Моделирование и анализ информационных систем. Т. 25, № 6 (2018), с. 680–691
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 25, No 6 (2018), pp. 680–691

Вычислительная геометрия
Computational Geometry

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-6-680-691

УДК 514.17+517.51+519.6

О некоторых задачах для симплекса и шара в $\mathbb{R}^n$

Невский М. В.

Поступила в редакцию 20 сентября 2018
После доработки 30 октября 2018
Принята к публикации 10 ноября 2018

Аннотация. Пусть C — выпуклое тело, S невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Через τS обозначим образ S при гомотетии относительно центра тяжести S с коэффициентом τ. Под $\xi(C;S)$ понимается минимальное $\tau > 0$, для которого C является подмножеством симплекса τS. По определению, $\alpha(C;S)$ есть минимальное $\tau > 0$, такое что C принадлежит трансляту симплекса τS. Ранее автор доказал, что справедливы равенства $\xi(C;S) = (n+1)\max\limits_{1\le j\le n+1}\max\limits_{x\in C}(-\lambda_j(x))+1$ (если $C \not\subset S$), $\alpha(C;S) = \sum\limits_{j=1}^{n+1}\max\limits_{x\in C}(-\lambda_j(x))+1$. Здесь λ_j — линейные функции, называемые базисными многочленами Лагранжа симплекса S. Они таковы, что числа $\lambda_j(x),\ldots,\lambda_{n+1}(x)$ являются барицентрическими координатами точки $x \in \mathbb{R}^n$. В предыдущих работах автора указанные формулы исследовались в ситуации, когда C представляет собой n-мерный единичный куб $Q_n = [0,1]^n$. В статье рассматривается случай, когда C есть единичный евклидов шар $B_n = \{x : \|x\| \le 1\}$, где $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$. Устанавливаются различные соотношения для $\xi(B_n;S)$ и $\alpha(B_n;S)$, а также приводится их геометрическая интерпретация. Например, если $\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \ldots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$, то $\alpha(B_n;S) = \sum\limits_{j=1}^{n+1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij}^2\right)^{1/2}$. Минимальное возможное значение каждой из величин $\xi(B_n;S)$, $\alpha(B_n;S)$ для $S \subset B_n$ равно n и соответствует правильному симплексу, вписанному в B_n. Даётся сравнение с результатами, полученными ранее для $C = Q_n$.

Ключевые слова: n-мерный симплекс, n-мерный шар, гомотетия, коэффициент поглощения

Для цитирования: Невский М. В., "О некоторых задачах для симплекса и шара в $\mathbb{R}^n$", *Моделирование и анализ информационных систем*, **25**:6 (2018), 680–691.

Об авторах:
Невский Михаил Викторович, orcid.org/0000-0002-6392-7618, доктор физ.-мат. наук, доцент,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: mnevsk55@yandex.ru

1. Определения и предварительные сведения

Начнём с основных определений и обозначений. Всюду далее $n \in \mathbb{N}$. Элемент $x \in \mathbb{R}^n$ будем записывать в виде $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Положим

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2},$$

$$B\left(x^{(0)}; \varrho\right) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^{(0)}\| \le \varrho\} \quad \left(x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, \varrho > 0\right),$$

$$B_n := B(0;1), \quad Q_n := [0,1]^n, \quad Q_n' := [-1,1]^n.$$

Пусть C — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$. Через τC обозначим результат гомотетии C относительно центра тяжести с коэффициентом τ. Для невырожденного n-мерного симплекса S введём в рассмотрение величину $\xi(C;S) := \min\{\sigma \ge 1 : C \subset \sigma S\}$. Эту величину мы называем *коэффициентом поглощения (absorption index) выпуклого тела C симплексом S*. Обозначим через $\alpha(C;S)$ минимальное $\tau > 0$, для которого выпуклое тело C принадлежит трансляту симплекса τS. Под $\operatorname{ver}(G)$ будем понимать совокупность вершин выпуклого многогранника G.

Обозначим вершины симплекса S через $x^{(j)} = \left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)$, $1 \le j \le n+1$. Матрица

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \ldots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}$$

является невырожденной. Пусть $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$. Линейные многочлены $\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \ldots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$, коэффициенты которых составляют столбцы $\mathbf{A}^{-1}$, обладают свойством $\lambda_j\left(x^{(k)}\right) = \delta_j^k$, где δ_j^k — символ Кронекера. Мы называем λ_j *базисными многочленами Лагранжа, соответствующими S*. Числа $\lambda_j(x)$ являются барицентрическими координатами точки $x \in \mathbb{R}^n$ относительно S. Симплекс S задаётся системой линейных неравенств $\lambda_j(x) \ge 0$. Подробнее о многочленах λ_j см. [3, гл. 1].

