
Динамика нейронных сетей Neural Network Dynamics

©Глызин С. Д., Марушкина Е. А., 2018

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-5-572-583

УДК 517.9

Неупорядоченные колебания в нейросети из трех осцилляторов с запаздывающей вещательной связью

Глызин С. Д., Марушкина Е. А.

получена 3 сентября 2018

Аннотация. Рассматривается модель нейронной ассоциации из трех импульсных нейронов с вещательной запаздывающей связью между ними. Учитывая, что связь вещательная, в системе отщепляется уравнение, соответствующее одному из осцилляторов. Два оставшихся импульсных нейрона взаимодействуют друг с другом, и, кроме того, имеется периодическое внешнее воздействие, определяемое вещательным нейроном. В этих условиях, при значениях параметров, близких к критическим, на устойчивом инвариантном интегральном многообразии построена нормальная форма данной системы. Эта нормальная форма сводится к четырехмерной системе, две переменные которой отвечают за амплитуды колебаний осцилляторов, а две другие определяются разностью фазовых переменных этих осцилляторов с фазовой переменной вещательного осциллятора. Полученная нормальная форма имеет инвариантное многообразие, на котором амплитудные и фазовые переменные осцилляторов совпадают. Описана динамика задачи на этом многообразии. Важный результат удалось получить на основе численного анализа нормальной формы. Оказалось, что при ослаблении связи между осцилляторами могут возникать периодические и хаотические колебательные решения. Более того, был обнаружен каскад бифуркаций, связанный с однотипными фазовыми перестройками, в котором поочередно самосимметричный устойчивый цикл теряет симметрию с возникновением двух симметричных друг другу циклов; с каждым из этих циклов происходит каскад бифуркаций удвоения с появлением симметричных хаотических режимов. Эти симметричные хаотические режимы при дальнейшем уменьшении параметра связи объединяются в самосимметричный, который затем перестраивается в самосимметричный цикл более сложного вида по сравнению с полученным на предыдущем шаге. Далее весь процесс повторяется. Для изучения хаотических аттракторов системы вычислялись ляпуновские показатели.

Ключевые слова: осциллятор, нейросеть, вещательная связь, запаздывание, устойчивость, бифуркация, хаотический аттрактор

Для цитирования: Глызин С. Д., Марушкина Е. А., "Неупорядоченные колебания в нейросети из трех осцилляторов с запаздывающей вещательной связью", *Моделирование и анализ информационных систем*, **25:5** (2018), 572–583.

Об авторах: Глызин Сергей Дмитриевич, orcid.org/0000-0002-6403-4061, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой компьютерных сетей, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

Марушкина Елена Александровна, orcid.org/0000-0001-9183-6484, канд. физ.-мат. наук, науч. сотр., Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Лаборатория дискретной и вычислительной геометрии им. Б. Н. Делоне, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: marushkina-ea@yandex.ru

Благодарности:

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-60039 мол_а_дк.

1. Постановка задачи

Проблема предсказания сложного коллективного поведения ассоциаций связанных осцилляторов различной природы является одной из актуальных задач современной нейродинамики и популяционной биологии. Сети, составленные из нескольких различным способом взаимодействующих осцилляторов, представляют собой универсальный модельный объект, находящий применение в различных областях науки и техники. В работах [1–3] построен полный набор сетей из трех элементов с различной структурой связи между ними. Среди них сеть с вещательным взаимодействием. В этой сети один из осцилляторов не зависит от двух других, но воздействует на них. Эти осцилляторы в свою очередь взаимодействуют друг с другом и получают сигнал от первого.

Математические модели взаимодействия осцилляторов предлагались в большом числе статей [4–8]. В частности, в работах [8, 9] в качестве модельной задачи для описания электрического взаимодействия цепочки импульсных нейронов была предложена следующая система дифференциально-разностных уравнений:

$$\dot{U}_j = \lambda[f(U_j(t-1)) + g(U_j(t-\theta))]U_j + D(U_{j-1} + U_{j+1} - 2U_j), \quad j = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где $U_0 \equiv U_1$, $U_{n+1} \equiv U_n$ в случае цепочки и $U_0 \equiv U_n$, $U_{n+1} \equiv U_1$ в случае кольца осцилляторов. Функции $U_j(t)$ моделируют мембранные потенциалы соответствующих нейронов, $\lambda > 0$ — параметр, отвечающий за скорость протекания процессов в системе, параметр $D > 0$ определяет силу диффузионной связи между осцилляторами, достаточно гладкие функции $f(U(t-1))$, $g(U(t-\theta))$, $\theta > 0$ моделируют ионную проводимость мембраны нервной клетки для разных типов ионов. Функции $f(U)$ и $g(U)$ обладают следующими предельными свойствами: $f(0) = 1$, $g(0) = 0$ и $f(u) \rightarrow -a$ ($a > 0$), $g(u) \rightarrow 1$ при $u \rightarrow +\infty$. Рассмотрим систему (1) в случае трех ($n = 3$) осцилляторов и будем считать, что они связаны между собой вещательным образом:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \lambda[f(U_1(t-1)) + g(U_1(t-\theta))]U_1, \\ \dot{U}_2 &= \lambda[f(U_2(t-1)) + g(U_2(t-\theta))]U_2 + D(U_1 + U_3 - 2U_2), \\ \dot{U}_3 &= \lambda[f(U_3(t-1)) + g(U_3(t-\theta))]U_3 + D(U_1 + U_2 - 2U_3). \end{aligned} \quad (2)$$

Обычно системы (1) или (2) рассматриваются в предположении, что λ велико. Однако в настоящей работе мы изучим ситуацию с помощью локальных методов. Возможность аналитического асимптотического исследования системы (2) имеется при условии близости ее параметров к критическим в задаче об устойчивости состояния равновесия системы (2).

