

УДК 517.9

Асимптотика периодических решений автономных параболических уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами и уравнений с большими коэффициентами диффузии¹

Кащенко С. А., Полстьянов А. С.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

получена 28 января 2012

Ключевые слова: асимптотика, большой параметр, периодические решения

Асимптотическими методами изучаются вопросы о существовании, структуре и устойчивости периодических решений для нелинейных систем, указанных в названии.

1. Периодические решения автономных параболических уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами

1.1. Постановка задачи и вводные замечания

На отрезке $0 \leq x \leq 1$ рассматривается параболическая краевая задача

$$\dot{u} = Du'' + F(u, \omega x), \quad (1)$$

$$u'|_{x=0} = u'|_{x=1} = 0, \quad \left(\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u' = \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (2)$$

где $u \in \mathbb{R}^m$, D — диагональная матрица с положительными элементами на главной диагонали, $F(u, \xi)$ имеет вид

$$F(u, \xi) = \sum_{j=-m_0}^{m_0} F_j(u) e^{i\omega_j \xi}, \quad (0 < m_0 < \infty, \quad F_j(u) = \overline{F_{-j}(u)}, \quad \omega_j = -\omega_{-j}, \quad \omega_0 = 0),$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (государственный контракт № 14.740.11.0873) и гранта Президента Российской Федерации (контракт № МК-3867.2011.1).

где $F_j(u) : (j = -m_0, \dots, m_0)$ аналитично по u . Основное предположение состоит в том, что параметр ω является достаточно большим, т.е. $\omega \gg 1$. Ставится вопрос о существовании и устойчивости (при достаточно больших ω) установившихся режимов краевой задачи (1), (2). Введём в рассмотрение ещё одну краевую задачу

$$\dot{v} = Dv'' + F_0(v), \quad v' \Big|_{x=0}^{x=1} = 0, \quad (3)$$

в которой

$$F_0(v) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(u, \xi) d\xi.$$

Естественно предположить, что структура установившихся режимов краевой задачи (1), (2) при достаточно больших ω определяется установившимися режимами более простой краевой задачи (3). Приведём здесь соответствующее утверждение для случая, когда краевая задача (3) имеет периодическое (по t) решение $v_0(t, x)$ периода $T_0 > 0$.

Теорема 1. *Предположим, что только один мультипликатор линеаризованной на $v_0(t, x)$ краевой задачи (3) по модулю равен 1. Тогда найдётся такое $\omega_0 > 0$, что при $\omega \geq \omega_0$ краевая задача (1), (2) имеет периодическое решение $u_0(t, x, \omega)$ периода $T_0(\omega)$, для которого*

$$\max_{t, x} |u_0(t, x, \omega) - v_0(\tau, x)|_{\mathbb{R}^m} \leq c\omega^{-1},$$

$$\tau = \left(1 + \frac{\alpha_1(\omega)}{\omega} + O(\omega^{-2})\right)t,$$

$$T_0(\omega_0) = T_0 \left(1 + \frac{\alpha_1(\omega)}{\omega} + O(\omega^{-2})\right)^{-1},$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от ω , а $\alpha_1(\omega)$ почти периодична по ω . Решения $u_0(t, x, \omega)$ и $v_0(t, x)$ краевых задач (1), (2) и (3) экспоненциально-орбитально устойчивы (в метрике фазового пространства $C(0, 1)$) или неустойчивы одновременно.

Алгоритм построения асимптотики $u_0(t, x, \omega)$ приведен ниже. Сразу отметим, что он опирается на разработанную в [1] технику построения асимптотических разложений решений сингулярно возмущенных систем.

В том случае, когда краевая задача (3) имеет состояние равновесия $v_0(x)$, ответ на вопрос о существовании состояния равновесия $u_0(x, \omega)$, близкого (при $\omega \rightarrow \infty$) к $v_0(x)$, дается по спектру оператора L_0 :

$$L_0 z \equiv Dz'' + A(x)z, \quad z' \Big|_{x=0} = z' \Big|_{x=1} = 0 \quad (A(x) = F'_0(v_0(x))).$$

Для этого достаточно, чтобы значение $z = 0$ не являлось точкой спектра L_0 . При условии, когда все собственные значения L_0 имеют отрицательные вещественные части, решение $u_0(x, \omega)$ экспоненциально устойчиво (при достаточно больших ω). Если же хотя бы одно собственное значение L_0 имеет положительную вещественную часть, то $u_0(x, \omega)$ неустойчиво.

Рассмотрим затем вопрос о периодических решениях краевой задачи (1), (2) в одном «критическом случае». Предположим, как и выше, что $v_0(x)$ — состояние равновесия (3), и оператор L_0 имеет пару чисто мнимых собственных значений $\pm i\delta_0$ ($\delta_0 > 0$), которым отвечают собственные функции $a_0(x), \bar{a}_0(x)$, а все остальные собственные значения L_0 имеют отрицательные вещественные части. Известно, что в этом случае краевая задача (3) имеет в окрестности $v_0(x)$ двумерное интегральное инвариантное многообразие V , на котором эту краевую задачу можно записать в виде системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{p} = d_0 p^3 + O(p^5), \quad \dot{\tau} = \delta_0 + O(p^2). \quad (4)$$

Напомним, что коэффициент d_0 называют первой ляпуновской величиной. Ниже предполагаем, что

$$d_0 < 0, \quad (5)$$

т.е. состояние равновесия $v_0(x)$ асимптотически устойчиво. Рассмотрим в этом случае вопрос о поведении решений краевой задачи (1), (2) (при достаточно больших ω) в окрестности состояния равновесия $u_0(x, \omega) = v_0(x) + O(\omega^{-1})$.