Равенство $\xi(C;S) = 1$ эквивалентно включению $C \subset S$. В [2] (см. также [3, § 1.3]) установлено, что если $C \not\subset S$, то

$$\xi(C;S) = (n+1) \max_{1 \le j \le n+1} \max_{x \in C} (-\lambda_j(x)) + 1. \tag{1}$$

Соотношение

$$\max_{x \in C} (-\lambda_1(x)) = \ldots = \max_{x \in C} (-\lambda_{n+1}(x)) \tag{2}$$

эквивалентно тому, что симплекс $\xi(C;S)S$ описан вокруг C. В случае $C = Q_n$ равенство (1) приводится к виду

$$\xi(Q_n;S) = (n+1) \max_{1 \le j \le n+1} \max_{x \in \operatorname{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) + 1,$$

а (2) сводится к соотношению

$$\max_{x \in \operatorname{ver}(Q_n)} (-\lambda_1(x)) = \ldots = \max_{x \in \operatorname{ver}(Q_n)} (-\lambda_{n+1}(x)). \tag{3}$$

Для любых C и S выполняется $\xi(C;S) \geq \alpha(C;S)$. При этом $\xi(C;S) = \alpha(C;S)$ тогда и только тогда, когда симплекс $\xi(C;S)S$ описан вокруг выпуклого тела C. Последнее равносильно соотношению (2), а для $C = Q_n$ — соотношению (3).

В [4] (см. также [3, § 1.4]) доказано равенство

$$\alpha(C;S) = \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in C}(-\lambda_j(x)) + 1, \tag{4}$$

Если $C = Q_n$, то эта формула может быть записана в более геометрическом виде:

$$\alpha(Q_n;S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)}. \tag{5}$$

Здесь $d_i(S)$ — *i-й осевой диаметр симплекса* S, представляющий собой максимальную длину отрезка, содержащегося в S и параллельного i-й координатной оси. Равенство (5) установлено в [11]. Если $S \subset Q_n$, то $d_i(S) \leq 1$, поэтому для таких симплексов (5) даёт

$$\xi(Q_n;S) \geq \alpha(Q_n;S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} \geq n. \tag{6}$$

Как ранее доказал автор (см. [2]),

$$\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|. \tag{7}$$

Из (5) и (7) следует соотношение

$$\alpha(Q_n;S) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|. \tag{8}$$

Заметим, что $\alpha(C;S)$ не меняется при параллельном переносе множеств и при $\tau > 0$ верно $\alpha(\tau C;S) = \tau\alpha(C;S)$. Поскольку куб $Q'_n = [-1,1]^n$ есть транслят куба $2Q_n$, то при замене Q_n на Q'_n из (8) получается ещё более простая формула:

$$\alpha(Q'_n;S) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|. \tag{9}$$

Положим

$$\xi_n := \min\{\xi(Q_n;S) : \ S \text{ — } n\text{-мерный симплекс}, S \subset Q_n, \ \mathrm{vol}(S) \neq 0\}.$$

Оценкам чисел ξ_n посвящены многие работы автора, а также автора и А. Ю. Ухалова (см., например, статьи [1], [2], [5], [6], [7], [8], [12] и монографию [3]). Всегда $n \leq \xi_n < n+1$. Точные значения ξ_n к настоящему моменту известны для $n = 2, 5, 9$ и бесконечной совокупности нечётных n, для каждого из которых существует матрица Адамара порядка $n+1$. При $n \neq 2$ каждое известное ξ_n равно n, а

$\xi_2 = 1 + \frac{3\sqrt{5}}{5} = 2.34\ldots$ До сих пор неизвестно, существует ли хотя бы одно чётное n со свойством $\xi_n = n$. Относительно чисел ξ_n есть и другие открытые вопросы.

В настоящей статье обсуждаются аналоги введённых выше характеристик и соотношений для симплекса и евклидова шара. Замена куба на шар делает многие рассматриваемые вопросы существенно более простыми. Однако геометрическая интерпретация отмеченных общих результатов и в этом частном случае имеет определённый интерес. Кроме того, мы отметим новые приложения базисных многочленов Лагранжа.

Числовые характеристики, связывающие симплексы с подмножествами $\mathbb{R}^n$, имеют важные приложения к оцениванию норм проекторов, возникающих при полиномиальной интерполяции функций многих переменных. Этот подход и соответствующая методология подробно описаны в [3]. В последнее время в круге этих вопросов удалось эффективно применить, кроме аналитических, и компьютерные методы (см., например, [5], [6], [8], [12]).

2. Величина $\alpha(B_n; S)$

Инрадиусом n-мерного симплекса S (inradius) называется максимальный радиус шара, содержащегося в S. Центр этого единственного максимального шара называется *инцентром S (incenter).* Граница максимального в симплексе шара — сфера, которая имеет с каждой $(n-1)$-мерной гранью единственную общую точку. Под *внешним радиусом, или циркумрадиусом S (circumradius)*, будем понимать минимальный радиус шара, содержащего S. Граница этого единственного минимального шара не обязательно содержит все вершины S. Это имеет место тогда и только тогда, когда центр минимального шара принадлежит S.