Предполагая дополнительно, что $f'(0) = -1$, $g'(0) = 0$, и полагая, что в цепи связи имеется дополнительное запаздывание (см. также [10, 11]), приходим к задаче, близкой к системе, состоящей из трех уравнений Хатчинсона [12] с запаздывающей вещательной связью:

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= \lambda[1 - N_1(t-1)]N_1, \\ \dot{N}_2 &= \lambda[1 - N_2(t-1)]N_2 + D(N_1(t-h) + N_3(t-h) - 2N_2), \\ \dot{N}_3 &= \lambda[1 - N_3(t-1)]N_3 + D(N_1(t-h) + N_2(t-h) - 2N_3). \end{aligned} \quad (3)$$

В этой задаче $N_j(t)$, $j = 1, 2, 3$ можно интерпретировать как плотности численности трех близких популяций, $\lambda > 0$ — мальтузианский коэффициент линейного роста. Величина $D > 0$ отвечает за интенсивность взаимодействия между популяциями. Параметр $h > 0$ представляет собой запаздывание в цепи связи. Всюду далее предполагается, что связь между популяциями слабая, т.е. параметр D мал. Отметим, что влияние запаздывания в цепи связи между осцилляторами рассматривалось также в статьях [10, 11].

Система (3) моделирует ситуацию, когда популяции слабо связаны между собой, например, разделены географически. При этом одна из популяций может влиять на обе оставшиеся, которые в свою очередь способны влиять друг на друга, но не влияют на первую.

Уравнение Хатчинсона, впервые предложенное в [12], является простейшим способом учета возрастной структуры в задаче о динамике популяции особей, борющихся за общую пищу. Изучению уравнения Хатчинсона посвящено большое количество публикаций, в частности, задача диффузионного взаимодействия осцилляторов типа уравнения Хатчинсона исследовалась в [4, 13, 14]. В настоящей работе изучается динамика системы из трех уравнений Хатчинсона со слабой вещательной связью между ними. Локальная динамика трех осцилляторов общего вида, связанных вещательным образом без запаздывания, рассмотрена в [15]. В настоящей работе исследуется влияние запаздывания, введенного в цепь связи, на динамику изучаемой системы.

Сдвинемся в системе (3) в единичное состояние равновесия $N_j = 1 + u_j$, параметр λ выберем равным $\pi/2 + \varepsilon$, где ε — малый положительный параметр, а параметр связи D предполагается пропорциональным малому параметру $D = \varepsilon d$, $d > 0$ — величина порядка единицы. В результате получим систему

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)u_1(t-1)(1+u_1), \\ \dot{u}_2 &= -\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)u_2(t-1)(1+u_2) + \varepsilon d(u_1(t-h) + u_3(t-h) - 2u_2), \\ \dot{u}_3 &= -\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)u_3(t-1)(1+u_3) + \varepsilon d(u_1(t-h) + u_2(t-h) - 2u_3), \end{aligned} \quad (4)$$

в которой при $\varepsilon = 0$ в спектре устойчивости имеется пара чисто мнимых собственных чисел $\mu = \pm i\pi/2$ кратности 3, которой соответствуют три линейно независимые собственные функции.

При помощи локального асимптотического анализа и иллюстрирующего его численного эксперимента изучим периодические, квазипериодические и хаотические решения системы (4).

2. Построение нормальной формы

Учитывая, что в рассматриваемой системе (4) выбрана вещательная структура связи между осцилляторами, первый элемент системы односторонним образом воздействует на два других, которые, в свою очередь, взаимодействуют друг с другом. В силу этого, рассмотрим первое уравнение системы (4) отдельно от двух оставшихся. Устойчивое периодическое решение первого уравнения имеет следующую асимптотику:

$$u_1(t) = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\frac{40}{3\pi - 2}} \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \frac{2}{3\pi - 2}\right)t + c\right) + \varepsilon \frac{4\sqrt{5}}{3\pi - 2} \cos\left(\left(\pi - \varepsilon \frac{4}{3\pi - 2}\right)t - \gamma + 2c\right) + O(\varepsilon^{3/2}), \quad (5)$$

где $\gamma = \arctan(1/2)$, а c — произвольная константа (см., например, [16]).

Для дальнейшего локального анализа воздействия друг на друга осцилляторов u_2 и u_3 применим стандартный метод нормальных форм [16]. Воспользуемся заменой:

$$u_j(t) = \sqrt{\varepsilon}(z_j(\tau)e^{i\frac{\pi}{2}t} + \bar{z}_j(\tau)e^{-i\frac{\pi}{2}t}) + \varepsilon u_{j1}(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} u_{j2}(t, \tau) + \dots, \quad (6)$$

где $z_j(\tau)$, ($j = 2, 3$) — комплекснозначные функции медленного времени $\tau = \varepsilon t$, которые определяются из условий разрешимости соответствующих задач в классе периодических функций.