Введём обозначения. Пусть $b_0(x)$ — собственная функция сопряжённого к L_0 оператора, отвечающая собственному значению $-i\delta_0$. Можно считать, что

$$\langle a_0(x), b_0(x) \rangle = \int_0^1 (a(x), b(x)) dx = 1.$$

Положим затем

$$\begin{aligned} v_1(x, \omega) &= L_0^{-1} \left(\int_0^\omega (F(v_0(x), \xi) - F_0(v_0(x))) d\xi \right), \\ F'_u \left(v_0(x) + \frac{1}{\omega} v_1(x, \omega), \omega x \right) &= A_0(x, \omega x) + \omega^{-1} A_1(x, \omega x, \omega) + O(\omega^{-2}), \\ A_{00}(x, \omega) &= \int_0^\omega \left(A_0(x, \xi) - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A_0(x, s) ds \right) d\xi, \\ A_{10}(x, \omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A_1(x, \xi \omega) d\xi, \\ \alpha_0(\omega) &= \operatorname{Re} \langle (A_{00}(x, \omega) + A_{10}(x, \omega)) a_0(x), b_0 \rangle. \end{aligned}$$

Отметим, что $\alpha_0(\omega)$ почти периодически зависит от ω

Теорема 2. При сделанных выше предположениях найдётся такое $\omega > 0$, что при $\omega \geq \omega_0$ в некоторой (не зависящей от ω) окрестности $u_0(x, \omega)$ краевая задача (1), (2) имеет экспоненциально устойчивое двумерное инвариантное многообразие $V(\omega)$ ($u_0(x, \omega) \in V(\omega)$), причём на $V(\omega)$ эту краевую задачу можно записать в виде двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{1}{\omega} (\alpha_0(\omega) + O(\omega^{-1})) p + (d_0 + O(\omega^{-1})) p^3 + O(p^5), \\ \dot{\tau} &= \delta_0 + O(\omega^{-1}) + O(p^2) \end{aligned} \quad (6)$$

(выражения $O(p^5)$ и $O(p^2)$ в (6) выполняются равномерно относительно ω).

Таким образом, характер поведения (при больших ω) решений (1), (2) в окрестности $u_0(x, \omega)$ определяется состояниями равновесия системы (6). В том случае, когда $\sup \alpha_0(\omega) < 0$, все решения из окрестности $u_0(x, \omega)$ стремятся при $t \rightarrow \infty$ к $u_0(x, \omega)$. При условии $\inf \alpha_0(\omega) > 0$ состояние равновесия $u_0(x, \omega)$ неустойчиво, а устойчивым является периодическое решение

$$u_0(t, x, \omega) = v_0(x) + [-\alpha_0(\omega)(d_0\omega)^{-1}]^{1/2}(a_0(x)e^{i\tau} + \bar{a}_0(x)e^{-i\tau}) + O(\omega^{-1}),$$

$$\tau = (\delta + O(\omega^{-1}))t.$$

Если же функция $\alpha_0(\omega)$ знакопеременна, то при $\omega \rightarrow \infty$ в окрестности $u_0(t, x, \omega)$ происходит неограниченный процесс «рождения и гибели» устойчивого периодического решения и смены устойчивости состояния равновесия.

1.2. Алгоритм построения асимптотики периодического решения

Пусть выполнены условия теоремы 1. Через $y_0(t, x)$ (не равное тождественно 0) обозначим T_0 -периодическое решение сопряжённого (к линеаризованной на $v_0(t, x)$ краевой задаче) уравнения

$$\dot{y} - Dy'' - (F'_0(v_0(t, x))) \cdot y = 0, \quad y'|_{x=0} = y'|_{x=1} = 0. \quad (7)$$

Можно считать, что

$$\langle \dot{v}_0(t, x), y_0(t, x) \rangle = 1,$$

где

$$\langle v(t, x), y(t, x) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \int_0^1 (v(t, x), y(t, x)) dx dt.$$

Положим в (1), (2)

$$u = v(\tau, x, \omega) + w(\tau, x, \xi, \omega); (\xi = \omega x), \quad (8)$$

$$\tau = (1 + \omega^{-1}\alpha_1(\omega) + \omega^{-2}\alpha_2(\omega) + \dots)t, \quad (9)$$

$$v(\tau, x, \omega) = v_0(\tau, x) + \omega^{-1}v_1(\tau, x, \omega) + \dots, \quad (10)$$

$$w(\tau, x, \xi, \omega) = \omega^{-2}w_2(\tau, x, \xi, \omega) + \dots \quad (11)$$

Здесь $\alpha_j(\omega)$ ($j = 1, 2, \dots$) и каждая из функций $v_j(\tau, x, \omega)$ и $w(\tau, x, \xi, \omega)$ есть тригонометрический многочлен по переменной ω (с частотами, не зависящими от τ, x, ξ). Зависимость от τ T_0 -периодическая. Кроме того, выполняются равенства

$$\langle v_j, y_0 \rangle = 0 \quad (j = 1, 2, \dots), \quad (12)$$

$$M_\omega(w_j(\tau, x, \xi, \omega)) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots), \quad (13)$$

$$\text{где } M_\omega(\varphi(\tau, x, \xi)) = \omega^{-1} \int_0^\omega \varphi(\tau, x, \xi) d\xi.$$

Собирая коэффициенты при старшей степени ω в получающемся формальном тождестве (и учитывая, что $v_0(\tau, x)$ — решение (3)), для нахождения $w_2(\tau, x, \xi, \omega)$ получаем периодическую по τ краевую задачу

$$D \frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi^2} + \varphi_2(\tau, x, \xi) = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{\partial w_2}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\omega} = 0,$$

$$\varphi_2(\tau, x, \xi) = F(v_0(\tau, x), \xi) - F_0(v_0(\tau, x)).$$

Эта краевая задача, вообще говоря, неразрешима, поэтому, добавляя к функции $\varphi_2(\tau, x, \xi)$ слагаемое порядка $O(\omega^{-1})$, определим $w_2(\tau, x, \xi, \omega)$ как решение краевой задачи

$$D \frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi^2} + \varphi_2(\tau, x, \xi) - M_\omega(\varphi_2(\tau, x, \xi)) = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}^{\xi=\omega} = 0.$$

Отсюда и из (13) $w_2(\tau, x, \xi, \omega)$ однозначно определяется.