Инрадиус r и внешний радиус R симплекса S связаны *неравенством Эйлера*

$$R \geq nr. \tag{10}$$

Равенство в (10) имеет место тогда и только тогда, когда S — правильный симплекс. По поводу доказательств n-мерного неравенства Эйлера, а также его истории и обобщений см., например, [10], [13], [14].

По поводу неравенства (10) отметим аналог следующего свойства, справедливого для параллелепипедов (см. [11], [3, § 1.8]). *Пусть S — невырожденный симплекс, D, D^* — параллелепипеды в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что D^* есть результат гомотетии D с коэффициентом $\tau > 1$. Если $D \subset S \subset D^*$, то $\tau \geq n$.* Это утверждение верно и для шаров. Нетрудно видеть, что неравенство Эйлера эквивалентно следующему свойству. *Если B — шар радиуса r_1, B^* — шар радиуса r_2 и $B \subset S \subset B^*$, то $r_1 \leq nr_2$. Равенство выполняется тогда и только тогда, когда S — правильный симплекс, вписанный в B^*, а B — шар, вписанный в S.* Другая эквивалентная форма этих утверждений — приводимая ниже теорема 2 (см. замечание после её доказательства).

Пусть $x^{(1)}, \ldots, x^{(n+1)}$ — вершины, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ — базисные многочлены Лагранжа невырожденного симплекса $S \subset \mathbb{R}^n$ (см. п. 1). Через Γ_j обозначим $(n-1)$-мерную гиперплоскость, задаваемую уравнением $\lambda_j(x) = 0$, через Σ_j — $(n-1)$-мерную грань симплекса, содержащуюся в Γ_j, через h_j — высоту, опущенную из вершины $x^{(j)}$

на Γ_j, через r — инрадиус S. Пусть σ_j — $(n-1)$-мера Σ_j и $\sigma := \sum\limits_{j=1}^{n+1} \sigma_j$. Обозначим $a_j := \{l_{1j}, \ldots, l_{nj}\}$. Этот вектор ортогонален Γ_j и направлен в полупространство, содержащее вершину $x^{(j)}$. Ясно, что

$$\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \ldots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j} = (a_j, x) + l_{n+1,j} = (a_j, x) + \lambda_j(0).$$

Теорема 1. *Справедливы равенства*

$$\alpha(B_n; S) = \sum_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij}^2 \right)^{1/2}, \tag{11}$$

$$\alpha(B_n; S) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{h_j}, \tag{12}$$

$$\alpha(B_n; S) = \frac{1}{r}, \tag{13}$$

$$\alpha(B_n; S) = \frac{\sigma}{n \mathrm{vol}(S)}. \tag{14}$$

Доказательство. Получим эти попарно эквивалентные равенства, двигаясь сверху вниз. Сначала запишем

$$\alpha(B_n; S) = \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in B} (-\lambda_j(x)) + 1. \tag{15}$$

Формула (15) есть частный случай (4) в ситуации $C = B_n$. По неравенству Коши имеем $|(a_j, x)| \leq \|a_j\| \|x\|$, откуда

$$-\|a_j\| \|x\| \leq (a_j, x) \leq \|a_j\| \|x\|, \tag{16}$$

$$-\|a_j\| \|x\| - \lambda_j(0) \leq -\lambda_j(x) \leq \|a_j\| \|x\| - \lambda_j(0).$$

Так как верхняя и нижняя границы в неравенстве (16) достигаются, то

$$\max_{x \in B_n} (-\lambda_j(x)) = \max_{\|x\| \leq 1} (-\lambda_j(x)) = \|a_j\| - \lambda_j(0).$$

Поэтому

$$\alpha(B_n; S) = \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in B_n} (-\lambda_j(x)) + 1 = \sum_{j=1}^{n+1} \|a_j\| - \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(0) + 1 = \sum_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

Мы воспользовались тем, что $\sum\limits_{j=1}^{n+1} \lambda_j(0) = 1$. Поскольку $\lambda_j\left(x^{(j)}\right) = 1$, имеем

$$h_j = \mathrm{dist}\left(x^{(j)}; \Gamma_j\right) = \frac{\left|\lambda_j\left(x^{(j)}\right)\right|}{\|a_j\|} = \frac{1}{\|a_j\|} = \frac{1}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij}^2\right)^{1/2}}.$$

Следовательно,

$$\alpha(B_n;S)=\sum_{j=1}^{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij}^2\right)^{1/2}=\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{h_j}.$$

Итак, мы получили (11) и (12).