Учитывая разложение

$$z_j(\tau - \varepsilon) = z_j(\tau) - \varepsilon z'_j(\tau) + \dots,$$

а также асимптотику (5), на третьем шаге алгоритма из условий разрешимости задач для $u_{j2}(t, \tau)$ в классе 4-периодических по t функций получаем следующую нормальную форму:

$$\begin{aligned} \left(1 + i\frac{\pi}{2}\right) z'_2 &= iz_2 + \frac{(1 - 3i)\pi}{10} z_2 |z_2|^2 + d \left(z_1 e^{-i\frac{\pi}{2}h} + z_3 e^{-i\frac{\pi}{2}h} - 2z_2\right), \\ \left(1 + i\frac{\pi}{2}\right) z'_3 &= iz_3 + \frac{(1 - 3i)\pi}{10} z_3 |z_3|^2 + d \left(z_1 e^{-i\frac{\pi}{2}h} + z_2 e^{-i\frac{\pi}{2}h} - 2z_3\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Перейдем в системе (7) к полярным переменным. Для этого выполним замены $z_j = \sqrt{\frac{10}{3\pi - 2}} \xi_j e^{i\varphi_j}$ и $\tau = \frac{2\pi}{\pi^2 + 4} s$, $j = 1, 2, 3$ и введем ряд обозначений: $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$, $\beta = \varphi_3 - \varphi_1$ и $h^* = \pi h/2$. В итоге получим нормальную форму, записанную в амплитудных и фазовых переменных:

$$\begin{aligned} \xi'_2 &= \xi_2 - \xi_2^3 + d^* \left(\cos(\alpha - \delta^*) + \xi_3 \cos(\beta - \alpha + \delta^*) - 2\xi_2 \cos(\delta^* + h^*)\right), \\ \xi'_3 &= \xi_3 - \xi_3^3 + d^* \left(\cos(\beta - \delta^*) + \xi_2 \cos(\beta - \alpha - \delta^*) - 2\xi_3 \cos(\delta^* + h^*)\right), \\ \alpha' &= b(1 - \xi_2^2) - d^* \left(\frac{1}{\xi_2} \sin(\alpha - \delta^*) - \frac{\xi_3}{\xi_2} \sin(\beta - \alpha + \delta^*) + 2 \sin(\delta^* + h^*)\right), \\ \beta' &= b(1 - \xi_3^2) - d^* \left(\frac{1}{\xi_3} \sin(\beta - \delta^*) + \frac{\xi_2}{\xi_3} \sin(\beta - \alpha - \delta^*) + 2 \sin(\delta^* + h^*)\right), \end{aligned} \quad (8)$$

где $b = (\pi + 6)/(3\pi - 2)$, $d^* = d\sqrt{\pi^2 + 4}/\pi$, $\delta^* = -\arctan(\pi/2) - h^*$. (Подробное изложение процесса перехода к амплитудным и фазовым переменным приведено в работе [17]).

Отметим, что для построенной нормальной формы (7) имеет место теорема о соответствии ее грубых режимов решениям исходной системы (4) той же устойчивости с асимптотикой (5), (6) (см., например, [16]). Однако в случае, если система (7) обнаруживает сложное хаотическое поведение, такую теорему обосновать не удастся. В связи с этим, кроме аналитических методов исследования уместно применение численного анализа сложных неупорядоченных колебательных режимов, реализующихся в рассматриваемой системе.

3. Некоторые частные случаи. Анализ редуцированной системы

Рассмотрим частный случай однонаправленного воздействия одного осциллятора u_1 на другой (u_2 или u_3). В полученной нормальной форме (8) инвариантному многообразию $u_2 = u_3$ исходной системы (4) соответствует плоскость, заданная равенствами $\xi_2 = \xi_3$, $\alpha = \beta$. На этой плоскости система (8) приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi(1 + d^* \cos \delta^* - 2d^* \cos(\delta^* + h^*) - \xi^2) + d^* \cos(\alpha - \delta^*), \\ \alpha' &= b(1 - \xi^2) - d^* \left(\frac{1}{\xi} \sin(\alpha - \delta^*) - \sin \delta^* + 2 \sin(\delta^* + h^*) \right), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\xi = \xi_2 = \xi_3$.

В работе [17] найдены состояния равновесия редуцированной системы (9) и условия их устойчивости. Кроме того, описана последовательность бифуркаций, происходящих на фазовом цилиндре системы (9) при уменьшении параметра d^* . В случае $h = 0$ показано, что при значениях параметра $d^* > d_0 \approx 1.1599$ глобально устойчивым является единственное, с точностью до добавки к переменной α периода, состояние равновесия $(1, 0)^T$. При $d^* = d_0$ рождается пара состояний равновесия, одно из которых устойчиво, а второе — неустойчиво. В дальнейшем при уменьшении значения параметра d^* до критического $d_1 \approx 1.0033$ неустойчивая неподвижная точка сливается с состоянием равновесия $(1, 0)^T$ и отбирает его устойчивость. При значении $d_{кр.} \approx 0.8536$ с устойчивым состоянием равновесия происходит бифуркация Андронова–Хопфа и оно теряет устойчивость с рождением устойчивого цикла. При дальнейшем уменьшении параметра d^* родившийся устойчивый цикл увеличивается в размерах и при значении $d_S \approx 0.6717$ сливается с петлей сепаратрисы седловой точки $(1, 0)^T$ и исчезает. При значениях $0 < d^* < 0.6717$ система имеет одно устойчивое состояние равновесия и пару неустойчивых неподвижных точек.