Собирая на втором шаге коэффициенты при ω^{-1} , получим соотношения

$$\begin{aligned} v_1 - Dv_1'' - F_0'(v_0(\tau, x))v_1 &= D \frac{\partial^2 w_3}{\partial \xi^2} + \\ &+ \left(F'(v_0(\tau, x), \xi) - F_0'(v_0(\tau, x)) \right) v_1 + \alpha_1(\omega) \dot{v}_0(\tau, x) + \alpha_1(\omega) D \frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi^2} + \\ &+ \alpha_1(\omega) \varphi_2(\tau, x, \xi) + f_1(\tau, x, \xi, \omega), \\ v_1' \Big|_{x=0}^{x=1} &= \frac{\partial w_3}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}^{\xi=\omega} = 0, \\ f_1(\tau, x, \omega) &= D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \xi} + \omega M_\omega(\varphi_2(\tau, x, \xi)). \end{aligned} \quad (14)$$

Усредняя в (14) по ξ , получим краевую задачу для определения $v_1(\tau, x, \omega)$ и $\alpha_1(\omega)$:

$$\dot{v}_1 - Dv_1'' + F_0'(v_0(\tau, x))v_1 = f_{10}(\tau, x\omega) + \alpha_1(\omega) \dot{v}_0(\tau, x), \quad (15)$$

$$v_1' \Big|_{x=0} = v_1' \Big|_{x=1} = 0 \quad \left(f_{10}(\tau, x, \omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f_1(\tau, x, \xi, \omega) d\xi \right). \quad (16)$$

Применяя известное условие разрешимости (15), (16) в классе T_0 -периодических функций, сначала находим

$$\alpha_1(\omega) = - \langle \langle f_{10}(\tau, x, \omega), y(t, x) \rangle \rangle,$$

а затем, учитывая (11), однозначно находим $v_1(\tau, x, \omega)$. После этого функцию $w_3(\tau, x, \xi, \omega)$ найдём из (13) и из краевой задачи

$$D \frac{\partial^2 w_3}{\partial \xi^2} + \varphi_3 - M_\omega(\varphi_3) = 0, \quad \frac{\partial w_3}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{\partial w_3}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\omega} = 0,$$

$$\varphi_3(\tau, x, \xi) = (F'(v_0(\tau, x), \xi) - F_0'(v_0(\tau, x)))v_1(\tau, x, \omega) + \alpha_1(\omega) D \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial \xi} + \alpha_1(\omega) \varphi_2(\tau, x, \xi).$$

Затем, собирая в формальном тождестве коэффициенты при ω^{-2} , определим сначала $\alpha_2(\omega)$ и $v_2(\tau, x, \omega)$, а затем $w_4(\tau, x, \xi, \omega)$ и т.д. Тем самым описание алгоритма завершено. Очевидно, при нахождении постоянного (по τ) решения алгоритм существенно упрощается.

2. Пример

Рассмотрим уравнение Хатчинсона с диффузией

$$\dot{N} = DN'' + r(\omega x)[1 - a(\omega x)N_{t-h}]N, \quad (17)$$

$$N'|_{x=0} = N'|_{x=1} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (18)$$

Краевая задача (17), (18) описывает динамику изменения численности изолированной популяции, обитающей в неоднородной среде. Здесь $N(t, x) > 0$ — нормированная численность популяции, $N_{t-h} = N(t-h, x)$, D — коэффициент подвижности, h — средний возраст половозрелости особей, $r(\xi)$ — мальтузианский коэффициент, функция $a(\xi)$ характеризует неоднородность среды обитания. Здесь исследуем (17) при $\omega \rightarrow \infty$. Функции $r(\xi)$ и $a(\xi)$ примем в виде

$$r(\xi) = \sum_{j=-k}^k r_j e^{i\omega_j \xi}, \quad a(\xi) = \sum_{j=-k}^k a_j e^{i\omega_j \xi}.$$

«Усреднённая» краевая задача

$$\dot{M} = DM'' + r_0[1 - \bar{a}_0 M_{t-h}]M, \quad M'|_{x=0} = M'|_{x=1} = 0 \quad (19)$$

имеет единственное положительное состояние равновесия

$$M_0 = \frac{1}{\bar{a}_0} \quad \left(\bar{a}_0 = \frac{1}{r_0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T r(\xi) a(\xi) d\xi \right).$$

При достаточно больших ω краевая задача имеет состояние равновесия $N_0(x, \omega) = \bar{a}_0^{-1} + O(\omega^{-1})$. Пусть $2r_0h < \pi$. Тогда решение M_0 (а значит, и $N_0(x, \omega)$) экспоненциально устойчиво. Если же $2r_0h > \pi$, то M_0 (и $N_0(x, \omega)$) — неустойчивы. Исследуем вопрос о поведении решений (17), (18) в окрестности $N_0(x, \omega)$ при $2r_0h = \pi$. В этом случае спектр линеаризованной на M_0 краевой задачи (19):

$$\dot{u} = Du'' - r_0 u_{t-h}, \quad u'|_{x=0} = u'|_{x=1} = 0$$

состоит из пары чисто мнимых значений $\pm i\pi(2h)^{-1}$, а все остальные собственные значения имеют отрицательные вещественные части. Значение ляпуновской величины α_0 то же, что и для случая $D = 0$:

$$d_0 = -80\pi[(\pi^2 + 4)(3\pi - 2)]^{-1}.$$

Тем самым, осталось вычислить $\alpha_0(\omega)$. Опуская промежуточные вычисления, приведём итоговый результат:

$$\alpha_0(\omega) = \int_0^\omega \left(r(\xi) - \frac{\pi}{2h} \right) d\xi \quad \left(r_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T r(\xi) d\xi = \frac{\pi}{2h} \right).$$

Таким образом, при условии, что $r(\xi)$ не является тождественной константой, функция $\alpha_0(\omega)$ оказывается знакопеременной. Это означает, что при $\omega \rightarrow \infty$ происходит чередование устойчивости и неустойчивости состояния равновесия $N_0(x, \omega)$ и неограниченный процесс «рождения и гибели» (в окрестности $N_0(x, \omega)$) устойчивого периодического решения.

Рассмотрим затем вопрос о влиянии быстрых осцилляций среды — коэффициента $a(\xi)$ — на устойчивость состояния равновесия. Будем считать, что $r(\xi) \equiv \text{const} = r_0 = \pi(2h)^{-1}$ (тем самым $\alpha_0 \equiv 0$). Вычислим коэффициент, стоящий множителем перед p в первом уравнении системы (6) с точностью до $O(\omega^{-3})$.

