная лебегова мера m_n которого конечна и положительна: $0 < a = m_n\Omega < \infty$. Если $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ измеримая почти везде конечная функция, то при любом действительном t множество $A_t := \{x \in \Omega : |u(x)| > t\}$ измеримо. Функция $\mu(t) := m_n(A_t)\,(0 \leqslant t < \infty)$ называется *функцией распределения* u. Функция $\bar{u}(s)$ одного переменного s, определенная при $s \in [0, a)$ равенством $\bar{u}(s) = \inf\{\tau : m_nA_\tau \leqslant s\}$, называется *перестановкой* u. (Если множество $\{\tau : m_nA_\tau \leqslant 0\}$ пусто, то $\bar{u}(0) = \infty$). Положим

$$\bar{u}(a) = \lim_{s\to a-0} \bar{u}(s).$$

Функция $\bar{u}$ характеризуется свойствами: $\bar{u}$ не возрастает, непрерывна справа и равноизмерима с функцией $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ в том смысле, что $\mu(\tau) = m_1\{s : \bar{u}(s) > \tau\}$. Для непрерывности $\bar{u}$ достаточно, чтобы функция распределения строго возрастала на $[\bar{u}(a), \bar{u}(0)]$. Отметим равенства $\bar{u}(a) = vrai\,\min|u|, \bar{u}(0) = vrai\,\max|u|$.

Всюду далее Ω есть ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Введем обозначения: ∂M – граница множества $M \subset \mathbb{R}^n$, $H^{n-1}(M)$ – $(n-1)$-мерная мера Хаусдорфа множества M. Важную роль в дальнейшем играет изопериметрическое неравенство

$$H^{n-1}(\partial A \cap \Omega) \geqslant \lambda(m_nA), \tag{1}$$

где A – любое подмножество Ω с локально липшицевой внутренней относительно Ω частью границы, $\lambda\colon [0, a] \to [0, \infty)$ – функция на $[0, a]$, возрастающая на $\left[0, \dfrac{a}{2}\right]$ и $\lambda(s) = \lambda(a-s)\ \forall s \in [0, a]$. Задача о поиске максимальной функции λ, удовлетворяющей оценке (1), достаточно сложна и решена лишь для отдельных областей. Как показано в [2], всегда можно считать, что $\lambda(s) > 0$ при $s \in (0, a)$. Обозначим через $J(\lambda)$ класс областей Ω, для которых неравенство (1) верно с функцией $\lambda(\cdot)$, непрерывной на $[0, a]$, возрастающей и положительной на $(0, a/2]$ и $\lambda(s) = \lambda(a-s)$. Класс областей, для которых функция λ удовлетворяет неравенству $\lambda(s) \geqslant k_0s^\alpha$ $(k_0 > 0, 0 < 2s < a)$, обозначаем символом J_α. Этот класс был введен и исследован в работах В.Г. Мазья. Области, удовлетворяющие условию конуса, принадлежат классу J_α с $\alpha = 1 - \dfrac{1}{n}$ [2].

Обозначим через $W_1^1(\Omega)$ совокупность локально суммируемых в Ω функций, имеющих в Ω суммируемые производные (в смысле С.Л. Соболева [3]) первого порядка. В $W_1^1(\Omega)$ введём норму [2]

$$\|u; W_1^1(\Omega)\| = \int\limits_{\Omega} \nabla_1 u(x)\, dx + \int\limits_{\omega} |u(x)|\, dx.$$

Здесь ω – некоторое фиксированное (непустое) открытое множество с компактным замыканием $\bar{\omega} \subset \Omega$, $\nabla u(x)$ – градиент функции $u(x)$, $\nabla_1 u(x)$ – евклидова длина вектора $\nabla u(x)$. Относительно данной нормы $W_1^1(\Omega)$ – сепарабельное банахово пространство. Множество функций класса $W_1^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ плотно в пространстве $W_1^1(\Omega)$ [2], [5]. Пространство $W_1^1(\Omega)$ вложено в пространство $L^m(\Omega)$, $m \geqslant 1$, в том и только том случае, если $\Omega \in J_{1/m}$ [2, гл. 3].

Ниже применяется следующий вариант формулы коплощади ([2], [5]).

Предложение 1. *Пусть $\mathbb{D}$ - открытое множество в $\mathbb{R}^n, u$ – вещественная функция класса $C^1(\mathbb{D})$, причем $\nabla_1 u(x) > 0 \, \forall x \in \mathbb{D}$; $\mathbb{B}_t := \{x \in \mathbb{D}, |u(x)| = t\}, g \in L(\mathbb{D})$. Тогда для почти всех значений $t \geqslant 0$ функция $\dfrac{g}{\nabla_1 u}$ интегрируема по $\mathbb{B}_t$ относительно $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа dH^{n-1}, соответствующий интеграл*

$$\int\limits_{\mathbb{B}_t} \frac{g(x)}{\nabla_1 u(x)}\, dH^{n-1}$$

суммируем по мере dt и имеет место формула

$$\int\limits_{\mathbb{D}} g(x) dx = \int\limits_0^\infty dt \int\limits_{\mathbb{B}_t} \frac{g(x)}{\nabla_1 u(x)}\, dH^{n-1}. \qquad (2)$$

Далее используются обозначения: $\theta = (0, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$, символы ◀ и ▶ – начало и конец доказательства.