Также в статье [17] показано, что при относительно малых положительных значениях параметра h^* сценарий фазовых перестроек качественно не меняется. Отличия от изложенного выше сценария заключаются лишь в следующем: родившийся в результате бифуркации Андронова–Хопфа устойчивый цикл сливается с петлей сепаратрисы седловой точки $(1, 0)^T$ и при этом рождается цикл, охватывающий фазовый цилиндр. Это означает, что у системы (9) имеется устойчивое решение с периодической амплитудной переменной $\xi(t)$ и бегущей фазовой переменной $\alpha(t)$. При дальнейшем уменьшении параметра d^* цикл, охватывающий фазовый цилиндр, исчезает, и остается устойчивым лишь одно состояние равновесия.

Учитывая утверждение о соответствии между грубыми режимами нормальной формы и исходной задачи, найденная у нормальной формы (9) особенность, состоящая в наличии цикла с бегущей фазовой переменной, соответствует тому, что у системы (4) при $h \neq 0$ могут существовать двухчастотные колебания с набегом рассогласования фазы между ведущим и ведомыми осцилляторами.

4. Численный анализ неупорядоченных колебательных режимов

Система (8) при отсутствии вещающего осциллятора ($u_1(t) \equiv 0$) сводится к трехмерной и подробно изучена в работах [4, 13]. При изменении бифуркационного параметра d^* в ней происходят фазовые перестройки, не связанные с хаотическим поведением. Наличие вещающего осциллятора и запаздывания в цепи связи приводит к тому, что в системе реализуются сложные неупорядоченные колебательные режимы. Как было отмечено ранее, если система (7) обнаруживает сложное хаотическое поведение, то стандартное утверждение о соответствии ее грубых режимов решениям исходной системы (4) обосновать не удастся. В связи с этим уместно применение численных методов исследования динамики рассматриваемых систем.

Перейдем к описанию полученных результатов.

Хорошее представление о фазовых перестройках, происходящих в системе (8), может дать зависимость старшего ляпуновского показателя λ_{max} от значения бифуркационного параметра d^* (см. [18]). Выберем значение $h^* = 0.5$ и приведем графики зависимости показателя λ_{max} от d^* на различных интервалах его изменения.

На рис. 1 видно, что промежутки с хаотическим поведением решений несколько раз сменяют периодические.

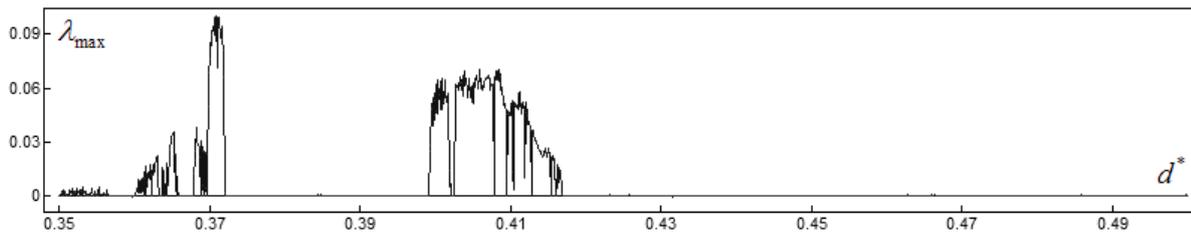


Рис. 1. Зависимость старшего ляпуновского показателя λ_{max} от параметра d^* на отрезке $[0.35; 0.5]$

Fig. 1. The dependence of the maximal Lyapunov exponent λ_{max} from the parameter d^* at interval $[0.35; 0.5]$

На рис. 2 и рис. 3 приведены увеличенные фрагменты отрезка $[0.35; 0.5]$, представляющие наибольший интерес для численного исследования.

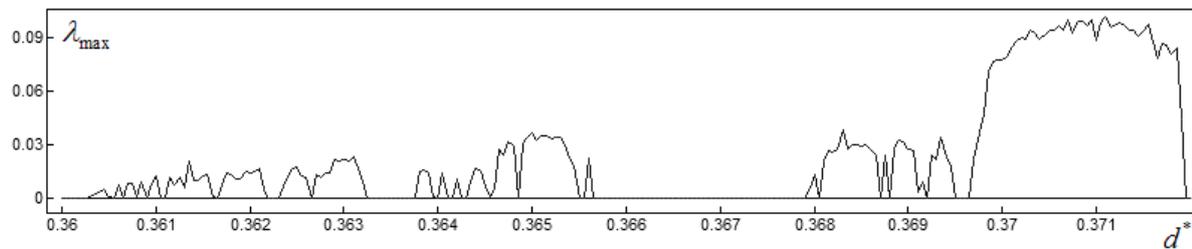


Рис. 2. Зависимость старшего ляпуновского показателя λ_{max} от параметра d^* на отрезке $[0.36; 0.372]$

Fig. 2. The dependence of the maximal Lyapunov exponent λ_{max} from the parameter d^* at interval $[0.36; 0.372]$