Сначала найдём асимптотику $N_0(x, \omega)$ с точностью до $O(\omega^{-3})$. Пусть

$$N_0(x, \omega) = \bar{a}_0^{-1} + \omega^{-1} N_1(x, \omega) + \omega^{-2} (N_2(x, \xi, \omega) + N_3(x, \omega)) + \dots$$

Получаем тогда, что

$$\begin{aligned} N_1(x, \omega) &= R(\omega) = a_0^{-1} \int_0^\omega (1 - a(\xi) a_0^{-1}) d\xi, \\ \frac{\partial^2 N_2}{\partial \xi^2} + r_0 a_0^{-1} (1 - a(\xi) a_0^{-1}) - r_0 \omega^{-1} R(\omega) &= 0, \quad \frac{\partial N}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0, \\ N_3(x, \omega) &= -3\alpha_0 R^2(\omega) - 2a_0^{-1} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(\xi) N_2(\xi, \omega) d\xi, \\ \int_0^\omega a(\xi) N_2(\xi, \omega) d\xi &= -\omega(\omega) = a_0^2 r_0^{-1} \int_0^\omega \left(\frac{\partial N_2}{\partial \xi} \right)^2 d\xi > 0. \end{aligned}$$

Положим затем в (17), (18) $N = u + N_0(x, \omega)$ и в получающейся путём линеаризации (по u) краевой задаче функцию $u(t, x)$ запишем в виде

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \left(1 + \frac{u_1(x, \omega)}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} (u_2(x, \xi, \omega) + u_3(x, \omega)) + \dots \right) \times \\ &\quad \times \exp \left(i \frac{\pi}{2h} + \frac{\lambda_1(\omega)}{\omega} + \frac{\lambda_2(\omega)}{\omega^2} + \dots \right) t. \end{aligned}$$

Производя соответствующие вычисления, находим, что $u_1(x, \omega) \equiv 0$,

$$\lambda_1 \equiv 0, \quad u_2(x, \xi, \omega) = (1 - i) a_0 N_2(\xi, \omega),$$

$$\operatorname{Re} \lambda_2(\omega) = -\left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right)^{-1} \left[\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) a_0^2 R^2(\omega) - \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) (\omega) \right] < 0$$

Таким образом, при всех достаточно больших ω состояние равновесия $N_0(x, \omega)$ экспоненциально устойчиво, т.е. быстрые осцилляции функции $a(\omega x)$ стабилизируют состояние равновесия.

3. Обоснование результатов

Для доказательства теоремы 1 произведём в (1), (2) замены

$$t = \gamma(\omega)\tau, \quad \gamma(\omega) = 1 + \omega^{-1}\alpha_1(\omega) + \dots + \omega^{-n}\alpha_n(\omega) + \omega^{-(n+1)}\alpha(\omega),$$

$$u = v_n + \omega^{-n+1}z, \quad V_n = u_n(\tau, x, \omega) - \frac{x^2}{2}u'_n|_{x=1} - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)u'_n|_{x=0},$$

где $\alpha(\omega)$ — некоторая (неизвестная) функция параметра ω такая, что $\alpha(\omega)$ ограничена при $\omega \rightarrow \infty$, а

$$u_n(\tau, x, \omega) = v_0(\tau, x) + \frac{1}{\omega}v_1(\tau, x, \omega) + \dots + \omega^{-n}v_n(\tau, x, \omega) +$$

$$+ \omega^{-2}w_2(\tau, x, \xi, \omega) + \dots + \omega^{-(n+2)}w_{n+2}(\tau, x, \xi, \omega).$$

В результате получим краевую задачу

$$\dot{z} = \gamma(\omega)[Dz'' + A(\tau, x, \omega)z] + \gamma(\omega)\omega^{-(n+1)}\Phi(\tau, x, \omega, z) -$$

$$- \varphi(\tau, x, \omega) + \alpha(\omega)\gamma_0(\omega)(\dot{v}_n - \omega^{-(n+1)}\varphi(\tau, x, \omega)), \quad z'|_{\substack{x=0 \\ x=1}} = 0, \quad (20)$$

в которой

$$A(\tau, x, \omega) = F'(v_n, \omega x), \quad \gamma_0(\omega) = 1 + \omega^{-1}\alpha_1(\omega) + \dots + \omega^{-n}\alpha_n(\omega),$$

$$\varphi(\tau, x, \omega) = \omega^{n+1}(\dot{v}_n - \gamma_0(\omega)[Dv_n'' + F(v_n, \omega x)]),$$

а (гладкий) функционал $\Phi(\tau, x, \omega, z)$ имеет по z порядок малости в нуле выше первого. Отметим, что в (20) зависящая от τ T_0 -периодическая функция $\varphi(\tau, x, \omega)$ ограничена при $\omega \rightarrow \infty$ равномерно по τ, x .

Основным моментом обоснования является анализ линейной краевой задачи

$$Kz \equiv \dot{z} - \gamma(\omega)[Dz'' + A(\tau, x, \omega)z] - \omega^{-(n+1)}Hz = 0, \quad z'|_{\substack{x=0 \\ x=1}} = 0, \quad (21)$$

где $y_0 = y_0(\tau, x)$, $\varphi = \varphi(\tau, x, \omega)$,

$$Hz = \langle z, y_0 \rangle [\langle \dot{v}_n, y_0 \rangle]^{-1} [\dot{\varphi} - \alpha(\omega)\gamma_0^{-1}(\omega)(\dot{v}_n - \omega^{-(n+1)}\dot{\varphi})].$$

Он опирается на результаты [2]. Отметим, что краевая задача (21) имеет периодическое решение $\dot{v}_n$, поэтому один из её мультипликаторов равен 1. Напомним, что один мультипликатор краевой задачи (7) равен 1. Пусть, для определённости, ровно $m_0 \geq 0$ мультипликаторов (7) удовлетворяет неравенству $|\mu| \geq 1 + \beta_0$ ($\beta_0 > 0$), а модули всех остальных (кроме, конечно, одного единичного) меньше, чем 1. В силу вложения $C[0, 1] \subset L_2[0, 1]$, для исследования мультипликаторов краевой задачи (21) можно применить метод Фурье, выбирая в качестве базисной систему вида $e_j \cos k\pi x$ ($j = 1, \dots, m$; $k = 0, 1, \dots$). Анализ возникающей при этом счётной системы обыкновенных уравнений приводит к следующему утверждению.

