Модел. и анализ информ. систем. Т.**21**, №**6** (2014) 176–192

УДК 517.9

О работе семинара «Нелинейная динамика»

В 2014 году в рамках научно-образовательного центра «Нелинейная динамика» продолжил работу научный семинар, посвященный исследованиям поведения, а также методам анализа динамических систем. В текущем году на нем было заслушано более тридцати сообщений по тематике исследований научно-образовательного центра. Доклады были посвящены численному анализу с помощью различных, в том числе гибридных, вычислительных систем, бегущих волн уравнения КПП с запаздыванием и задачи теплопроводности в сложной области с источниками, в ряде докладов строились и исследовались нормальные и квазинормальные формы дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями, кроме того, был сделан доклад об одной задаче оптимального управления телескопическим манипулятором.

Ниже представлены тезисы наиболее интересных докладов, прозвучавших на семинаре.

Алешин С.В. Численный анализ бегущих волн уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова с запаздывающим аргументом (Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова; Научный центр РАН в Черноголовке)[1]. Уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова [1] (далее КПП) привлекается для моделирования процесса возникновения незатухающих бегущих волн конечной амплитуды. Нами изучается динамика уравнения КПП с запаздывающим по времени аргументом:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + (1 - u(t-\tau,x))u(t,x), \tag{1}$$

где $\tau > 0$ – запаздывание по времени. При отсутствии запаздывания ($\tau = 0$) данное уравнение хорошо изучено [2]. Оно имеет два состояния равновесия. Первое – это неустойчивое нулевое, а второе – устойчивое единичное значение. Если в начальном условии задать небольшое возмущение, то с течением времени это возмущение доходит до единицы и распространяется по пространственной переменной. Эта движущаяся с постоянной скоростью волна называется стационарным фронтом.

Областью изменения пространственной переменной будем считать отрезок $[a,b]$, причем $|b-a| \gg 1$, а на границах данного отрезка предполагаем выполненными краевые условия Дирихле $u(t,a) = u(t,b) = 0$. Для проведения численного моделирования задачи (1) перейдем в ней от второй производной по пространственной переменной к второй разделенной разности, с этой целью разобьем отрезок $[a,b]$ на N равных частей и построим сетку узлов с шагом $h = (b-a)/N$: $x_i = a + ih$, $i = 1,\dots,N-1$. Обозначим через $u_i(t)$ значение функции $u(t,x)$ в соответствующих узлах сетки. В итоге получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием:

$$\dot{u}_i = N^2\big(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}\big) + (1 - u_i(t-\tau))u_i, \quad i = 1,\dots,N-1, \quad u_0 = u_N = 0. \tag{2}$$

Для численного моделирования были выбраны следующие значения параметров и начальные условия на отрезке $t \in [-\tau, 0]$: $a = 0$, $b = 900$, $N = 9 \cdot 10^4$, $u_i(t) = 0{,}1$ при

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00158).

$i \in [44950, 45050]$ и $u_i(t) \equiv 0$ во всех других случаях. Для решения системы (2) применялся стандартный метод Дормана–Принса пятого порядка с переменной длиной шага.

Численный эксперимент проводился при различных значениях запаздывания. При $\tau = 0{,}2$ полученное решение (рис. 1) мало отличается от решения классического уравнения КПП. Небольшое первоначальное возмущение так же, как и в случае стандартного уравнения КПП, породило бегущую волну. Фронт волны распространяется с постоянной скоростью. При увеличении запаздывания τ скорость распространения волны изменяется слабо, но при этом усложняется структура фронта волны (рис. 2), он делается сильно осциллирующим. При отдалении от фронта амплитуда осцилляций быстро уменьшается. В центре изучаемой области наблюдаются колебания, амплитуда которых существенно меньше, чем вблизи фронта волны, и близка к амплитуде устойчивого периодического решения уравнения Хатчинсона.