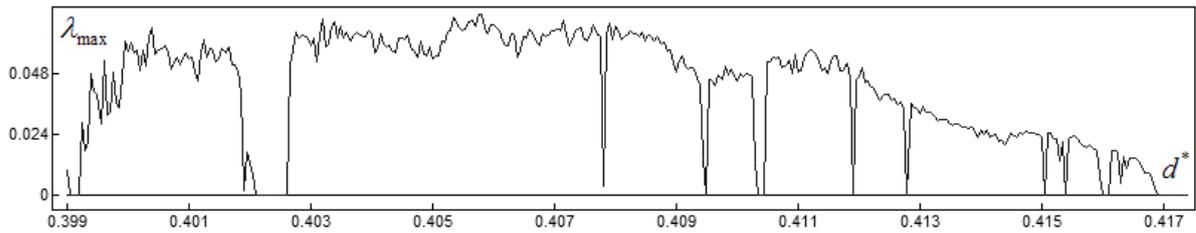


Рис. 3. Зависимость старшего ляпуновского показателя λ_{max} от параметра d^* на отрезке $[0.399; 0.42]$

Fig. 3. The dependence of the maximal Lyapunov exponent λ_{max} from the parameter d^* at interval $[0.399; 0.42]$

Перейдем теперь к более подробному описанию общего сценария фазовых перестроек. Зафиксируем значение запаздывания $h^* = 0.5$, тогда параметр δ^* оказывается равен $\delta^* \approx -1.50365$. Отметим, что величина оставшегося параметра системы (8) не зависит от h и равна $b \approx 1.23122$. На рис. 4–8 представлены проекции траекторий системы (8) на плоскость $\xi_1 O \xi_2$. При уменьшении бифуркационного параметра d^* , в системе (8) наблюдаются следующие фазовые перестройки:

1. При $d^* > d_1 \approx 0.622$ глобально устойчиво состояние равновесия.
2. При $d^* = d_1$ от состояния равновесия ответвляется самосимметричный устойчивый цикл (бифуркация Андронова–Хопфа) (см. рис. 4).

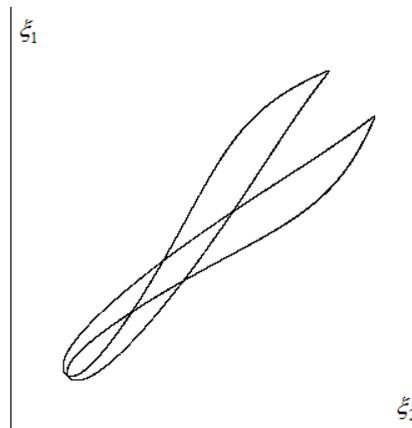


Рис. 4. Самосимметричный устойчивый цикл при $d^* = 0.465$

Fig. 4. Self-symmetric stable cycle at $d^* = 0.465$

3. При $d^* = d_2 \approx 0.435$ указанная симметрия цикла теряется, он расщепляется на два симметричных цикла (бифуркация потери симметрии) (см. рис. 5).
4. При $d^* = d_{31} \approx 0.418$; $d_{32} \approx 0.4172$; ...; $d_{3\infty} \approx 0.415$ с каждым из циклов происходят бифуркации удвоения периода (см. рис. 6). В результате при $d^* < d_{3\infty}$ имеем два симметричных странных аттрактора, возникших по фейгенбаумовскому сценарию (см. рис. 7).

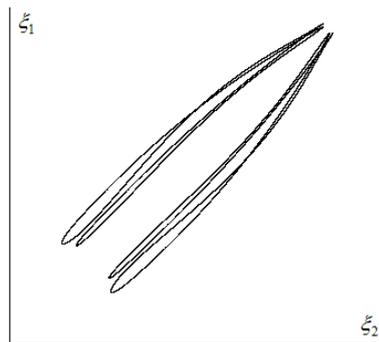
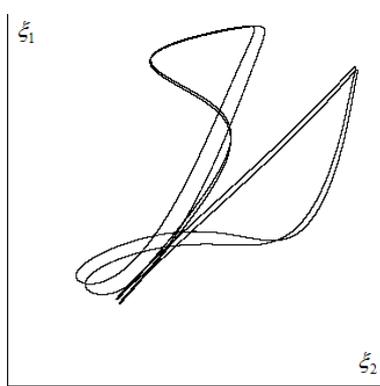
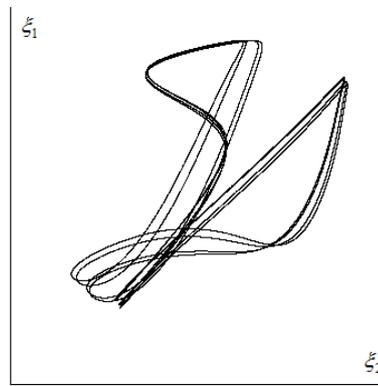


Рис. 5. Пара симметричных циклов при $d^* = 0.43$
Fig. 5. A pair of symmetric cycles at $d^* = 0.43$



a)



b)

Рис. 6. Бифуркации удвоения периода для одного из симметричных циклов:
a) при $d^* = 0.418$; b) при $d^* = 0.417$
Fig. 6. Period doubling bifurcations for one of the symmetric cycles:
a) at $d^* = 0.418$; b) at $d^* = 0.417$

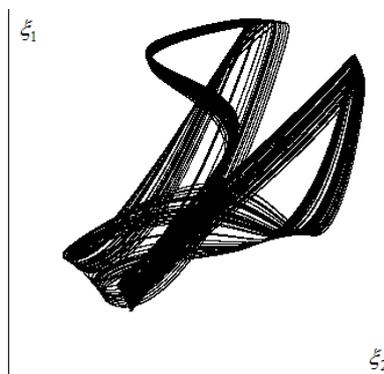


Рис. 7. Вид одного из пары симметричных странных аттракторов при $d^* = 0.415$
Fig. 7. One of a pair of symmetric strange attractors at $d^* = 0.415$

5. При $d^* = d_4 \approx 0.413$ пара симметричных странных аттракторов объединяется в один самосимметричный, который при $d^* = d_5 \approx 0.398$ превращается в самосимметричный двухобходный цикл (см. рис. 8).