Лемма 1. *Пусть $\Omega \in J(\lambda), u \in W_1^1(\Omega), \gamma(\cdot)$ – неотрицательная измеримая по Борелю функция на $[0, \infty)$. Тогда*

$$\int\limits_{\Omega} \gamma[|u(x)|] \nabla_1 u(x)\, dx \geqslant \int\limits_0^\infty \gamma(t) \lambda(m_n A_t)\, dt, \qquad (3)$$

где $A_t = \{x \in \Omega : |u(x)| > t\}$.

◀ Установим (3), предполагая вначале функцию $\gamma(\cdot)$ непрерывной и ограниченной на $[0, \infty)$ $(0 \leqslant \gamma(t) < \gamma_0 < \infty \, \forall t \in [0, \infty))$. Фиксируем последовательность $u_i(x)$ функций класса $W_1^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$, сходящуюся к функции $u(x)$ в метрике $W_1^1(\Omega)$. Пусть $A_t^i = \{x \in \Omega : |u_i(x)| > t\}, B_t^i = \{x \in \Omega : |u_i(x)| = t\}$. Поскольку u_i – функция класса $C^\infty(\Omega)$, то почти при всех $t > 0$ множество B_t^i есть $(n-1)$-мерное многообразие класса C^∞. В силу предложения 1 и неравенства (1) имеем

$$\int\limits_{\Omega} \gamma(|u_i(x)|) \nabla_1 u_i(x)\, dx = \int\limits_{\nabla_1 u(x) > 0} \gamma(|u_i(x)|) \nabla_1 u_i(x)\, dx \geqslant \int\limits_0^\infty \gamma(t) \lambda(m_n A_t^i)\, dt. \qquad (4)$$

Так как последовательность u_i сходится к u в метрике $W_1^1(\Omega)$, то u_i сходится к u по мере, $m_n(A_t^i \Delta A_t) \to 0$ при $i \to \infty$ и почти при всех t, следовательно,

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_0^\infty \gamma(t)\lambda(m_n A_t^i)\, dt = \int\limits_0^\infty \gamma(t)\lambda(m_n A_t)\, dt.$$

Последовательность $\gamma(|u_i|)\nabla_1 u_i$ сходится по мере к функции $\gamma(|u|)\nabla_1 u$. В силу ограниченности функции $\gamma(\cdot)$ функции $\gamma(|u_i|)\nabla_1 u_i$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы. Поэтому

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_\Omega \gamma(|u_i(x)|)\nabla_1 u_i(x)\, dx = \int\limits_\Omega \gamma(|u(x)|)\nabla_1 u(x)\, dx.$$

Теперь (3) следует из (4) и теоремы Фату.

Отбросим теперь условие непрерывности функции $\gamma(t)$, предположение её ограниченности пока остается, так что $0 \leqslant \gamma(t) < \gamma_0 < \infty$. Как известно, существует такая неотрицательная функция $\alpha(\cdot)$ класса $L[0,\infty)$, что для любого измеримого по Борелю множества $B \subset \mathbb{R}_+$ справедливо равенство [5]

$$\int\limits_{|u|^{-1}(B)} \nabla_1 u(x) = \int\limits_B \alpha(t)\, dt. \tag{5}$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\int\limits_{|u|^{-1}(B)} \nabla_1 u(x) = \int\limits_B \alpha(t)\, dt < \varepsilon$$

для любого измеримого по Борелю множества B, для которого $m_1 B < \delta$.

По теореме Лузина существует такое замкнутое множество $T \subset \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, что $m_1(\mathbb{R}_+ \setminus T) < \delta$ и сужение функции $\gamma(\cdot)$ на T непрерывно. Пусть $\gamma_1(t)$ – функция, совпадающая с $\gamma(\cdot)$ на множестве T и линейная на интервалах дополнительных к T. Очевидно, что функция $\gamma_1(\cdot)$ непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}_+$;

$$m_1\{t \in \mathbb{R}_+ : \gamma(t) \neq \gamma_1(t)\} < \delta, \quad 0 \leqslant \gamma_1(t) < \gamma_0.$$

Согласно доказанной части леммы справедливы неравенства

$$\int\limits_\Omega \gamma_1(|u(x)|)\nabla_1 u(x)\, dx \geqslant \int\limits_0^\infty \gamma_1(t)\lambda(m_n A_t)\, dt \geqslant \int\limits_T \gamma(t)\lambda(m_n A_t)\, dt.$$

Оценим левую часть полученного неравенства сверху

$$\int\limits_\Omega \gamma_1(|u(x)|)\nabla_1 u(x)\, dx \leqslant \int\limits_\Omega \gamma(|u(x)|)\nabla_1 u(x)\, dx + \gamma_0 \int\limits_{|u(x)|\notin T} \nabla_1 u(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_\Omega \gamma(u(x))\nabla_1 u(x)\, dx + \varepsilon\gamma_0.$$

Так как δ, ε могут быть взяты сколь угодно малыми, равенство (3) в рассматриваемом случае установлено.