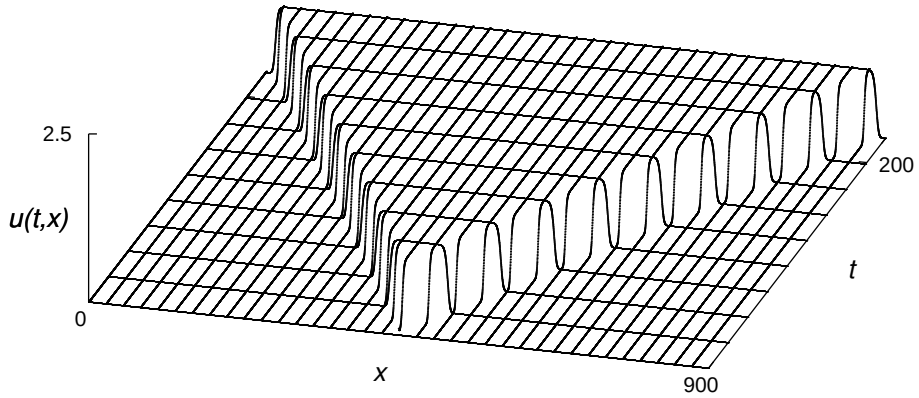


Рис. 1. Численное решение уравнения (1) при $\tau = 0{,}2$

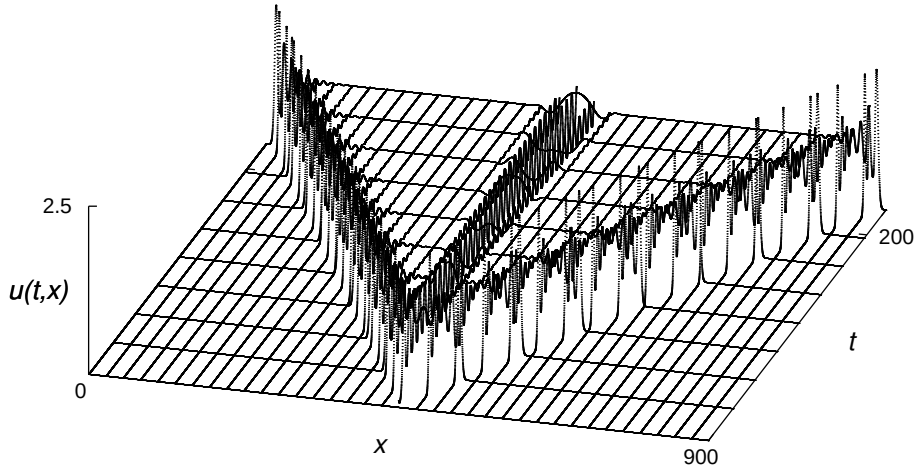


Рис. 2. Численное решение уравнения (1) при $\tau = 1{,}6$

Список литературы

1. *Колмогоров А.Н. и др.* // Бюлл. МГУ. 1937. Секция А 1,6. [English transl.: *Kolmogorov A.N. et al.* // Bul. of MSU. 1937. Sec. A 1,6.]

2. *Hamel F. , Rossi L.* Transition fronts for the Fisher-KPP equation // eprint arXiv:1404.2821, 2014.

Глызин Д.С. Гибридные кластерные вычисления в задаче о фазовом переходе (Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова; Научный центр РАН в Черноголовке)[1]. При строительстве в условиях многолетней мерзлоты необходимо учитывать динамику температурного режима грунтов [1]. Численное моделирование таких задач в трехмерной области требует значительных вычислительных ресурсов. В работе предлагается реализация энтальпийного метода решения уравнения теплопроводности [2] для кластерных систем гибридного типа.