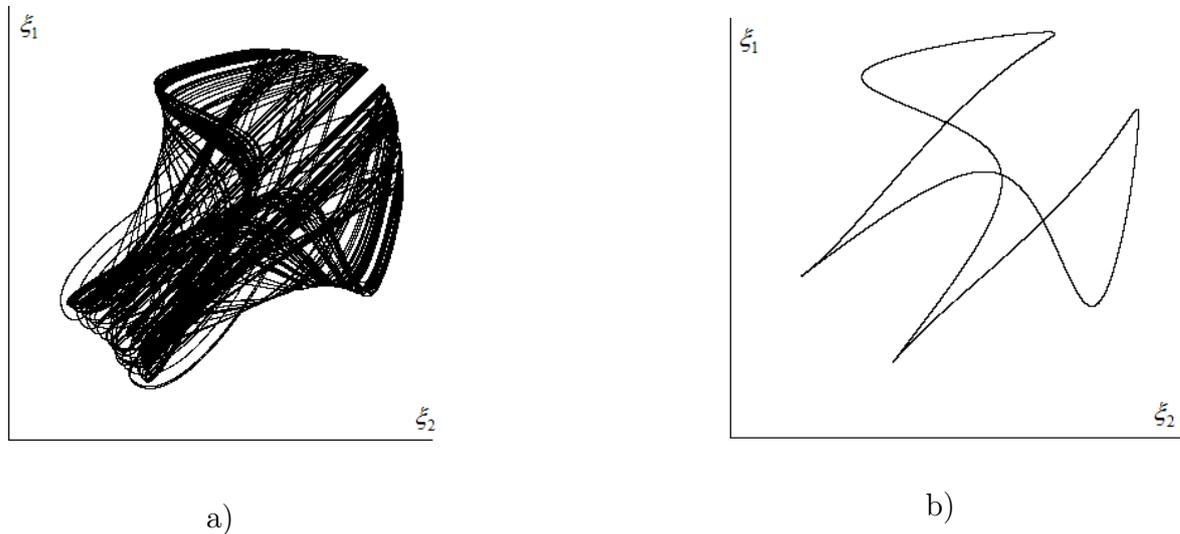


Рис. 8. а) Самосимметричный хаотический аттрактор при $d^* = 0.413$;

б) Самосимметричный двухобходный цикл при $d^* = 0.398$

Fig. 8. a) Self-symmetric chaotic attractor at $d^* = 0.413$;

b) Self-symmetric double-pass cycle at $d^* = 0.398$

6. При уменьшении d^* процесс повторяется: теряется симметрия цикла, затем с каждым из пары родившихся циклов происходят бифуркации удвоения, завершающиеся рождением симметричных странных аттракторов и т. д.

Таким образом, получается каскад бифуркаций странных аттракторов и циклов, содержащий в себе в том числе и каскад бифуркаций удвоения периода. Отметим, что близкий сценарий фазовых перестроек ранее уже встречался и описан в работе [4] для нормальной формы (8) без вещательного осциллятора и при относительно большом b .

Отметим, что при $d^* < 0.356$ бифуркации в системе (8) связаны с фазовыми перестройками циклов и торов. При $0 < d^* < 0.328$ в фазовом пространстве системы имеется самосимметричный устойчивый цикл. При $d^* \approx 0.328$ он теряет устойчивость колебательным образом с образованием двумерного инвариантного тора. Эта бифуркация проиллюстрирована на рисунке 9.

Выполненный в работе численный эксперимент показал, что сценарии фазовых перестроек, связанные с бифуркациями сложных неупорядоченных колебаний, реализуются у системы (8) и при других значениях запаздывания h^* . Вместе с тем, область хаотического поведения, не пропадая вовсе, существенно сужается при изменении параметра h^* в ту или другую сторону.