Откажемся теперь от предположения ограниченности функции γ. Для любого натурального числа N функция $\gamma^N(t) = \min\{\gamma(t), N\}$ измерима по Борелю и ограничена сверху. Справедлива цепь соотношений

$$\int\limits_{\Omega} \gamma(|u(x)|)\nabla_1 u(x)\,dx \geqslant \int\limits_{\Omega} \gamma^N(|u(x)|)\nabla_1 u(x)\,dx \geqslant \int\limits_{0}^{\infty} \gamma^N(t)\lambda(m_n A_t)\,dt.$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$, получаем неравенство (3). ►

2. Интегральные неравенства

Функцию $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ будем называть *функцией Юнга*, если функция Φ выпукла, четна на $\mathbb{R}^n, \Phi(\theta) = 0$ и при каждом $h > 0$ множество $\mathbb{P}(h) = \{p \in \mathbb{R}^n : \Phi(p) \leqslant h\}$ есть замкнутое ограниченное тело в $\mathbb{R}^n$. Функцию Юнга Φ назовём *изотропной,* если $\Phi(p) = \Phi_1(|p|)$, где Φ_1 – функция Юнга одного переменного.

Сопоставим функции Юнга Φ сопряженную к ней

$$\Phi^*(q) = \sup_{p\in\mathbb{R}^n} (\langle p, q\rangle - \Phi(p)),$$

где $\langle p, q\rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Определяемая таким образом функция Φ^* есть функция Юнга на $\mathbb{R}^n$ [11].

Функцию $\Phi^\circ\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ будем называть *округлением* функции Юнга Φ, если функция $\Phi^\circ(r)$ четна на $\mathbb{R}, \Phi^\circ(0) = 0$, функция $r \to \Phi^\circ(r)$ непрерывна слева при $r \geqslant 0$ и нижние лебеговы множества $\{p : \Phi(p) \leqslant h\}, \quad \{p : \Phi^\circ(|p|) \leqslant h\}$ функций Φ и $\Phi^\circ(|\cdot|)$ имеют одинаковую n-мерную меру при любом $h \geqslant 0$. Аналитическое определение функции Φ° эквивалентно следующему геометрическому факту: надграфик функции $\Phi^\circ(|p|)$ является симметризацией по Шварцу [12] надграфика функции $\Phi(p)$. Если функции $\Phi^\circ, \Phi^{*\circ}$ суть округления функций Юнга Φ и Φ^* соответственно,

$$\Phi^{*\circ*}(r) = \sup_s (rs - \Phi^{*\circ}(s)), \tag{6}$$

то 1) $\Phi^\circ, \Phi^{*\circ}, \Phi^{*\circ*}$ – функции Юнга на $\mathbb{R}$; 2) существуют такие зависящие лишь от n положительные постоянные α_n, β_n , что для любой функции Юнга Φ справедливы оценки

$$\Phi^\circ(\alpha_n r) \leqslant \Phi^{*\circ*}(r) \leqslant \Phi^\circ(\beta_n r) \quad \forall r \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Доказательства оценок (7) и других свойств операции округления можно найти в [13]. Для изотропной функции Юнга Φ имеют место хорошо известные равенства $\Phi^{*\circ} = \Phi^{\circ*}, \Phi^\circ = \Phi^{*\circ*}$ [11].

Функцию $f\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ назовём *интегрантом Юнга*, если 1) при любом $t \geqslant 0$ функция $f_t(p) = f(t, p)$ есть функция Юнга на $\mathbb{R}^n$; 2) функция $t \to f(t, p)$ измерима по Борелю при любом $p \in \mathbb{R}^n$. По определению $f^*(t, q) = f_t^*(q), f^\circ(t, r) =$

$f_t^\circ(r)$, т.е. введенные выше операции выпуклого анализа применяются к функции f_t. Если f – интегрант Юнга, то и f^*, f° также интегранты Юнга [14].

При любом $h \geqslant 0$ множество $\mathbb{Q}_t(h) = \{q \in \mathbb{R}^n : f_t^*(q) \leqslant h\}$ есть выпуклый центрально-симметричный компакт. Положим $k(p\,; t, h) = \max\{\langle p, q\rangle, q \in \mathbb{Q}_t(h)\}$. Таким образом, $k(p\,; t, h)$ есть опорная функция множества $\mathbb{Q}_t(h)$. Из определения функции $k(\cdot)$ вытекают неравенства

$$k(p\,; t, h) - h \leqslant f(t, p), \quad k(p\,; t, h) \leqslant \rho(t, h)|p|, \tag{8}$$

где $\rho(t, h) = \max\{|q|, q \in \mathbb{Q}_t(h)\}$. При возрастании h функция $k(p\,; t, h)$ не уменьшается. Для изотропного интегранта f сопряженный интегрант f^* также изотропен, поэтому $\mathbb{Q}_t(h) = \{q : |q| \leqslant \rho(t, h)\}$ и $k(p\,; t, h) = \rho(t, h)|p|$. Для любой вещественной B-измеримой на $\mathbb{R}_+$ функции $r(t)$ функция $t \to k(p\,; t, r(t))$ измерима по Борелю [14]. В частности, если f – изотропный интегрант, то B-измерима функция $\rho(t, r(t))$.