Докажем (13). Шар B есть подмножество транслята симплекса $\alpha(B_n;S)S$. Значит, транслят шара $\frac{1}{\alpha(B_n;S)}B_n$ содержится в S. Так как максимальный радиус шара, принадлежащего S, равен r, то $\frac{1}{\alpha(B_n;S)}\leq r$, т. е. $\alpha(B_n;S)\geq\frac{1}{r}$. Для получения противоположного неравенства обозначим через B' шар радиуса r, вписанный в S. Тогда шар $B_n=\frac{1}{r}B'$ содержится в некотором трансляте симплекса $\frac{1}{r}S$. По определению $\alpha(B_n;S)$ это даёт $\alpha(B_n;S)\leq\frac{1}{r}$. Стало быть, верно равенство $\alpha(B_n;S)=\frac{1}{r}$.

Наконец, для установления (14) достаточно привлечь (13) и формулу $\mathrm{vol}(S)=\frac{1}{n}\sigma r$. Последнее равенство получается из обычной формулы для объёма симплекса после разбиения S на $n+1$ симплекс, каждый из которых имеет вершину в центре вписанного шара и опирается на одну из граней Σ_j.

$\square$

Следствие 1. *Имеет место равенство*

$$\frac{1}{r}=\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{h_j}.$$

Для доказательства достаточно применить (12) и (13). Представляется интересным, что это красивое геометрическое соотношение, которое может быть получено и непосредственно, оказывается эквивалентным общей формуле для $\alpha(C;S)$ в случае, когда выпуклое тело C является евклидовым единичным шаром.

Следствие 2. *Инрадиус r и инцентр z симплекса S могут быть вычислены по формулам*

$$r=\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n+1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij}^2\right)^{1/2}},\tag{17}$$

$$z=\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n+1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij}^2\right)^{1/2}}\sum_{j=1}^{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij}^2\right)^{1/2}x^{(j)}.\tag{18}$$

Точка касания шара $B(z;r)$ с $(n-1)$-мерной гранью Σ_k симплекса S имеет вид

$$y^{(k)}=\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n+1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij}^2\right)^{1/2}}\left[\sum_{j=1}^{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij}^2\right)^{1/2}x^{(j)}-\frac{1}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ik}^2\right)^{1/2}}(l_{1k},\ldots,l_{nk})\right].\tag{19}$$

Доказательство. Равенство (17) немедленно следует из (11) и (13). Для получения (18) заметим, что

$$r=\mathrm{dist}(z;\Gamma_j)=\frac{|\lambda_j(z)|}{\|a_j\|}.$$

Так как точка z лежит строго внутри S, каждая её барицентрическая координата $\lambda_j(z)$ положительна. Поэтому $\lambda_j(z) = r\|a_j\|$. Следовательно,

$$z = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(z) x^{(j)} = r \sum_{j=1}^{n+1} \|a_j\| x^{(j)},$$

что совпадает с (18). Наконец, поскольку вектор $a_k = \{l_{1k}, \ldots, l_{nk}\}$ ортогонален грани Σ_k и направлен от неё внутрь симплекса, единственная общая точка шара $B(z;r)$ и этой грани имеет вид

$$y^{(k)} = z - \frac{r}{\|a_k\|} a_k = r \left(\sum_{j=1}^{n+1} \|a_j\| x^{(j)} - \frac{1}{\|a_k\|} a_k \right).$$

Последнее равенство равносильно (19). □

Формулу (11) интересно сравнить с формулой (9) для $\alpha(Q_n'; S)$. Так как шар B_n есть подмножество куба $Q_n' = [-1,1]^n$, то $\alpha(B_n; S) \le \alpha(Q_n'; S)$. Аналитически же это неравенство следует из оценки

$$\left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij}^2 \right)^{1/2} \le \sum_{i=1}^{n} |l_{ij}|.$$

Для произвольных $x^{(0)}$ и $\varrho > 0$ величина $\alpha\left(B(x^{(0)}; \varrho); S\right)$ может быть вычислена с помощью формул теоремы 1 и равенства $\alpha(B(x^{(0)}; \varrho); S) = \varrho\alpha(B_n; S)$.

Если $S \subset Q_n$, то все осевые диаметры $d_i(S) \le 1$. Формула (5) немедленно даёт $\alpha(Q_n; S) \ge n$. Если же для некоторого S выполняется $\alpha(Q_n; S) = n$, то каждый осевой диаметр S равен 1. Следующая теорема даёт аналоги этих утверждений для симплексов, содержащихся в шаре.