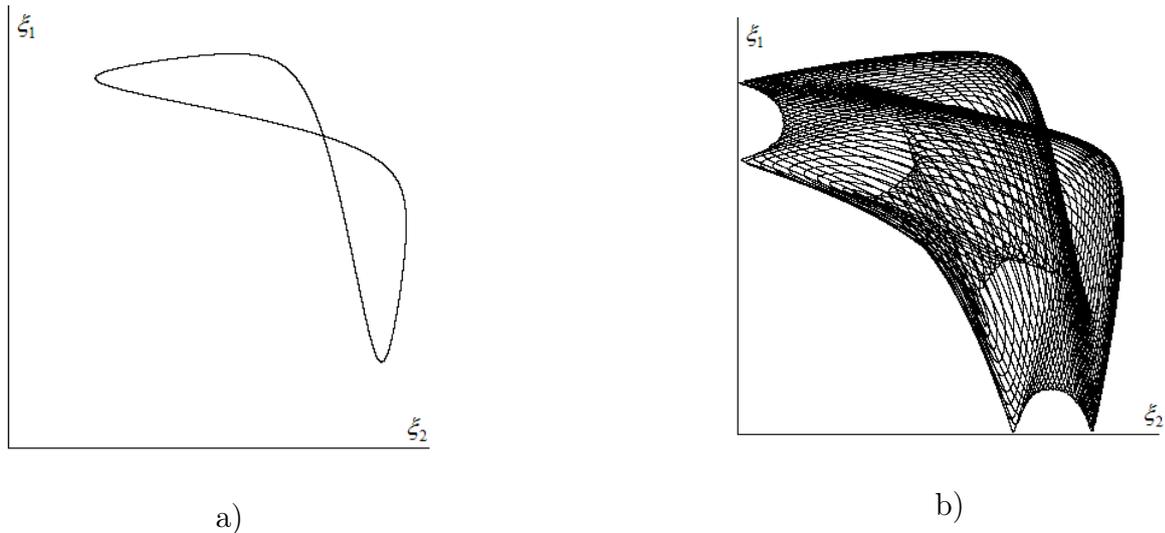


Рис. 9. а) Самосимметричный устойчивый цикл при $d^* = 0.3$; б) Тор при $d^* = 0.35$
Fig. 9. a) Self-symmetric stable cycle at $d^* = 0.3$; б) Torus at $d^* = 0.35$

5. Заключение

Рассмотренная в работе модель взаимодействия трех осцилляторов с вещательной запаздывающей связью между ними встречается в целом ряде нейродинамических и биофизических приложений. Динамические свойства нормальной формы, построенной в окрестности состояния равновесия системы при значениях параметров, близких к критическим, исследовались на основе сочетания аналитических и численных методов. Вычисление ляпуновских экспонент аттракторов нормальной формы позволило судить о сценарии фазовых перестроек, происходящих в системе, при изменении параметра связи. Наиболее примечательным является полученный на этом пути сценарий фазовых перестроек, содержащий на каждом этапе каскады бифуркаций удвоения, бифуркации расщепления сепаратрис и потери симметрии. Следует отметить, что для грубых режимов нормальной формы выполнено утверждение о соответствии, согласно которому устойчивому циклу (тору) нормальной формы соответствует двумерный тор (тор на единицу более высокой размерности) у исходной системы. В случае хаотических колебаний это утверждение, вообще говоря, не выполнено. Остается открытым интересный вопрос о сохранении у исходной системы самого каскада фазовых перестроек, наблюдаемого у нормальной формы.

Список литературы / References

- [1] Alon U., "Network motifs: theory and experimental approaches", *Nature Reviews Genetics*, **8:6** (2007), 450–461.
- [2] Milo R., Shen-Orr S., Itzkovitz S., et al., "Network motifs: Simple Building Blocks of Complex Networks", *Science*, **298**:5594 (2002), 824–827.
- [3] Yechiam Yemini, *The Topology of Biological Networks*, Computer Science Department, Columbia University, 2004.
- [4] Глызин С. Д., "Динамические свойства простейших конечноразностных аппроксимаций краевой задачи «реакция-диффузия»", *Дифференциальные уравнения*, **33:6**