Пусть Ω ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $W(\Omega)$ совокупность почти везде конечных функций $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, для которых при любом $l > 0$ её срезка $u^l = \min\{|u|, l\} sgn(u)$ по уровню l принадлежит $W_1^1(\Omega)$. Класс $W(\Omega)$ включает в себя пространство $W_1^1(\Omega)$. Перестановка $\bar{u}$ функции u из $W(\Omega)$ абсолютно непрерывна на каждом отрезке $[\delta, a]$ $\quad (0 < \delta < a = m_n\Omega)$ [4], [13]. Если $A_t = \{x \in \Omega : |u(x)| > t\}$ и $\mu(t) = m_n(A_t) = m_1\{s \in [0, a], \bar{u}(s) > t\}$ – функция распределения функции $u \in W(\Omega)$, то $t = \bar{u}(\mu(t)), s \geqslant \mu(\bar{u}(s)))$, причём $s = \mu(\bar{u}(s)))$, если функция $\mu(t)$ непрерывна в точке $t = \bar{u}(s)$. Если $u \in W(\Omega)$, $l > m > 0$, то $\nabla u^l(x) = \nabla u^m(x)$ при $x \in A_m$, поэтому почти всюду в Ω существует

$$\lim_{l\to\infty} \nabla u^l(x),$$

обозначаемый далее как $\nabla u(x)$.

Теорема 1. *Пусть f – изотропный интегрант Юнга, f° – округление интегранта f, $\Omega \in J(\lambda)$, $a = m_n\Omega, u \in W(\Omega), \bar{u}$ – перестановка функции u.*

Тогда справедливо неравенство

$$\int\limits_\Omega f(|u(x)|, \nabla u(x))\, dx \geqslant \int\limits_0^a f^\circ\left(\bar{u}(s), \frac{d\bar{u}}{ds}(s)\lambda(s)\right) ds. \tag{9}$$

◀ Пусть $u \in W(\Omega)$. Функция $p \to f(|u(x)|, p)$ почти для всех x из Ω выпукла, полунепрерывна снизу по p и конечна в некоторой окрестности θ, а при каждом p функция $f(|u(x)|, p)$ измерима по Лебегу. Отсюда следует, что функция $f(|u(x)|, \nabla u(x))$ измерима по Лебегу. Если эта функция не суммируема по Ω, то левая часть (9) считается равной $+\infty$. Аналогичное соглашение принимается и для правой части (9). Повторяя проведенные в [14] рассуждения, можно показать, что (9) достаточно установить для ограниченных и неотрицательных функций u.

Итак, не нарушая общности, считаем, что $u \in W(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и $u(x) \geqslant 0$. В этом случае функция $\bar{u}$ - абсолютно непрерывна на $[0, a]$, а функция $\dfrac{d\bar{u}}{ds}(s)\lambda(s)$ суммируема по отрезку $[0, a]$ [2], [4]. Далее $\mu(t)$ – функция распределения функции $u(\cdot)$. Функционалы $I_{f^\circ}, I_{f^{\circ *}}$, определенные на $L(0, a)$ и $L^\infty(0, a)$ равенствами

$$I_{f^\circ}(z) = \int\limits_0^a f^\circ(\bar{u}(s), z(s))\, ds, \quad I_{f^{\circ *}}(y) = \int\limits_0^a f^{\circ *}(\bar{u}(s), y(s))\, ds, \tag{10}$$

сопряжены друг другу относительно обычной двойственности между пространствами $L(0,a)$ и $L^\infty(0,a)$. Отсюда следует, что

$$\int\limits_0^a f^\circ\left(\bar u(s),\frac{d\bar u}{ds}(s)\lambda(s)\right)ds = I_{f^\circ}\left(\left|\frac{d\bar u}{ds}\right|\lambda\right)=$$

$$=\sup_{y\in L^\infty(0,a)}\left\{\int\limits_0^a\left(\left|\frac{d\bar u}{ds}(s)\right|\lambda(s)y(s)-f^{\circ *}(\bar u(s),y(s))\right)ds\right\}. \qquad (11)$$

В соотношении (11) *supremum* можно брать лишь по функциям y из $L^\infty(0,a)$, удовлетворяющим условиям:

$i_1)$ $y(s)\geqslant 0$, $y(s)=0$, если $\dfrac{d\bar u}{ds}(s)=0$, $y(\cdot)$ измерима по Борелю;

$i_2)$ функция $f^{\circ *}(\bar u(s),y(s))$ измерима по Борелю, конечна при всех s и суммируема по отрезку $[0,a]$.