Теорема 2. *Если $S \subset B_n$, то $\alpha(B_n; S) \ge n$. Равенство $\alpha(B_n; S) = n$ выполняется тогда и только тогда, когда S — правильный симплекс, вписанный в B_n.*

Доказательство. По определению $\alpha(B_n; S)$, шар B_n содержится в трансляте симплекса $\alpha(B_n; S)S$. Поэтому некоторый транслят B' шара $\frac{1}{\alpha(B_n;S)} B_n$ есть подмножество S. Итак, $B' \subset S \subset B_n$. Так как радиус B' равен $\frac{1}{\alpha(B_n;S)}$, то для инрадиуса r и внешнего радиуса R симплекса S справедливы неравенства $\frac{1}{\alpha(B_n;S)} \le r$, $R \le 1$. Применяя неравенство Эйлера $R \ge nr$, запишем

$$\frac{1}{\alpha(B_n; S)} \le r \le \frac{R}{n} \le \frac{1}{n}, \tag{20}$$

откуда $\alpha(B_n; S) \ge n$.

Если же $\alpha(B_n; S) = n$, то левая величина в (20) совпадает с правой, значит, все неравенства в этой цепочке обращаются в равенства. Это даёт $R = 1$, $r = \frac{1}{n}$. Так как в этом случае неравенство Эйлера (10) обращается в равенство, S является правильным симплексом, вписанным в B_n. Наоборот, если S — правильный симплекс, вписанный в B_n, то для него, очевидно, $r = \frac{1}{n}$, поэтому $\alpha(B_n; S) = \frac{1}{r} = n$. □

Итак, теорема 2 следует из неравенства Эйлера (10). Фактически же эти утверждения эквивалентны. Действительно, пусть S — произвольный n-мерный симплекс, r — инрадиус, R — внешний радиус S. Обозначим через B шар радиуса R, содержащий S. Тогда некоторый транслят S' симплекса $\frac{1}{R}S$ содержится в шаре $\frac{1}{R}B = B_n$. По теореме 1, $\alpha(B_n; S')$ есть величина, обратная инрадиусу S', т. е. равна $\frac{R}{r}$. Предположим теперь, что теорема 2 верна, и применим её к симплексу $S' \subset B_n$. Это даст $\alpha(B_n; S') = \frac{R}{r} \geq n$, т. е. неравенство (10). Если же $R = nr$, то $\alpha(B_n; S') = n$. Из теоремы 2 получаем, что в этом случае S', а с ним и S являются правильными симплексами.

Как следует из (6), минимальное значение $\alpha(Q_n; S)$ для $S \subset Q_n$ также равно n. Это минимальное значение достигается на тех и только тех $S \subset Q_n$, для которых каждый осевой диаметр $d_i(S)$ равен 1. Указанным свойством обладают, например, симплексы максимального объёма в Q_n (подробнее см. [3]), но при $n > 2$ не только они.

3. Величина $\xi(B_n; S)$

В этом пункте приводится формула для коэффициента поглощения симплексом евклидова шара. Мы применяем предыдущие обозначения.

Теорема 3. *Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $\varrho > 0$. Если $B\left(x^{(0)}; \varrho\right) \not\subset S$, то*

$$\xi\left(B\left(x^{(0)}; \varrho\right); S\right) = (n+1) \max_{1 \leq j \leq n+1} \left[\varrho \left(\sum_{i=1}^n l_{ij}^2\right)^{1/2} - \sum_{i=1}^n l_{ij} x_i^{(0)} - l_{n+1,j}\right] + 1. \tag{21}$$

В частности, если $B_n \not\subset S$, то

$$\xi(B_n; S) = (n+1) \max_{1 \leq j \leq n+1} \left[\left(\sum_{i=1}^n l_{ij}^2\right)^{1/2} - l_{n+1,j}\right] + 1. \tag{22}$$

Доказательство. Применим общую формулу (1) для случая $C = B\left(x^{(0)}; \varrho\right)$. Неравенство Коши даёт

$$-\|a_j\| \|x - x^{(0)}\| \leq (a_j, x - x^{(0)}) \leq \|a_j\| \|x - x^{(0)}\|. \tag{23}$$

Для $\|x - x^{(0)}\| \leq \varrho$ имеем

$$-\varrho\|a_j\| \leq (a_j, x) - (a_j, x^{(0)}) \leq \varrho\|a_j\|,$$

$$-\lambda_j(x) = -(a_j, x) - l_{n+1,j} \leq \varrho\|a_j\| - (a_j, x^{(0)}) - l_{n+1,j}.$$

Так как верхняя и нижняя границы в неравенстве (23) достигаются, то

$$\max_{\|x - x^{(0)}\| \leq \varrho} (-\lambda_(x)) = \varrho \left(\sum_{i=1}^n l_{ij}^2\right)^{1/2} - \sum_{i=1}^n l_{ij} x_i^{(0)} - l_{n+1,j}.$$

С учётом этого

$$\xi\left(B\left(x^{(0)};\varrho\right);S\right)=(n+1)\max_{1\le j\le n+1,\|x-x^{(0)}\|\le\varrho}(-\lambda_j(x))+1=$$

$$=(n+1)\max_{1\le j\le n+1}\left[\varrho\left(\sum_{i=1}^{n}l_{ij}^2\right)^{1/2}-\sum_{i=1}^{n}l_{ij}x_i^{(0)}-l_{n+1,j}\right]+1,$$