Поскольку замерзание воды вносит значительный вклад в динамику распространения тепла в грунте, рассмотрим задачу теплопроводности в прямоугольной области $x \in D \subset \mathrm{R}^3$ в следующей форме:

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial t} = \mathrm{div}(\lambda(x,u)\nabla u(x,t)) + F(x),\ E(x,t) = \bar{E}(u(x,t)) = \int_0^u \big(C(\xi) + Q_w\delta(\xi - u^*)\big)d\xi. \quad (1)$$

Здесь $E(x,t)$ — энтальпия на единицу объема, $u(x,t)$ — температура, $\lambda(x,u)$ — известная зависимость коэффициента теплопроводности от температуры, учитывающая различные типы грунта с неоднородной влажностью, $F(x,t)$ — плотность внутренних источников тепла, $C(u)$ — теплоемкость грунта, u^* — температура фазового перехода, Q_w — теплота плавления воды. Краевые условия выбираются с учетом построек, снега, силы ветра.

Для численного решения уравнения (1) область D разобьем прямоугольной сеткой на элементарные объемы $v_{i,j,k}$. Каждый шаг метода требует вычисления теплопотока через все грани элементарных объемов, обновления энтальпии элементарных объемов с учетом теплопотоков и вычисления по новой энтальпии температуры и доли жидкой воды, от которых зависит коэффициент теплопроводности λ.

Для численного моделирования предлагается использовать кластерные вычисления по стандартной схеме: разделение работы между узлами с помощью MPI и затем в рамках одного узла использование гибридных параллельных вычислений на CPU и GPU с помощью OpenMP и CUDA.

Для оценки производительности использовался один узел: 2xCPU Xeon E5-2690 (8 ядер, 2.9ГГц), 3xGPU Tesla M2090. Моделировалась задача с сеткой 100x100x100 элементов. Получены следующие результаты:

Только 2 CPU: 409 млн. блоков в секунду.

1 GPU: 607 млн. блоков в секунду.

3 GPU+2 CPU: 1520 млн. блоков в секунду.

Отметим, что, несмотря на значительные потери на синхронизацию, для задач данного типа целесообразно использовать в вычислениях ресурсы как GPU, так и CPU.

Список литературы

1. *Alexiades V.* Mathematical Modeling Of Melting And Freezing Processes. CRC Press, 1992.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00158).

2. *Крылов Д.А., Федотов А.А.* Температурный режим вечномерзлого грунта под зданием со свайным фундаментом // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”. 2013. No 3. С. 106–116 [*Krylov D.A., Fedotov A.A.* Temperature regime of permafrost soil under the building with pile foundation // Herald of the Bauman Moscow state university. Series “Natural Sciences”. 2013. No 3. P. 106–116 (in Russian).]

Ивановский Л. И., Самсонов С. О. Фазовые перестройки одной двумерной динамической системы с импульсным воздействием (Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова)[1]. Для цепочки сингулярно возмущенных осцилляторов с запаздыванием

$$\dot{u_j} = d(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \lambda[-1 + \alpha f(u_j(t-1)) - \beta g(u_j)]u_j, \quad j = \overline{1,3}, \tag{1}$$

где $u_0 = u_1$, $u_3 = u_4$, $\lambda \gg 1$, $\beta > 0$, $\alpha > 1+\beta$, а гладкие функции $f(u)$ и $g(u)$ удовлетворяют условиям $f(0) = g(0) = 1$, $f(u), g(u), uf'(u), ug'(u) = O(1/u)$ при $u \to +\infty$, в статьях [1,2], выполнено сведение к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \dot{y_1} &= d[\exp y_2 + \exp(-y_1) - \exp y_1 - 1], \\ \dot{y_2} &= d[1 + \exp(-y_2) - \exp y_2 - \exp(-y_1)], \end{aligned} \tag{2}$$

$$y_j(+0) = \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} y_j(-0), \quad y_j(1+0) = y_j(1-0) - \frac{\alpha}{\alpha - 1} y_j(+0),$$

$$y_j(\alpha + 0) = (1+\beta) y_j(\alpha - 0), \quad y_j(\alpha + 1 + 0) = y_j(\alpha + 1 - 0) - \frac{\alpha}{1+\beta} y_j(\alpha + 0), \quad j = 1, 2.$$

Функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ связаны с исходными переменными приближенными асимптотическими равенствами $y_1 \approx \ln u_2 - \ln u_1$, $y_2 \approx \ln u_3 - \ln u_2$ и характеризуют фазовые сдвиги между компонентами системы (1). Ниже будем изучать следующее отображение:

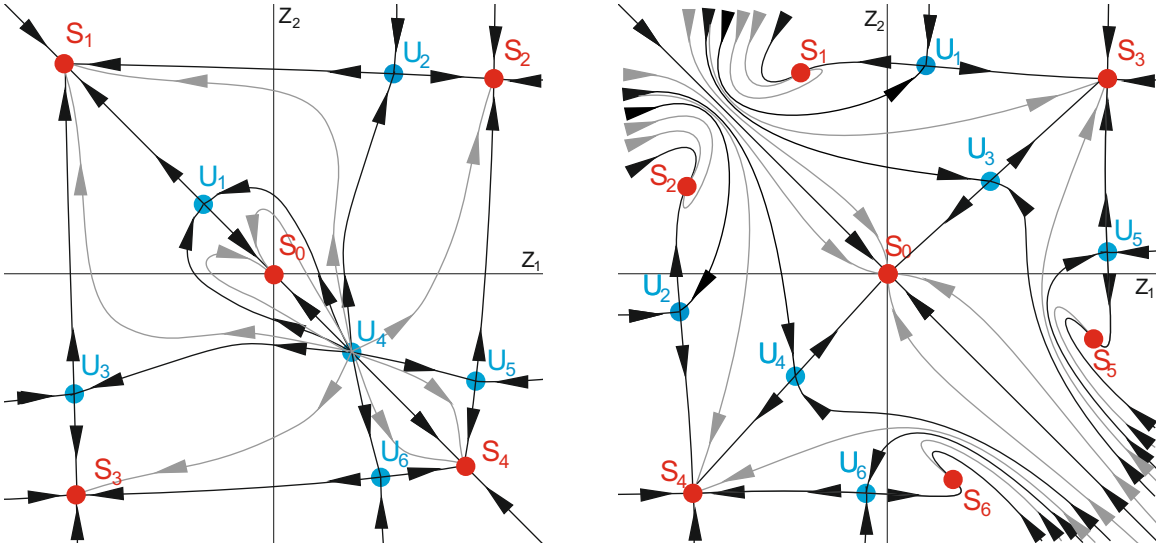
$$\Phi(z) : \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y_1(T^*) \\ y_2(T^*) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $(y_1(t), y_2(t))^T$ — решения системы (2) с импульсным воздействием и начальными условиями $y_1(-0) = z_1, y_2(-0) = z_2$. Величина $T^* = \alpha+1+(\beta+1)/(\alpha-\beta-1)$ определяет главную часть периода устойчивого цикла одиночного релаксационного осциллятора системы (1).

В [1,2] доказано, что экспоненциально устойчивым неподвижным точкам отображения (3) соответствуют орбитально асимптотически устойчивые циклы системы (2) и, в свою очередь, системы (1). Асимптотический анализ отображения (3) позволяет показать, что при достаточно малых значениях параметра d оно имеет как минимум три устойчивые неподвижные точки. Заметим, что нулевое состояние равновесия устойчиво при любых значениях d, при этом ему соответствует однородный (синхронный) цикл системы (1). Наша задача состоит в определении таких α и β, при которых отображение (3) имеет бóльшее число устойчивых неподвижных точек.

При относительно малых значениях d не трудно численно обнаружить состояния равновесия, предсказанные аналитически. Для обнаружения других неподвижных точек зафиксируем величины α и β и будем менять значение параметра d. Разберем два примера, в первом из которых при $d = 0{,}01, \alpha = 5, \beta = 0{,}4$ наблюдается пять, а во втором при $d = 0{,}057, \alpha = 5, \beta = 3$ — семь устойчивых состояний. На рис. 1 представлены схематические изображения фазовых портретов отображения $\Phi(z)$ в этих случаях. Буквами S_j обозначены устойчивые, а U_j — неустойчивые неподвижные точки. Численный анализ отображения (3) позволяет получить последовательности бифуркаций, происходящих в фазовом пространстве отображения при изменении параметра d.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00158).