Лемма 1. *Найдётся такое $\omega_0 > 0$, что при $\omega > \omega_0$ модули ровно m_0 мультипликаторов краевой задачи (21) удовлетворяют неравенству $|\mu| \geq 1 + \beta_0$, а модули всех остальных, кроме одного единичного, мультипликаторов не превосходят величины $1 - \beta$, где $\beta \in (0, 1)$ и не зависит от ω .*

Отсюда вытекает, что сопряжённая к (21) краевая задача имеет единственное, с точностью до множителя, ненулевое периодическое решение $y_0(\tau, x, \omega)$, причём

$$y_0(\tau, x, \omega) = y_0(\tau, x) + O(\omega^{-1}). \quad (22)$$

Рассмотрим затем вопрос о разрешимости в классе периодических функций неоднородной краевой задачи

$$Kz = f(\tau, x), \quad z'|_{x=0} = z'|_{x=1} = 0, \quad (23)$$

где $f(\tau, x)$ T_0 -периодична по τ и $f(\tau, x) \in C^{\alpha, 2\alpha}$ $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ ($C^{\alpha, 2\alpha}$ — банахово пространство непрерывных по $\tau \in [0, T_0]$ и $x \in [0, 1]$ функций, удовлетворяющих (по τ и x) условиям Гельдера с показателями α и 2α соответственно).

Условие существования периодического решения (23) задаётся равенством

$$\langle \langle f(\tau, x), y_0(\tau, x, \omega) \rangle \rangle = 0. \quad (24)$$

При этом условии периодическое решение $z_f(\tau, x)$ единственно, если, например, потребовать, чтобы

$$\langle \langle z_f(\tau, x), y_0(\tau, x, \omega) \rangle \rangle = 0. \quad (25)$$

Лемма 2. *Пусть имеют место равенства (24) и (25). Тогда найдётся такое $\omega_0 > 0$, что при $\omega \geq \omega_0$ справедлива оценка*

$$\|z_f(\tau, x)\|_{C^{\alpha, 2\alpha}} = \|K^{-1}f(\tau, x)\|_{C^{\alpha, 2\alpha}} \leq c\|f(\tau, x)\|_{C^{\alpha, 2\alpha}}, \quad (26)$$

где $c > 0$ не зависит от ω и от $f(\tau, x) \in C^{\alpha, 2\alpha}$.

После этого обоснование теоремы 1 завершается по стандартной схеме (см. [3]).

Рассмотрим краевую задачу (20). Предположим, что $z(\tau, x, \omega)$ — периодическое решение этой краевой задачи и пусть

$$\langle \langle z(\tau, x, \omega), y_0(\tau, x, \omega) \rangle \rangle = 0.$$

Тогда необходимо выполнено равенство (аналог (24))

$$\begin{aligned} \omega^{-(n+1)}\gamma(\omega)\langle \langle \Phi(\tau, x, \omega, z), y_0(\tau, x, \omega) \rangle \rangle - \langle \langle \varphi(\tau, x, \omega) + \omega^{-(n+1)}Hz(\tau, x, \omega) + \\ + \alpha(\omega)\gamma_0^{-1}(\omega)(\dot{v}_n - \omega^{-(n+1)}\varphi(\tau, x, \omega)), y_0(\tau, x, \omega) \rangle \rangle = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

От краевой задачи (20) можно теперь перейти к интегральному уравнению

$$\begin{aligned} z(\tau, x, \omega) = K^{-1}(\gamma(\omega)\omega^{-(n+1)}\Phi(\tau, x, \omega, z) - Hz(\tau, x, \omega)\omega^{-(n+1)} - \\ - \varphi(\tau, x, \omega) - \alpha(\omega)\gamma_0^{-1}(\omega)(\dot{v}_n - \omega^{-(n+1)}\varphi(\tau, x, \omega))). \end{aligned} \quad (28)$$

Таким образом вопрос о существовании периодического решения краевой задачи (1), (2) эквивалентен вопросу о разрешимости относительно $\alpha(\omega)$ и $z(\tau, x, \omega)$ системы уравнений (27), (28). Соотношения $\langle \dot{v}_n, y_0(\tau, x, \omega) \rangle = 1 + O(\omega^{-1})$ и (26) позволяют воспользоваться для обоснования разрешимости (1), (2) (в классе T_0 -периодических функций, близких при $\omega \rightarrow \infty$ к $v_0(\tau, x)$) принципом сжимающих отображений. Доказательство соответствующего утверждения об устойчивости вытекает из леммы (1) и из общих утверждений об устойчивости периодического решения автономной (параболической) системы. Теорема 1 доказана.

Обоснование теоремы 2 получаем путём сочетания изложенных выше результатов и известной техники локального исследования решений в случае, близком к «критическому», пары чисто мнимых корней характеристического многочлена. Подробно на этом не останавливаемся.

Полученные выше результаты допускают распространение на более общую краевую задачу с переменным главным членом

$$\dot{u} = D(\omega x)u'' + F(u, \omega x), \quad u'|_{x=0} = u'|_{x=1} = 0,$$

в которой предполагается, что вектор-функция $F(u, \omega x)$ та же, что и выше, матрица $D(\xi)$ положительно (равномерно относительно ξ) определена и является тригонометрическим многочленом по ξ , а собственные значения матрицы

$$B = \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T D^{-1}(\xi) d\xi \right)^{-1}$$

тоже имеют положительные вещественные части. Обратим только внимание, что усреднённая краевая задача-аналог (3) определяется несколько иначе:

$$\dot{v} = B[v'' + P(v)], \quad v'|_{x=0} = v'|_{x=1} = 0,$$

где

$$P(v) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T D^{-1}(\xi) F(v, \xi) d\xi.$$

4. О периодических решениях параболических уравнений с «большой» диффузией

На отрезке $0 \leq x \leq 1$ рассмотрим краевую задачу

$$\dot{u} = \lambda D u'' + F(u, x), \tag{29}$$

$$u'|_{x=0} = u'|_{x=1} = 0, \tag{30}$$

где $u \in R^m$, матрица D та же, что и в (1), $F(u, x)$ — достаточно гладкая по каждой переменной. Основное допущение состоит в том, что $\lambda \gg 1$.