Для доказательства (9) достаточно установить неравенство

$$\int\limits_\Omega f(|u(x|,\nabla u(x))\,dx\geqslant\int\limits_0^a\left(\left|\frac{d\bar u}{ds}(s)\right|\lambda(s)y(s)-f^{\circ *}(\bar u(s),y(s))\right)ds \qquad (12)$$

для каждой функции $y(\cdot)$, удовлетворяющей условиям $i_1), i_2)$. Фиксируем подобную функцию $y(\cdot)$ и определим функцию $r(t)$ на луче $\mathbb{R}_+$ равенством

$$r(t)=f^{\circ *}(\bar u(\mu(t)),y(\mu(t)))=f^{\circ *}(t,y(\mu(t))).$$

Функция $r(\cdot)$ измерима по Борелю, а функции $f^{\circ *}(\bar u(s),y(s))\quad(0\leqslant s\leqslant a)$ и $r(u(x))$ $(x\in\Omega)$ равноизмеримы.

Пусть $k(p;t,h)$ есть опорная функция множества $\mathbb{Q}_t(h)=\{q\in\mathbb{R}^n : f_t^*(q)\leqslant h\}$. В силу изотропности интегранта f справедливо равенство $k(p\,;t,h)=\rho(t,h)|p|$, где $\rho(t,h)=\max\{|q|,q\in\mathbb{Q}_t(h)\}$. Функция $\gamma(t)=\rho(t,r(t))$ измерима по Борелю. Соотношение $Q(t,r(t))=\{q : f^{*\circ}(t,|q|)\leqslant r(t)=f^{*\circ}(t,y(\mu(t)))\}$ влечёт за собой оценку $\gamma(t)\geqslant y(\mu(t))$ Из (8) вытекает неравенство

$$f(t,p)\geqslant\gamma(t)|p|-r(t)\geqslant y(\mu(t))|p|-r(t).$$

Его очевидным следствием является оценка

$$\int\limits_\Omega f(u(x),\nabla u(x))\,dx\geqslant\int\limits_\Omega(y(\mu(u(x))\nabla_1 u(x)-r(u(x)))\,dx. \qquad (13)$$

Используя лемму 1 и замену переменных $t=\bar u(s)$, получаем последовательно

$$\int\limits_\Omega y(\mu(u(x))\nabla_1 u(x)\,dx\geqslant\int\limits_0^\infty y(\mu(t))\lambda(\mu(t))\,dt=\int\limits_0^a y(s)\left|\frac{d\bar u(s)}{ds}\right|\lambda(s)\,ds. \qquad (14)$$

В силу равноизмеримости функций $f^{\circ *}(\bar{u}(s), y(s))$, $\quad r(u(x))$ равны соответствующие интегралы

$$\int_{\Omega} r(u(x))\, dx = \int_{0}^{a} f^{\circ *}(\bar{u}(s), y(s))\, ds. \tag{15}$$

Объединение (13)–(15) влечет неравенства (12), (9).►

В качестве приложения теоремы 1 рассмотрим многомерную вариационную задачу

$$g(u) = \int_{\Omega} G(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \to \inf,$$

$$u \geqslant 0, \quad u \in W_1^1(\Omega), \quad h(u) = \int_{\omega} H(u(x))\, dx = 1.$$

Теорема 2. *Пусть H – B-измеримая функция на $\mathbb{R}_+$, а функция $G(x, t, p)$ удовлетворяет неравенству $G(x, t, p) \geqslant f(t, p)$, где f – изотропный интегрант Юнга на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$. Тогда значение рассматриваемой многомерной вариационной задачи не меньше значения следующей одномерной вариационной задачи:*

$$\int_{0}^{a} f^{\circ}\left(z(s), \frac{dz}{ds}(s)\lambda(s)\right) ds \to \inf, \quad z(s) \geqslant 0, \quad \int_{0}^{a} H(z(s))\, ds = 1,$$

где z – абсолютно непрерывные на каждом отрезке $[\delta, a]$ $(0 < \delta < a)$ и убывающие на $(0, a]$ функции.

◄ Теорема 2 вытекает из теоремы 1.►

Изопериметрическое условие $h(u) = 1$ можно заменить включением $u \in \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ – перестановочно инвариантное множество: вместе с функцией u множество $\mathfrak{M}$ содержит все равноизмеримые с ней функции.