- (1997), 805–811; English transl.: Glyzin S. D., “Dynamical properties of the simplest finite-difference approximations of the ”reaction-diffusion” boundary value problem”, *Differential Equations*, **33**:6 (1997), 808–814.
- [5] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “О явлениях хаоса в кольце из трех односторонне связанных генераторов”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **46**:10 (2006), 1809 – 1821; English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Chaos Phenomena in a Circle of Three Unidirectionally Connected Oscillators”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **46**:10 (2006), 1724 – 1736.
- [6] Глызин С. Д., “Поведение решений нормальной формы системы трех связанных разностных автогенераторов”, *Модел. и анализ информ. систем*, **13**:1 (2006), 49 – 57; [Glyzin S. D., “Solutions behavior of the normal form of a system of three coupled difference oscillators”, *Model. Anal. Inform. Syst.*, **13**:1 (2006), 49 – 57, (in Russian)].
- [7] Глызин С. Д., “Разностные аппроксимации уравнения «реакция-диффузия» на отрезке”, *Модел. и анализ информ. систем*, **16**:3 (2009), 96 – 116; [Glyzin S. D., “Difference approximations of “reaction–diffusion” equation on a segment”, *Model. Anal. Inform. Syst.*, **16**:3 (2009), 96 – 116, (in Russian)].
- [8] Глызин С. Д., “Релаксационные колебания электрически связанных нейроподобных осцилляторов с запаздыванием”, *Модел. и анализ информ. систем*, **17**:2 (2010), 28 – 47; [Glyzin S. D., “Relaxation oscillations of electrically coupled neuron-like systems with delay”, *Model. Anal. Inform. Syst.*, **17**:2 (2010), 28 – 47, (in Russian)].
- [9] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов”, *Успехи математических наук*, **70**:3(423) (2015), 3–76; English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Self-excited relaxation oscillations in networks of impulse neurons”, *Russian Math. Surveys*, **70**:3 (2015), 383–452.
- [10] Глызин С. Д., Киселева Е. О., “Учет запаздывания в цепочке связи между осцилляторами”, *Модел. и анализ информ. систем*, **17**:2 (2010), 133–143; [Glyzin S. D., Kiseleva E. O., “The account of delay in a connecting element between two oscillators”, *Model. Anal. Inform. Syst.*, **17**:2 (2010), 133–143 (in Russian)].
- [11] Глызин С. Д., Солдатова Е. А., “Фактор запаздывания и десинхронизация колебаний связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо”, *Модел. и анализ информ. систем*, **17**:3 (2010), 134–143; [Glyzin S. D., Soldatova E. A., “The factor of delay in a system of coupled oscillators FitzHugh–Nagumo”, *Model. Anal. Inform. Syst.*, **17**:3 (2010), 134–143, (in Russian)].
- [12] Hutchinson G. E., “Circular causal system in ecology”, *Ann. N.-Y. Acad. Sci.*, **50** (1948), 221–246.
- [13] Глызин С. Д., “Стационарные режимы одной конечноразностной аппроксимации уравнения Хатчинсона с диффузией”, *Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений*, 1986, 112–127; [Glyzin S. D., “Statsionarnyye rezhimy odnoy konechnoraznostnoy approksimatsii uravneniya Khatchinsona s diffuziyey”, *Kachestvennyye i priblizhennyye metody issledovaniya operatornykh uravneniy*, 1986, 112–127, (in Russian)].
- [14] Глызин С. Д., “Учет возрастных групп в уравнении Хатчинсона”, *Модел. и анализ информ. систем*, **14**:3 (2007), 29–42; [Glyzin S. D., “A registration of age groups for the Hutchinson’s equation”, *Model. Anal. Inform. Syst.*, **14**:3 (2007), 29–42, (in Russian)].
- [15] Толбей А. О., “Локальная динамика трех осцилляторов со связью вещательного типа”, *Модел. и анализ информ. систем*, **19**:3 (2012), 105–112; [Tolbey A. O., “Local Dynamics of Three Coupled Oscillators with a Feedback Loop”, *Model. Anal. Inform. Syst.*, **19**:3 (2012), 105–112, (in Russian)].
- [16] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., *Локальные методы анализа динамических систем*, ЯрГУ, Ярославль, 2006, 92 с.; [Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., *Lokalnye metody analiza dinamicheskikh sistem*, Yaroslavl State University, Yaroslavl, 2006, 92 pp., (in Russian)].
- [17] Марушкина Е. А., “Периодические и квазипериодические решения в системе трех уравнений Хатчинсона с запаздывающей вещательной связью”, *Модел. и анализ информ. систем*, **25**:1 (2018), 102–111; [Marushkina E. A., “Periodic and Quasiperiodic

Solutions in the System of Three Hutchinson Equations with a Delayed Broadcast Connection”, *Model. Anal. Inform. Syst.*, **25**:1 (2018), 102–111, (in Russian)].

- [18] Глызин Д. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора”, *Дифференциальные уравнения*, **41**:2 (2005), 268–273; English transl.: Glyzin D. S., Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “The dynamic renormalization method for finding the maximum lyapunov exponent of a chaotic attractor”, *Differential Equations*, **41**:2 (2005), 284–289.

Glyzin S. D., Marushkina E. A., "Disordered Oscillations in a Neural Network of Three Oscillators with a Delayed Broadcast Connection", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:5 (2018), 572–583.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-5-572-583

Abstract. A model of neural association of three pulsed neurons with a delayed broadcast connection is considered. It is assumed that the parameters of the problem are chosen near the critical point of stability loss by the homogeneous equilibrium state of the system. Because of the broadcast connection the equation corresponding to one of the oscillators can be detached in the system. The two remaining impulse neurons interact with each other and, in addition, there is a periodic external action, determined by the broadcast neuron. Under these conditions, the normal form of this system is constructed for the values of parameters close to the critical ones on a stable invariant integral manifold. This normal form is reduced to a four-dimensional system with two variables responsible for the oscillation amplitudes, and the other two, defined as the difference between the phase variables of these oscillators with the phase variable of the broadcast oscillator. The obtained normal form has an invariant manifold on which the amplitude and phase variables of the oscillators coincide. The dynamics of the problem on this manifold is described. An important result was obtained on the basis of numerical analysis of the normal form. It turned out that periodic and chaotic oscillatory solutions can occur when the coupling between the oscillators is weakened. Moreover, a cascade of bifurcations associated with the same type of phase rearrangements was discovered, where a self-symmetric stable cycle alternately loses symmetry with the appearance of two symmetrical cycles. A cascade of bifurcations of doubling occurs with each of these cycles with the appearance of symmetric chaotic regimes. With further reduction of the coupling parameter, these symmetric chaotic regimes are combined into a self-symmetric one, which is then rebuilt into a self-symmetric cycle of a more complex form compared to the cycle obtained at the previous step. Then the whole process is repeated. Lyapunov exponents were calculated to study chaotic attractors of the system.

Keywords: oscillator, neural network, broadcasting connection, delay, stability, bifurcation, chaotic attractor

On the authors:

Sergey D. Glyzin, orcid.org/0000-0002-6403-4061, Doctor, Professor, P.G. Demidov Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

Elena A. Marushkina, orcid.org/0000-0001-9183-6484, PhD, Researcher, P.G. Demidov Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: marushkina-ea@yandex.ru

Acknowledgments:

The reported study was funded by RFBR, according to the research project No. 16-31-60039 mol_a_dk.