Вместе с (29) рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{v} = F_0(v), \quad F_0(v) = \int_0^1 F(v, x) dx. \tag{31}$$

Предположим, что уравнение (31) имеет T_0 -периодическое решение $v_0(t)$. Поставим вопрос о существовании у краевой задачи (29), (30) близкого (при $\lambda \rightarrow \infty$) к $v_0(t)$ периодического решения.

Теорема 3. Пусть один мультипликатор линеаризованного на $v_0(t)$ уравнения (31) по модулю равен 1. Тогда найдётся такое λ_0 , что при $\lambda \geq \lambda_0$ краевая задача (29), (30) имеет периодическое решение $u_0(t, x, \lambda)$ и

$$\max_{t,x} \|u_0(t, x, \lambda) - v_0(\tau)\|_{\mathbb{R}^m} \leq c\lambda^{-1}, \quad \tau = (1 + O(\lambda^{-1}))t$$

($c > 0$ не зависит от λ) и количество мультипликаторов, модули которых больше 1, у линеаризованных на $u_0(t, x, \lambda)$ и $v_0(t)$ краевой задачи (29), (30) и уравнения (31) одно и то же.

Отметим, что имеет место асимптотическое представление, более полно раскрывающее структуру $u_0(t, x, \lambda)$:

$$u_0(t, x, \lambda) = v_0(\tau) + \lambda^{-1}v_1(\tau, x) + \dots, \\ \tau = (1 + \lambda^{-1}\alpha_1 + \lambda^{-2}\alpha_2 + \dots)t.$$

Остановимся затем на том случае, когда уравнение (31) имеет состояние равновесия v_0 , причём $A_0 = F'_0(v_0)$ имеет собственные значения $\pm i\delta_0$ ($\delta_0 > 0$), а реальные части всех остальных собственных значений отрицательны. Поведение решений (31) в окрестности v_0 определяется первой ляпуновской величиной, которую, как и в п. 1, обозначили через d_0 . Пусть $d_0 < 0$, т.е. состояние равновесия v_0 асимптотически устойчиво. Рассмотрим вопрос о поведении решений краевой задачи (29), (30) в окрестности состояния равновесия $u_0(x, \lambda) = v_0 + \lambda^{-1}v_1(x) + O(\lambda^{-2})$. Пусть $A_0a = i\delta_0a$, $A_0^*b = -i\delta_0b$, $(a, b = 1)$, $(a, \bar{b}) = 0$. Для функции $v_1(x)$ имеет место формула

$$v_1(x) = v_{10} + v_{11}(x), \quad v_{11}(x) = -D^{-1} \int_0^x \int_0^s F(v_0, \xi) d\xi ds, \\ v_{10} = A_0^{-1} \int_0^1 F'(v_0, x) v_{11}(x) dx,$$

используя которую, находим

$$A_1 = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\int_0^1 F'(v_0 + \varepsilon v_1(x), x) dx \right) \Big|_{\xi=0}, \quad \alpha_0 = \operatorname{Re}(A_1 a, b).$$

Сформулируем результат о поведении решений в рассматриваемом случае.

Теорема 4. При всех достаточно больших значениях λ краевая задача (29), (30) имеет в некоторой (достаточно малой и не зависящей от λ) окрестности состояния равновесия $u_0(x, \lambda)$ экспоненциально устойчивое двумерное инвариантное многообразие $V(\lambda)$ ($u_0(x, \lambda) \in V(\lambda)$). На $V(\lambda)$ краевую задачу (29), (30) можно записать в виде систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{p} = \lambda^{-1}(\alpha_0 + O(\lambda^{-1}))p + (d_0 + O(\lambda^{-1}))p^3 + O(p^5),$$

$$\dot{\tau} = \delta_0 + O(\lambda^{-1}) + O(p^2) \quad (32)$$

(последние слагаемые в правых частях (32) имеют указанный порядок равномерно по λ при $\lambda \rightarrow \infty$).

Отметим, что при $\alpha_0 > 0$ (и достаточно больших λ) краевая задача (29), (30) имеет экспоненциально орбитально устойчивое периодическое решение

$$u_0(t, x, \lambda) = v_0 + (-\alpha_0(2d_0)^{-1})^{1/2}(ae^{i\tau} + \bar{a}e^{-i\tau}) + O(\lambda^{-1}), \quad \tau = (\delta_0 + O(\lambda^{-1}))t.$$

Схема обоснования приведённых здесь результатов та же, что и выше.

В качестве примера рассмотрим уравнение Хатчинсона с диффузией

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\Delta N + r[1 - N_{t-h}]N, \quad \frac{\partial N}{\partial \nu}|_{\Gamma} = 0, \quad (33)$$

где $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ — область в R^2 с достаточно гладкой границей Γ , ν — направление внешней нормали к Γ , Δ — оператор Лапласа, $r = r(x)$, $h = h(x)$, $a = a(x)$ (смысл этих коэффициентов раскрыт выше). Зависимость от x — достаточно гладкая. Основное предположение состоит в том, что велик коэффициент подвижности D ($D \gg 1$).

Не приводя соответствующих формул, опишем результаты применения здесь полученных выше утверждений для краевой задачи (33).

Введём в рассмотрение обобщённое уравнение Хатчинсона

$$\dot{M} = \left[r_0 - \frac{1}{m_0} \int_{\Omega} raM(t-h)dx \right] M, \quad r_0 = \frac{1}{m_0} \int_{\Omega} rdx. \quad (34)$$

Это уравнение возникает в результате усреднения в (33) по пространственной переменной. В предположении, что $r, h \equiv \text{const}$ и существует экспоненциально орбитально устойчивое периодическое решение (34) в [4] показано, что краевая задача (33) имеет при достаточно больших D периодическое решение той же устойчивости. Это решение слабо зависит от x и стремится при $D \rightarrow \infty$ к соответствующему периодическому решению (34). Отметим, что этот же результат верен и без предположения о постоянстве функций r и h .