3. Симметризации функций и интегральные неравенства

Усиливая предположения относительно функции u, можно доказать аналог неравенства (9) для анизотропного интегранта Юнга f. Пусть $\overset{\circ}{W}{}_1^1(\Omega)$ – совокупность функций из $W_1^1(\Omega)$, обращающихся в нуль на границе области Ω. Последнее означает, что если функцию из $\overset{\circ}{W}{}_1^1(\Omega)$ продолжить на всё пространство $\mathbb{R}^n$, полагая её равной нулю на $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, то продолженная функция принадлежит $W_1^1(\mathbb{R}^n)$. Обозначим через $\overset{\circ}{W}$ совокупность неотрицательных почти везде конечных функций u на Ω, для которых при любом $l > 0$ функции $u^l = \min\{u, l\}$ принадлежат пространству $\overset{\circ}{W}{}_1^1(\Omega)$. Поскольку $\overset{\circ}{W}(\Omega) \subset W(\Omega)$, то определен градиент $\nabla u(x)$ функции u класса $\overset{\circ}{W}$. Перестановка $\bar{u}$ функции u из $\overset{\circ}{W}$ абсолютно непрерывна на каждом сегменте $[\delta, a]$ $(0 < \delta < a)$ и $\bar{u}(a) = 0$.

Предложение 2. [14] *Пусть f – интегрант Юнга на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, $u \in \overset{\circ}{W}(\Omega)$, $\bar{u}$ – перестановка u, $a_n = m_n\{p \in \mathbb{R}^n : |p| \leqslant 1\}$. Тогда справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} f(u(x), \nabla u(x))\, dx \geqslant \int\limits_{0}^{a} f^{*\circ *}\left(\bar{u}(s), \frac{d\bar{u}(s)}{ds}(s)\, \lambda_0(s)\right) ds, \qquad (16)$$

в котором функция $f^{*\circ *}$ определена равенством (6), $\lambda_0(s) = n\sqrt[n]{a_n}\, s^{\frac{n-1}{n}}$.

Очевидна аналогия между неравенствами (9) и (16). Вместе с тем существенны и различия – интегрант f в предложении 2 может быть анизотропным, функция u в определенном смысле обращается в нуль на границе области Ω, функция $\lambda(s)$ заменена более простой функцией $\lambda_0(s)$. Для анизотропного интегранта f функции f° и $f^{*\circ *}$ различны, однако из неравенств (7) следует их эквивалентность в том смысле, что $f^\circ(t, \bar{\alpha}_n r) \leqslant f^{*\circ *}(t, r) \leqslant f^\circ(t, \bar{\beta}_n r)$ и положительные постоянные $\bar{\alpha}_n, \bar{\beta}_n$ зависят только от n. Геометрическую основу предложения 2 составляет классическое неравенство Брунна–Минковского и вытекающая из него изопериметрическая теорема [12; гл. 5]. Отметим, что неравенства типа (16) верны и для функций u, обращающихся в 0 лишь на части границы области Ω. Соответствующие утверждения установлены в [15] для интегрантов f, четных по каждому из переменных p_i. Доказательства опираются на неравенство Лумиса–Уитни [12].

Соотношению (16) можно придать несколько иную форму. Функцию $u^\circ(x) = \bar{u}(a_n|x|^n)$ именуют *симметризацией Шварца* функции u. Эта функция определена на шаре $\Omega^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| < R\}$, $(a_n R^n = m_n \Omega)$ и равноизмерима с функцией u. Справедливо включение $u^\circ \in \overset{\circ}{W}(\Omega^\circ)$ и верно равенство

$$\nabla_1 u^\circ(x) = \lambda_0(s) \left| \frac{d\bar{u}(s)}{ds}(s) \right|,$$

в котором $s = a_n|x|^n$. Поэтому (16) эквивалентно неравенству

$$\int\limits_{\Omega} f(u(x), \nabla u(x))\, dx \geqslant \int\limits_{\Omega^\circ} f^{*\circ *}(u^\circ(x), \nabla_1 u^\circ(x))\, dx. \qquad (17)$$

Рассмотрим вариант (17), возникающий при замене симметризации по Шварцу симметризацией по Штейнеру. Напомним некоторые определения. Пусть $H = \{(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n), x_n = 0\}$ – координатная гиперплоскость в $\mathbb{R}^n (n \geqslant 2)$, $P_H : \mathbb{R}^n \to H$ – оператор ортогонального проектирования, $l(x)$ – прямая, проходящая через точку x и ортогональная H, A – такое множество в $\mathbb{R}^n$, что для любого x из множества $P_H A$ пересечение $A \cap l(x)$ ограничено. Симметризацией Штейнера множества A относительно гиперплоскости H называется [12] множество

$$S_H A = \bigcup_{x \in P_H A} (A \cap l(x))^{\mathbf{s}},$$

где $(A \cap l(x))^{\mathbf{s}}$ – принадлежащий $l(x)$ отрезок с центром в точке x, длина которого равна одномерной хаусдорфовой мере множества $A \cap l(x)$. При изучении симметризации Штейнера оказались полезными правила, относящиеся к операции Минковского [12]. В дальнейшем удобно точку $x = (x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)$ из $\mathbb{R}^n$ записывать в виде (x', x_n), где $x' = (x_1, \cdots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, так что $P_H x = (x', 0)$.