а) $d = 0{,}01, \alpha = 5, \beta = 0{,}4.$ б) $d = 0{,}057, \alpha = 5, \beta = 3.$

Рис. 1. Фазовые портреты отображения

1) Случай $\alpha = 5, \beta = 0{,}4$**.**

1. При $d < d_1$, $d_1 \approx 0{,}019$ отображение имеет пять устойчивых неподвижных точек и шесть неустойчивых.
2. При $d = d_1$ два симметричных друг другу седла U_5 и U_6 сливаются с самосимметричной точкой S_4 и отбирают у нее устойчивость, образуя седло U_7.
3. При $d_1 < d < d_2$, $d_2 \approx 0{,}031$ отображение имеет четыре устойчивые неподвижные точки и пять неустойчивых.
4. При $d = d_2$ неустойчивый узел U_4 и седло U_7, сливаясь, пропадают.
5. При $d_2 < d < d_3$, $d_3 \approx 0{,}059$ отображение имеет четыре устойчивые неподвижные точки и три неустойчивые.
6. При $d = d_3$ устойчивый узел S_1 и седло U_1, сливаясь, пропадают.
7. При $d_3 < d < d_4$, $d_4 \approx 0{,}127$ отображение имеет три устойчивые неподвижные точки и две неустойчивые.
8. Последняя бифуркация происходит при $d = d_4$. Симметричные друг другу устойчивые узлы S_2 и S_3 сливаются с симметричными седлами U_2 и U_3 и исчезают. Тем самым, при $d > d_4$ отображение имеет единственное нулевое устойчивое состояние.

2) Случай $\alpha = 5, \beta = 3$.

1. $d < d_1^*$, $d_1^* \approx 0{,}045$ отображение имеет пять устойчивых неподвижных точек и восемь неустойчивых.
2. При $d = d_1^*$ и близком к нему $d = d_2^*$, $d_2^* \approx 0{,}04501$ от устойчивого самосимметричного узла ответвляется пара симметричных друг другу устойчивых узлов (сначала S_5 и S_6, а затем S_1 и S_2) и самосимметричная седловая точка.
3. При $d_2^* < d < d_3^*, d_3^* \approx 0{,}058$ отображение имеет 7 устойчивых неподвижных точек. Фазовый портрет, изображенный на рис. 1б при $d = 0{,}057$, позволяет проиллюстрировать эту ситуацию.

4. При $d = d_3^*$ симметричные друг другу устойчивые узлы S_5, S_6 сливаются с симметричными седлами U_5, U_6 и исчезают. Следующая за данной аналогичная бифуркация происходит при близком к d_3^* значении $d = d_4^*$, $d_4^* \approx 0{,}0581$. В ее результате исчезают устойчивые узлы S_1, S_2 и седла U_1, U_2.
5. При $d_4^* < d < d_5^*, d_5^* \approx 0{,}058$ у отображения остается три устойчивые и две неустойчивые неподвижные точки.
6. Наконец, при $d = d_5^*$ симметричные друг другу устойчивые узлы S_3 и S_4 сливаются с симметричными седлами U_3 и U_4 и исчезают. При $d > d_5^*$ отображение имеет единственное нулевое устойчивое состояние.

Список литературы

1. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Релаксационные автоколебания в нейронных системах. II // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 12. С. 1675 – 1692. [English transl.: *Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* Relaxation self-oscillations in neuron systems: II // Differential Equations. 2011. V. 47, № 12. P. 1697–1713.]

2. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Релаксационные автоколебания в нейронных системах. III // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 2. С. 155 – 170. [English transl.: *Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* Relaxation self-oscillations in neuron systems: III // Differential Equations. 2012. V. 48, № 2. P. 159–175.]