Рассмотрим критический случай. Будем предполагать, что характеристический квазиполином линеаризованного на положительном состоянии равновесия уравнения (34) имеет пару чисто мнимых корней $\pm i\omega_0$ ($\omega_0 > 0$), а все остальные его корни лежат строго слева от мнимой оси. В терминах (33) это означает, что спектр линеаризованной на положительном состоянии равновесия $K(x, D)$ краевой задачи имеет ровно два собственных значения, близких при $D \rightarrow \infty$ к $\pm i\omega_0$, а все остальные собственные значения отделены и лежат слева от мнимой оси. Оказывается, при $D \rightarrow \infty$, в зависимости от выбора коэффициентов (33) могут иметь место все эффекты, возникающие в теории бифуркаций из состояния равновесия в случае, близком к критическому, пары чисто мнимых корней. Опишем для примера ситуации, возникающие при $h(x) \equiv \text{const}$. Тогда ограничение на уравнение (34) заключается в том, что $2r_0h = \pi$. При этом условии положительное состояние равновесия

(34) асимптотически устойчиво, а окрестность $K(x, D)$ (в соответствующем фазовом пространстве (33)) может быть устроена более сложно. Если функция z от x не зависит, но $a(x)$ не является тождественной константой, тогда все решения из некоторой (не зависящей от D) окрестности $K(x, D)$ экспоненциально стремятся к этому стационару при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, неоднородность внешней среды выступает как стабилизирующий фактор.

Пусть теперь $r(x)$ не равняется тождественной константе, а произведение функций $r(x)a(x)$ достаточно близко к постоянной (т.е. плодovitость там больше, где условия обитания лучше). Тогда при уменьшении D от $D = \infty$ из состояния равновесия $K(x, D)$ бифурцирует экспоненциально орбитально устойчивое периодическое решение (с частотой, близкой к ω_0). Оно отличается от $K(x, D)$ на величину порядка $D^{-1/2}$. Отметим, что уравнение (33) с нулевым D имеет в рассматриваемом случае интенсивные колебания при некоторых x . Тем самым можно сформулировать вывод: большая подвижность приводит к стабилизации численности популяции.

5. О периодической краевой задаче

Рассмотрим систему параболических уравнений (29) с большим коэффициентом диффузии ($\lambda \gg 1$) и 1-периодической зависимостью от пространственной переменной: $F(u, x + 1) \equiv F(u, x)$. Вместо краевых условий (30) будем предполагать, что выполнены периодические краевые условия

$$u(t, x + 1) \equiv u(t, x). \quad (35)$$

Легко видеть, что все построения из п. 4 без изменений переносятся на краевую задачу (29), (35). Сформулируем здесь итоговый результат.

Теорема 5. Пусть система уравнений (31) имеет периодическое решение $u_0(t)$ и только один мультипликатор линеаризованной на $u_0(t)$ системы равен по модулю единице. Тогда при всех достаточно больших λ краевая задача (29), (35) имеет периодическое решение $u_0(t, x, \lambda)$ той же, что и $u_0(t)$ устойчивости, причем $u_0(t, x, \lambda) = u_0(t) + o(\lambda^{-1})$.

Как и в п. 4, при рассмотрении бифуркации Андронова–Хопфа получаем те же формулы, раскрывающие поведение решений (29), (35) в достаточно малой окрестности состояния равновесия.

Небольшие отличия возникают при рассмотрении системы (1) с быстро осциллирующими коэффициентами в случаях краевых условий (35). Дело в том, что в случае 1-периодических краевых условий (35) необходимо предполагать, что $F(u, \gamma x)$ является 1-периодической вектор функцией относительно аргумента γx , т.е. параметр γ может принимать только целочисленные значения. Удобно вместо целого γ ввести «непрерывный» параметр ω по правилу

$$\gamma = \omega(1 + \omega^{-1}\theta(\omega)), \quad (36)$$

где периодическая относительно ω функция $\theta(\omega)$ дополняет величину ω до целого значения и удовлетворяет условию $\theta(\omega) \in [0, 1]$.

После замен в (1) $y = \gamma x$ и $\gamma^2 = \lambda$ получим систему уравнений (29) с 1-периодическими краевыми условиями $u(t, y + 1) \equiv u(t, y)$. Асимптотические при $\lambda \rightarrow \infty$ формулы для состояний равновесия, периодических решений, для корней характеристического уравнения линеаризованных краевых задач и т. д. представляют собой асимптотические ряды по степеням λ^{-1} . Заменяя в них этот параметр на $\omega^2(1 + \omega^{-1}\theta(\omega))^2$, приходим в итоге к асимптотическим разложениям по степеням ω^{-1} , которые содержат периодические относительно ω коэффициенты. В этом случае ситуация тоже довольно близка к результатам п. 1.

Рассмотрим несколько более общую параболическую систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(\gamma x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(\gamma x) \frac{\partial u}{\partial x} + F(u, \gamma x) \quad (37)$$

с периодическими краевыми условиями (и целыми значениями γ)

$$u(t, x + 1) \equiv u(t, x). \quad (38)$$

Зависимость от аргумента x матриц $D(\gamma x)$, $B(\gamma x)$ и вектор-функции $F(u, \gamma x)$ предполагается 1-периодической. При условии, когда либо значение ω (см. (36)) достаточно велико, либо $\gamma = 1$, $D(x) = \lambda D_0(x)$ и $\lambda \gg 1$, применимы все построения и утверждения из п. 1, 2. Более сложные вопросы могут возникать при условии, когда «большим» является выражение $B(x)$: $B(x) = \lambda B_0(x)$ и $\lambda \gg 1$. Если в алгоритмическом плане возможно использование описанных выше методик асимптотического построения тех или иных решений, то в плане обоснования существования точных решений и анализа их устойчивости могут возникнуть различные и существенные проблемы.