Введем понятие *симметризации по Штейнеру* функции Юнга $\Phi(p) \quad (p \in \mathbb{R}^n)$. Надграфик $epi\Phi$ функции Φ есть выпуклое замкнутое подножество $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Симметризация $epi\Phi$ относительно гиперплоскости $H \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ совпадает с надграфиком некоторой функции, называемой симметризацией Φ относительно H в возрастающем порядке и обозначаемой символом Φ^S. Из определения функции Φ^S вытекает равенство $\{p \in \mathbb{R}^n : \Phi^s(p) \leqslant h\} = S_h\{p \in \mathbb{R}^n : \Phi(p) \leqslant h\}$ – нижние лебеговы множества функции Φ^S совпадают с симметризациями по Штейнеру нижних лебеговых множеств функции Φ.

Перейдем к определению симметризации по Штейнеру суммируемых функций. Пусть u – неотрицательная функция из $L(\Omega)$. Её подграфик (ординатное множество) $ordu = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in \Omega, 0 \leqslant t \leqslant u(x)\}$ есть подмножество $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, пересечение которого с каждой прямой, проходящей через точку $(x', t), x' \in H, t > 0$, и перпендикулярной $H \times \mathbb{R}$, есть ограниченное множество. Поэтому определена симметризация по Штейнеру множества $ordu \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ относительно гиперплоскости $H \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Результат этой симметризации есть множество $S_H(ordu) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Оно совпадает с подграфиком некоторой неотрицательной функции u^c, суммируемой на множестве $\Omega^c = S_H\Omega$ и называемой симметризацией по Штейнеру функции u относительно H в убывающем порядке. Почти при всех $x' \in P_H\Omega$ функция $u^c(x', \cdot)$ совпадает с перестановкой функции $u(x', \dots)$ в симметрично убывающем порядке ([3], с. 309). Это свойство может быть положено в основу определения функции u^c.

Если u – неотрицательная функция из $\overset{\circ}{W}{}^1_1(\Omega)$, то $u^c \in \overset{\circ}{W}{}^1_1(\Omega^c)$. Автором получены широкие обобщения этого факта. Например, установлено [16], [17], что для любой функции Юнга $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и любой функции u класса $\overset{\circ}{W}(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \Phi(\nabla u(x))\, dx \geqslant \int\limits_{\Omega^c} \Phi^{*S*}(\nabla u^c(x))\, dx. \tag{18}$$

Вариант неравенства (18) верен и для интегранта Юнга.

Теорема 3. *Пусть f – интегрант Юнга на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, $u \in \overset{\circ}{W}(\Omega)$. Тогда справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} f(u(x), \nabla u(x))\, dx \geqslant \int\limits_{\Omega^c} f^{*S*}(u^c(x), \nabla u^c(x))\, dx. \tag{19}$$

◀ Доказательство аналогично доказательству теоремы 1, поэтому ограничимся указанием его схемы. Вначале устанавливается вариант леммы 1. Соответствующее утверждение составляет содержание леммы 3 из [17], относящейся к так называемым простым (полиэдральным) функциям u и интегрантам f, сублинейным по переменному p. Неравенство (4) этой работы может быть с помощью подходящего предельного перехода распространено на функции u класса $\overset{\circ}{W}(\Omega)$; условие сублинейности f по переменной p при этом ещё сохраняется. От требования сублинейности f по переменной p можно отказаться, использовав двойственность выпуклых функционалов $I_{f^{*S*}}, I_{f^{*S}}$, определяемых на пространствах $L(\Omega^c)$, $L^\infty(\Omega^c)$ аналогичными (10) равенствами

$$I_{f^{*S*}}(z)=\int\limits_{\Omega^c} f^{*S*}(u^c(x),z(x))\,dx,\quad I_{f^{*S}}(y)=\int\limits_{\Omega^c} f^{*S}(u^c(x),y(x))\,dx,$$

Эта двойственность позволяет вывести неравенство (19) из более простого соотношения

$$\int\limits_{\Omega} f(u(x),\nabla u(x))\,dx \geqslant \int\limits_{\Omega^c} (\langle \nabla u^c(x),y(x)\rangle - f^{*S}(u^c(x),y(x))\,dx. \tag{20}$$

Неравенство (20) аналогично неравенству (12). И в этом случае для доказательства (19) достаточно проверить (20) не для всех функций y из $L^\infty(\Omega^c)$, а лишь для функций, удовлетворяющих условиям типа $i_1), i_2)$. ▶

Основное отличие теоремы 3 от известных принципов симметризации (см., например, [1] – [10]) связано с анизотропностью интегранта f. Теорема 3 очевидным образом переносится на симметризации относительно произвольной однородной гиперплоскости H. Как известно, симметризация относительно любого пространства $V \subset \mathbb{R}^n$ может быть получена как результат последовательного применения симметризации Штейнера относительно бесконечной системы гиперплоскостей [12]. В частности, таким образом могут быть получены аналоги теоремы 3 для k-мерной симметризации по Штейнеру.

Список литературы / References

[1] Polya G., Szego G., *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, Princeton, 1951.