и мы пришли к (21). Равенство (22) получается из (21) при $x^{(0)}=0$, $\varrho=1$. □

4. Равенство $\beta_n=n$. Комментарии

Теорема 4. *Если $S\subset B_n$, то $\xi(B_n;S)\ge n$. Равенство $\xi(B_n;S)=n$ выполняется тогда и только тогда, когда S — правильный симплекс, вписанный в B_n.*

Доказательство. Утверждение теоремы немедленно следует из теоремы 2 и неравенства $\xi(B_n;S)\ge\alpha(B_n;S)$. Приведём непосредственное доказательство без применения неравенства Эйлера, с помощью которого получена оценка $\alpha(B_n;S)\ge n$.

Пусть сначала S — правильный симплекс, вписанный в B_n. Тогда $\alpha(B_n;S)=n$, что равносильно тому, что инрадиус S равен $\frac{1}{n}$. Так как симплекс $\xi(B_n;S)S$ описан вокруг B_n, то $\xi(S;B_n)=\alpha(S;B_n)=n$ и выполняется соотношение (2), в котором надо взять $C=B_n$. Из (1) следует, что при любом $j=1,\dots,n+1$

$$\max_{x\in B_n}(-\lambda_j(x))=\frac{n-1}{n+1},$$

где λ_j — базисные многочлены Лагранжа симплекса S.

Пусть теперь симплекс S содержится в B_n, но не является правильным симплексом или не вписан в этот шар. Его многочлены Лагранжа обозначим через μ_j. Найдётся такой правильный симплекс S^*, вписанный в B_n, и такое k, что S принадлежит полосе $0\le\lambda_k(x)\le 1$, k-е $(n-1)$-мерные грани S и S^* параллельны и при этом S не имеет общих точек хотя бы с одной граничной гиперплоскостью этой полосы. Здесь λ_j — базисные многочлены Лагранжа симплекса S^*. Вершина $x^{(k)}$ симплекса S^* не принадлежит его k-й грани. Пусть u есть точка границы шара, наиболее удалённая от $x^{(k)}$, тогда u есть точка максимума многочлена $-\lambda_k(x)$, т. е. $-\lambda_j(u)=\frac{n-1}{n+1}$. Рассмотрим прямую, соединяющую $x^{(k)}$ и u. Обозначим через y,z и t точки пересечения этой прямой с попарно параллельными гиперплоскостями $\mu_k(x)=1$, $\mu_k=0$ и $\lambda_k(x)=0$ соответственно. Выполняются неравенства

$$\|x^{(k)}-t\|\ge\|y-z\|,\quad \|t-u\|\le\|z-u\|,\tag{24}$$

хотя бы одно из которых наверняка строгое. В силу линейности базисных многочленов Лагранжа справедливы соотношения

$$\frac{\mu_k(z)-\mu_k(u)}{\mu_k(y)-\mu_k(z)}=\frac{\|z-u\|}{\|y-z\|},\quad \frac{\lambda_k(t)-\lambda_k(u)}{\lambda_k\left(x^{(k)}\right)-\lambda_k(t)}=\frac{\|t-u\|}{\|x^{(k)}-t\|}.$$

Поскольку $\mu_k(y)=1,\mu_k(z)=0,\lambda_k\left(x^{(k)}\right)=1,\lambda_k(t)=0$, имеем

$$-\mu_k(u)=\frac{\|z-u\|}{\|y-z\|}>\frac{\|t-u\|}{\|x^{(k)}-t\|}=-\lambda_k(u)=\frac{n-1}{n+1}.$$

Мы применили неравенства (24) и учли, что хотя бы одно из них является строгим. По формуле (1)

$$\xi(B_n; S) = (n+1) \max_{1\le j\le n+1} \max_{x\in B_n}(-\mu_j(x)) + 1 \ge (n+1)(-\mu_k(u)) + 1 > n.$$

Значит, если S не является правильным симплексом, вписанным в B_n, то имеет место строгое неравенство $\xi(B_n; S) > n$.

Таким образом, для любого симплекса $S \subset B_n$ выполняется $\xi(B_n; S) \ge n$. Равенство здесь эквивалентно тому, что S — правильный симплекс, вписанный в B_n. □

По аналогии с величиной $\xi_n = \min\{\xi(Q_n; S) : S \subset Q_n\}$, определяемой через единичный куб $Q_n = [0,1]^n$, введём в рассмотрение числовую характеристику, задаваемую единичным шаром:

$$\beta_n := \min\{\xi(B_n; S) : S — n\text{-мерный симплекс}, S \subset B_n,\ \mathrm{vol}(S) \ne 0\}.$$

Многие задачи о числах ξ_n ещё не решены. Например, единственным точным значением ξ_n для чётного n до сих пор остаётся $\xi_2 = 1 + \frac{3\sqrt{5}}{5}$, да и оно было найдено весьма непростым способом (см. [3, гл. 2]). По сравненению с ξ_n задача о числах β_n оказывается тривиальной.