6. Уравнения с близкими к постоянным коэффициентами

Более просто по сравнению с предыдущим решается вопрос об исследовании краевой задачи с близкими к постоянным коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u, x, \varepsilon), \quad (39)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, $F(u, x) = F_0(u) + \varepsilon F_1(u) + \dots$. Ограничимся здесь рассмотрением модельного примера — пространственно распределенного уравнения Хатчинсона

$$\frac{\partial N}{\partial t} = d \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + r(x, \varepsilon) [1 - a(x, \varepsilon) N(t - h(x, \varepsilon), x)] N, \quad (40)$$

$$\left. \frac{\partial N}{\partial x} \right|_{x=0}^{x=1} = 0. \quad (41)$$

Здесь $r(x, \varepsilon) = r_0 + \varepsilon r_1(x) + \dots$, $h(x, \varepsilon) = h_0 + \varepsilon h_1(x) + \dots$, $a(x, \varepsilon) = 1 + \varepsilon a_1(x) + \dots$. Все функции предполагаются достаточно гладкими. Эта краевая задача имеет состояние равновесия $K(x, \varepsilon)$, которое можно представить в виде (асимптотического)

ряда $K(x, \varepsilon) = 1 + \varepsilon K_1(x) + \dots$. Для нахождения $K_1(x)$, $K_2(x)$, например, имеем соотношения

$$dK_1''(x) - r_0(a_1(x) + K_1(x)) = 0, \quad (42)$$

$$dK_2''(x) - r_0(a_2(x) + K_2(x)) - r_0 a_1(x) K_1(x) - \\ - r_1(x)(a_1(x) + K_1(x)) - r_0 K_1(x)(a_1(x) + K_1(x)) = 0, \quad (43)$$

$$K_{1,2}' \Big|_{x=0}^{x=1} = 0. \quad (44)$$

Из (42)-(44) функции $K_1(x)$ и $K_2(x)$ однозначно определяются.

Рассмотрим вопрос об устойчивости состояния равновесия $K(x, \varepsilon)$. Линеаризуем краевую задачу (40), (41) на $K(x, \varepsilon)$. Для того, чтобы ярче проиллюстрировать роль неоднородности (40), рассмотрим случай, близкий к критическому, в задаче об устойчивости $K(x, \varepsilon)$. Отметим, что при малых ε и при $r_0 h_0 < \pi/2$ это состояние равновесия асимптотически устойчиво, а при $r_0 h_0 > \pi/2$ — неустойчиво. Здесь предположим, что

$$r_0 h_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Характеристическое уравнение линеаризованной на $K(x, \varepsilon)$ краевой задачи имеет вид

$$\lambda u = du'' - r(x, \varepsilon)[a(x, \varepsilon)K(x, \varepsilon) + \\ + a(x, \varepsilon) \exp(-\lambda h(x, \varepsilon)K(x, \varepsilon) - 1)u], \quad u' \Big|_{x=0}^{x=1} = 0. \quad (45)$$

При $\varepsilon = 0$ имеем $\lambda = ir_0$, $u \equiv 1$, поэтому при $0 < \varepsilon \ll 1$ полагаем в (45)

$$\lambda = \lambda(\varepsilon) = ir_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots, \quad u = 1 + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \dots \quad (46)$$

Подставляя формальные ряды (46) в (45) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим явные выражения λ_j и u_j . Так, для определения λ_1 и u_1 имеем

$$\left(1 + i\frac{\pi}{2}\right) \lambda_1 = du_1'' + ir_1(x) - r_0^2 h_1(x), \quad u_1' \Big|_{x=0}^{x=1} = 0.$$

Отсюда сначала находим, что

$$\lambda_1 = \left(1 + i\frac{\pi}{2}\right)^{-1} M(ir_1(x) + r_0^2 h_1(x)), \quad \text{где} \quad M(\varphi(x)) = \int_0^1 \varphi(x) dx,$$

а затем определяем $u_1(x)$. При условии $\text{Re } \lambda_1 < 0$ (> 0) состояние равновесия $K(x, \varepsilon)$ для малых ε устойчиво (неустойчиво). Отметим, что

$$\text{Re } \lambda_1 = \left(1 + i\frac{\pi}{2}\right)^{-1} \left(\frac{\pi}{2} M(r_1) + r_0^2 M(h_1)\right).$$

Рассмотрим вопрос о влиянии на устойчивость $K(x, \varepsilon)$ неоднородности внешней среды, которая характеризуется функцией $a(x, \varepsilon)$. Положим $r(x, \varepsilon) \equiv r_0$, $h(x, \varepsilon) \equiv h_0$. Тогда $\lambda_1 = 0$, $u_1(x) \equiv 0$, а для коэффициента λ_2 приходим к выражению

$$\lambda_2 = -\left(1 + i\frac{\pi}{2}\right)^{-1} r_0(1 - i)C,$$

где $C = M(a_2(x) + K_2(x) + a_1(x)K_1(x))$. Из (43) получаем, что

$$C = -r_0 M(K_1(x)(a_1(x) + K_1(x))),$$

а из (42) находим тогда, что

$$C = dM(K_1(x)K_1''(x)) = -dM((K_1'(x))^2) < 0.$$

Отсюда, наконец, заключаем, что

$$\operatorname{Re} \lambda_2 = \left(1 + i\frac{\pi}{2}\right)^{-1} r_0\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)C.$$

Тем самым, при $a_1(x) \not\equiv 0$ значение $\operatorname{Re} \lambda_2$ отрицательно, а значит, состояние равновесия $K(x, \varepsilon)$ для достаточно малых ε устойчиво. Таким образом, еще раз подтвержден сформулированный выше вывод о том, что неоднородность внешней среды повышает устойчивость экосистемы.

Список литературы

1. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
2. Кащенко С. А. Исследование устойчивости решений линейных параболических уравнений с близкими к постоянным коэффициентами и малой диффузией // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1991. Вып. 15. С. 128–155.
3. Stokes A. On the approximation of nonlinear oscillation // Тр. V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Киев: Наукова думка, 1970. Т. 2. С. 480–491.
4. Кащенко С. А. Существование и асимптотика периодических решений некоторых уравнений с последействием // Качественные методы теории нелинейных колебаний. Киев, 1984. Т. 2. С. 173–175.

The Asymptotics of Periodic Solutions of Autonomous Parabolic Equations with Rapidly Oscillating Coefficients and Equations with Large Diffusion Coefficients

Kashchenko S. A., Polstyanov A. S.

Keywords: asymptotics, large parameter, periodic solutions

We study the existence, structure and stability of periodic solutions of nonlinear systems referred to in the title.

Сведения об авторах:

Кащенко Сергей Александрович,
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
д-р физ.-мат. наук, проф., заведующий кафедрой математического моделирования;
Полстыянов Артем Сергеевич,
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
аспирант.