Кащенко И. С. Метод квазинормальных форм в уравнениях с двумя большими разнопорядковыми запаздываниями (Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова)[1]. Рассмотрим дифференциальное уравнение с двумя запаздываниями

$$\dot{x} + x = ax(t - T_1) + bx(t - T_2) + f(x, x(t - T_1), x(t - T_2)),$$

где f – нелинейная функция, имеющая в нуле порядок малости выше первого. В предположении, что оба запаздывания T_1 и T_2 являются асимптотически большими, но разными по порядку, изучим локальную динамику этого уравнения в окрестности нулевого состояния равновесия. Первые результаты по этой задаче были получены в 2006 году (см. [1]). Положим

$$T_1 = \frac{1}{\varepsilon}, \quad T_2 = \frac{1}{c\varepsilon^{1+\alpha}}, \quad c > 0, \quad \alpha > 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

После стандартной перенормировки времени $t \to t\varepsilon^{-1}$ приходим к уравнению

$$\varepsilon\dot{x} + x = ax(t - 1) + b(t - (c\varepsilon^{\alpha})^{-1}) + f(x, x(t - 1), x(t - (c\varepsilon^{\alpha})^{-1})). \tag{1}$$

Анализ расположения корней характеристического квазиполинома линеаризованной в нуле задачи дает, что при $|a| + |b| < 1$ нулевое решение (1) асимптотически устойчиво, а при $|a| + |b| > 1$ – неустойчиво. Таким образом, случай $|a| + |b| = 1$ является критическим. При этом у характеристического уравнения существует бесконечное количество корней, стремящихся к мнимой оси при $\varepsilon \to 0$, и не существует корней в правой комплексной полуплоскости, отделенных от мнимой оси.

Изучим поведение решений в близком к критическому случае. Положим $a = a_0 + \varepsilon^{\beta} b_0 a_1$, $b = b_0 + \varepsilon^{\beta} b_0 b_1$, где $|a_0| + |b_0| = 1$. Отметим, что как результаты, так и процесс исследования

[1]Работа выполнена при поддержке проекта № 984 в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ.

существенно зависит от значения параметра β. Принципиально разными являются случаи $\beta = 2\min(1,\alpha)$ и $\beta < 2\min(1,\alpha)$.

Приведем основные виды квазинормальных форм – систем, динамика которых описывает поведение решений исходной задачи в окрестности нуля, возникающих при разных сочетаниях α, β и знаков a_0 и b_0.

Пусть сначала $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, $\beta = 2\min(1,\alpha)$. При $\alpha > 1$ (тогда $\beta = 2$) квазинормальная фома имеет вид параболического уравнения с периодическими краевыми условиями

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{a_0 c^3}{2b_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + (a_1 + b_1)u + du^2, \quad u(\tau, s) = u(\tau, s+1),$$

а при $\alpha < 1$ (тогда $\beta = 2\alpha$) уже имеем вырожденное параболическое уравнение с двумя пространственными переменными

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{a_0 c^3}{2b_0}\Big(1+\frac{a_0 c}{b_0^2}\Big)\left(\frac{\partial}{\partial r} + \theta_1\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 u+(a_1+b_1)u+du^2, \quad u(\tau,s,r) = u(\tau,s+1,r) = u(\tau,s,r+1).$$

Случай $\alpha = 1$ (а $\beta = 2$) является “комбинацией“ двух предыдущих:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{a_0 c^3}{2b_0}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \theta_1\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 u + \frac{a_0 c^3}{2b_0^3}\left((1+\theta_1)\frac{\partial}{\partial s} + a_0 c\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 u + (a_1 + b_1)u + du^2,$$

$$u(\tau,s,r) = u(\tau,s+1,r) = u(\tau,s,r+1).$$

Если $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, а $\beta < 2\min(1,\alpha)$, то результат структурно сохраняется. Квазинормальная форма – это уравнение параболического типа с одной или двумя пространственными переменными. Главное отличие – в краевых условиях. Они по-прежнему периодические, но период теперь является произвольной величиной (своей для каждой переменной). Таким образом, мы имеем сразу целое семейство квазинормальных форм.