Следствие 3. *Для любого n справедливо $\beta_n = n$. Экстремальным относительно β_n симплексом $S \subset B_n$ является любой правильный симплекс, вписанный в B_n. Других экстремальных симплексов нет.*

Достаточно применить теорему 4. Техника, связанная с шаром, позволяет проиллюстрировать некоторые результаты, полученные ранее для куба. Отметим здесь доказательство следующего известного утверждения, отличное от приведённых в [3, § 3.2] и [12].

Следствие 4. *Пусть существует матрица Адамара порядка $n+1$. Тогда $\xi_n = n$.*

Доказательство. Известно (см., например, [9]), что для такого и только такого n в Q_n можно вписать правильный симплекс S так, что вершины симплекса будут находиться в вершинах куба. Обозначим через B шар с центром в центре куба и радиусом $\frac{\sqrt{n}}{2}$. Очевидно, куб Q_n вписан в B, поэтому и симплекс S вписан в этот шар. Так как S является правильным, то по теореме 4 и из соображений подобия имеем $\xi(B; S) = n$. Включение $Q_n \subset B$ означает, что $\xi(Q_n; S) \le \xi(B; S)$, т. е. $\xi(Q_n; S) \le n$. В силу (6) выполнено и противоположное неравенство $\xi(Q_n; S) \ge n$, поэтому $\xi(Q_n; S) = n$. Одновременно из (6) следует, что $\xi_n = \xi(Q_n; S) = n$. □

Это рассуждение базируется на том, что если S — правильный симплекс, вершины которого находятся в вершинах Q_n, то симплекс nS поглощает не только Q_n, но и шар B, описанный вокруг куба. При этом коэффициент поглощения n оказывается минимально возможным и для куба, и для шара. Дополнительно отметим такое свойство.

Следствие 5. *Пусть $S \subset Q_n \subset nS$, причём симплекс S не является правильным. Тогда $B \not\subset nS$.*

Доказательство. Включение $B \subset nS$ означало бы, что $\xi(B;S) = n$. Тогда S был бы правильным симплексом, вписанным в шар B, однако это не так. Поэтому B не является подмножеством nS. □

Симплексы, удовлетворяющие условию следствия 5, существуют по крайней мере при $n = 3, 5$ и 9 (см. [12]).

Соотношения (6) означают, что всегда $\xi_n \geq n$. Поскольку $\xi_2 = 1 + \frac{3\sqrt{5}}{5} > 2$, существуют n, для которых $\xi_n > n$. Кроме ситуаций, когда $n+1$ есть число Адамара, равенство $\xi_n = n$ установлено при $n = 5$ и $n = 9$ (экстремальные симплексы в $\mathbb{R}^5$ и $\mathbb{R}^9$ найдены в [12]). Для всех таких размерностей $\xi_n = \beta_n$, т. е. с точки зрения минимального коэффициента поглощения находящимся внутри симплексом оба множества — n-мерный куб и n-мерный шар — ведут себя одинаково.

Равенство $\xi_n = n$ равносильно существованию симплексов, удовлетворяющих включениям $S \subset Q_n \subset nS$. Некоторые свойства таких симплексов (например, то, что центр тяжести S совпадает с центром куба) аналогичны свойствам правильных симплексов, вписанных в B_n (см. [7]). Однако вопрос о полном описании тех размерностей n, для которых существуют симплексы с таким условием, является весьма трудным и пока далёк от решения.

Список литературы / References

[1] Невский М. В., “Об одном соотношении для минимальной нормы интерполяционного проектора”, *Модел. и анализ информ. систем*, **16**:1 (2009), 24–43; [Nevskij M. V., “On a certain relation for the minimal norm of an interpolational projection”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **16**:1 (2009), 24–43, (in Russian).]

[2] Невский М. В., “Об одном свойстве n-мерного симплекса”, *Матем. заметки*, **87**:4 (2010), 580–593; English transl.: Nevskii M. V., “On a property of n-dimensional simplices”, *Math. Notes*, **87**:4 (2010), 543–555.

[3] Невский М. В., *Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции*, Ярославль: Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, 2012; [Nevskii M. V., *Geometricheskie ocenki v polinomialnoy interpolyacii*, Yaroslavl: P. G. Demidov Yaroslavl State University, 2012, (in Russian).]

[4] Невский М. В., “О минимальном положительном гомотетическом образе симплекса, содержащем выпуклое тело”, *Матем. заметки*, **93**:3 (2013), 448–456; English transl.: Nevskii M. V., “On the minimal positive homothetic image of a simplex containing a convex body”, *Math. Notes*, **93**:3–4 (2013), 470–478.