[2] Мазья В.Г., *Пространства С.Л. Соболева*, Изд-во Ленингр. ун-та, Ленинград, 1985; English transl.: Maz'ja Vladimir G., *Sobolev spaces*, Translated from the Russian by T.O. Shaposhnikova, Springer Series in Soviet Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[3] Соболев С.Л., *Введение в теорию кубатурных формул*, Наука, М., 1974; [Sobolev S. L., *Introduction to the Theory of Cubature formulas*, Nauka, Moscow, 1974, (in Russian).]

[4] Коляда В.И., “Перестановки функций и теоремы вложения”, *УМН*, **44**:5 (1989), 61–95; English transl.: Kolyada V.I., “Rearrangements of functions and embedding theorems”, *Russian Math. Surveys*, **44**:5 (1989), 73–117.

[5] Evans L.S. and Gariepy R.F., *Measure theory and fine properties of functiond*, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1992.

[6] Kawohl B., *Rearrangements and convexity of level sets in P.D.E.*, Lectures Notes in Math., **1150**, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[7] Talenti G., “On Isoperimetric Theorems of Mathematical Physics”, *Handbook of convex Geometry*, **B**, Amsterdam, New York, North-Holland, 1993.

[8] Kesavan S., *Symmetrization & Applications*, World Scientific, New Jersey, 2006, 160 c.

[9] Rakotoson J.-M., *Rearrangement Relatif: Un instrument destimations dans les problemes aux limites*, Mathematiques et Applications (French Edition), **64**, Springer, 2008.

[10] Solynin A. Yu., “Continuous symmetrization via polarization”, *Algebra i Analis*, **24**:1 (2012), 157–222.

[11] Rockafellar R.T., *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[12] Hadwiger H., *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, **1150**, Springer–Verlag, 1957.

[13] Климов В.С., “Теоремы вложения и геометрические неравенства”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **40**:3 (1976), 645–671; English transl.: Klimov V.S., “Imbedding theorems and geometric inequalities”, *Mathematics of the USSR–Izvestiya*, **10**:3 (1976), 615–638.

[14] Климов В.С., “Об оценках снизу некоторых интегральных функционалов”, *Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений*, Яросл. гос. ун-т, Ярославль, 1981, 77–87; [Klimov V. S., “Ob ocenkah snisu nekotoryh integralnyh funcionalov”, *Kachestvennye i priblizhennye metody issledovaniya operatornyh uravnenii*, Yar. gos. un-t, Yaroslavl, 1981, 77–87, (in Russian).]

[15] Климов В.С., “К теоремам вложения анизотропных классов функций”, *Матем. сб.*, **127(169)**:2(6) (1985), 198–208; English transl.: Klimov V.S., “On imbedding theorems for anisotropic classes of functions”, *Mathematics of the USSR–Sbornik*, **55**:1 (1986), 195–205.

[16] Климов В.С., “О симметризации анизотропных интегральных функционалов”, *Известия ВУЗов. Математика*, 1999, № 8, 26–32; English transl.: Klimov V. S., “On the symmetrization of anisotropic integral functionals”, *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, **43**:8 (1999), 23–29.

[17] Климов В.С., “Симметризация функций из пространств Соболева”, *Известия ВУЗов. Математика*, 2002, № 11, 45–51; English transl.: [Klimov V. S., “Symmetrization of functions from Sobolev spaces”, *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, **46**:11 (2002), 41–47.

Klimov V. S., "Isoperimetric and Functional Inequalities", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:3 (2018), 331–342.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-3-331-342

Abstract. We establish lower estimates for an integral functional

$$\int\limits_{\Omega} f(u(x), \nabla u(x))\, dx,$$

where Ω – a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$, an integrand $f(t,p)\,(t \in [0,\infty),\ p \in \mathbb{R}^n)$ – a function that is B-measurable with respect to a variable t and is convex and even in the variable p, $\nabla u(x)$ – a gradient (in the sense of Sobolev) of the function $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$. In the first and the second sections we utilize properties of permutations of differentiable functions and an isoperimetric inequality $H^{n-1}(\partial A) \geqslant \lambda(m_n A)$, that connects $(n-1)$-dimensional Hausdorff measure $H^{n-1}(\partial A)$ of relative boundary ∂A of the set $A \subset \Omega$ with its n-dimensional Lebesgue measure $m_n A$. The integrand f is assumed to be isotropic, i.e. $f(t,p) = f(t,q)$ if $|p| = |q|$. Applications of the established results to multidimensional variational problems are outlined. For functions u that vanish on the boundary of the domain Ω, the assumption of the isotropy of the integrand f can be omitted. In this case, an important role is played by the Steiner and Schwartz symmetrization operations of the integrand f and of the function u. The corresponding variants of the lower estimates are discussed in the third section. What is fundamentally new here is that the symmetrization operation is applied not only to the function u, but also to the integrand f. The geometric basis of the results of the third section is the Brunn-Minkowski inequality, as well as the symmetrization properties of the algebraic sum of sets.

Keywords: permutation, convex function, measure, gradient, symmetrization, isoperimetric inequality

On the authors:
Vladimir S. Klimov, orcid.org/0000-0001-9560-8315, Doctor of Science, P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl, 150003, Russian Federation, e-mail: VSK76@list.ru