[5] Невский М. В., Ухалов А. Ю., “О числовых характеристиках симплекса и их оценках”, *Модел. и анализ информ. систем*, **23**:5 (2016), 603–619; English transl.: Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., “On numerical charasteristics of a simplex and their estimates”, *Aut. Control Comp. Sci.*, **51**:7 (2017), 757–769.

[6] Невский М. В., Ухалов А. Ю., “Новые оценки числовых величин, связанных с симплексом”, *Модел. и анализ информ. систем*, **24**:1 (2017), 94–101; English transl.: Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., “New estimates of numerical values related to a simplex”, *Aut. Control Comp. Sci.*, **51**:7 (2017), 770–782.

[7] Невский М. В., Ухалов А. Ю., “Об n-мерных симплексах, удовлетворяющих включениям $S \subset [0,1]^n \subset nS$”, *Модел. и анализ информ. систем*, **24**:5 (2017), 578–595; [Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., “On n-Dimensional Simplices Satisfying Inclusions $S \subset [0,1]^n \subset nS$”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:5 (2017), 578–595, (in Russian).]

[8] Невский М. В., Ухалов А. Ю., "О минимальном коэффициенте поглощения для n-мерного симплекса", *Модел. и анализ информ. систем*, **25**:1 (2018), 140–150; [Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., "On Minimal Absorption Index for an n-Dimensional Simplex", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:1 (2018), 140–150, (in Russian).]

[9] Hudelson M., Klee V., Larman D., "Largest j-simplices in d-cubes: some relatives of the Hadamard maximum determinant problem", *Linear Algebra Appl.*, **241–243** (1996), 519–598.

[10] Klamkin M. S., Tsifinis G. A., "Circumradius–inradius inequality for a simplex", *Mathematics Magazine*, **52**:1 (1979), 20–22.

[11] Nevskii M., "Properties of axial diameters of a simplex", *Discrete Comput. Geom.*, **46**:2 (2011), 301–312.

[12] Nevskii M., Ukhalov A., "Perfect simplices in $\mathbb{R}^5$", *Beiträge zur Algebra und Geometrie / Contributions to Algebra and Geometry*, **59**:3 (2018), 501–521.

[13] Yang S., Wang J., "Improvements of n-dimensional Euler inequality", *Journal of Geometry*, **51** (1994), 190–195.

[14] Vince A., "A simplex contained in a sphere", *Journal of Geometry*, **89**:1–2 (2008), 169–178.

Nevskii M. V., "On Some Problems for a Simplex and a Ball in $\mathbb{R}^n$", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:6 (2018), 680–691.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-6-680-691

Abstract. Let C be a convex body and let S be a nondegenerate simplex in $\mathbb{R}^n$. Denote by τS the image of S under homothety with a center of homothety in the center of gravity of S and the ratio τ. We mean by $\xi(C;S)$ the minimal $\tau > 0$ such that C is a subset of the simplex τS. Define $\alpha(C;S)$ as the minimal $\tau > 0$ such that C is contained in a translate of τS. Earlier the author has proved the equalities $\xi(C;S) = (n+1)\max\limits_{1\le j\le n+1}\max\limits_{x\in C}(-\lambda_j(x)) + 1$ (if $C \not\subset S$), $\alpha(C;S) = \sum\limits_{j=1}^{n+1}\max\limits_{x\in C}(-\lambda_j(x)) + 1$. Here λ_j are the linear functions that are called the basic Lagrange polynomials corresponding to S. The numbers $\lambda_j(x),\ldots,\lambda_{n+1}(x)$ are the barycentric coordinates of a point $x \in \mathbb{R}^n$. In his previous papers, the author investigated these formulae in the case when C is the n-dimensional unit cube $Q_n = [0,1]^n$. The present paper is related to the case when C coincides with the unit Euclidean ball $B_n = \{x : \|x\| \le 1\}$, where $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$. We establish various relations for $\xi(B_n;S)$ and $\alpha(B_n;S)$, as well as we give their geometric interpretation. For example, if $\lambda_j(x) = l_{1j}x_1+\ldots+l_{nj}x_n+l_{n+1,j}$, then $\alpha(B_n;S) = \sum\limits_{j=1}^{n+1}\left(\sum\limits_{i=1}^n l_{ij}^2\right)^{1/2}$. The minimal possible value of each characteristics $\xi(B_n;S)$ and $\alpha(B_n;S)$ for $S \subset B_n$ is equal to n. This value corresponds to a regular simplex inscribed into B_n. Also we compare our results with those obtained in the case $C = Q_n$.

Keywords: n-dimensional simplex, n-dimensional ball, homothety, absorption index

On the authors:
Mikhail V. Nevskii, orcid.org/0000-0002-6392-7618, Doctor of Science,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: mnevsk55@yandex.ru