В случаях, когда $a_0 < 0$ или $b_0 < 0$ меняется только тип нелинейности – она становится кубической.

В случае $b_0 = 0$ ситуация принципиально меняется. В этом случае $a_0 = \pm 1$. Квазинормальная форма принимает вид параболического уравнения с запаздыванием и отклонением пространственной переменной вида

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + b_1 u(\tau - c\varepsilon^{\alpha-\beta}, r+\theta_1) + du^2, \quad u(\tau,r) = u(\tau, r+z)$$

при $a_0 = 1$, и

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + b_1 u(\tau - c\varepsilon^{\alpha-\beta}, r+\theta_1) + du^3, \quad u(\tau,r) = -u(\tau, r+z)$$

при $a_0 = -1$. Отметим, что величина запаздывания в квазинормальной форме может быть асимптотически большой, в зависимости от соотношения между α и β.

Список литературы

1. *Kaschenko I.S.* Local dynamics of equation with two different by order delays // Book of abstracts of International conference «Tikhonov and conterporary mathematics». Moscow. June 19–25, 2006. P. 58–59.

Кубышкин Е.П., Литвинов К.В. Свойства решения одного линейного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом (Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова). Рассматривается дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом

$$\ddot{x}(t) + x(t) - \mu \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-ps^2} x(t+s)ds = 0, \tag{1}$$

в котором $p > 0, \quad 0 < \mu < 2(p/\pi)^{1/2}$.

Сформулируем для уравнения (1) постановку начальной задачи Коши и понятие решения. Введем для этого пространство непрерывных функций
$D_\sigma(R_-) = \{x_0(s) : -\infty < s \leqslant 0,\ ||x_0(s)|| = \sup\limits_{-\infty<s\leqslant 0} (\exp(-\sigma s^2) \times |x_0(s)|) < \infty,\ 0 < \sigma < p\}$.

Под решением задачи Коши уравнения (1), определенном при $t > \tau$, будем понимать функцию $x(t+s)$, $(\tau \leqslant t < \infty,\ -\infty < s \leqslant 0,\ x(t) \in C^1[\tau,\infty) \cap C^2(\tau,\infty))$, удовлетворяющую уравнению (1) и начальным условиям $x(\tau+s) = x_0(s) \subset D_\sigma(R_-),\ \dot{x}(\tau) = x_1 \in R$.

Существование решения задачи Коши для уравнения (1) и его единственность доказываются стандартным методом последовательных приближений.

Фазовым пространством уравнения (1) является пространство $E = D_\sigma(R_-) \oplus R$.

Изучим характер поведения решений уравнения (1). Положим $x(t) = e^{\lambda t}c$, где $\lambda \in C, \quad c \in R$ и подставим в (1). В результате для определения λ получим характеристическое уравнение.

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 1 - \mu \int\limits_{0}^{\infty} e^{-ps^2-\lambda s} ds = 0, \tag{2}$$

где [1, стр. 343]

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ps^2-\lambda s} ds = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\lambda^2/(4p)} \operatorname{erfc}\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{p}}\right), \quad \operatorname{erfc}(z) = 1 - \frac{2z}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{z^2}{1!3} + \frac{z^4}{2!5} - \frac{z^6}{3!7} + \dots\right).$$

Функция $P(\lambda)$ является целой функцией комплексного переменного. Характеристическое уравнение анализировалось численно. Как оказалось, уравнение (5) имеет всего 3 корня: один вещественный $-\lambda_0 < 0$, и два комплексно сопряженных $\lambda_\pm = \lambda_r \pm \lambda_i$ ($\lambda_r < 0$, $\lambda_i > 0$). При $p \to 0$ и $\mu \to 0$, $\lambda_0 \to -\infty, \lambda_r \to 0$.

Опишем структуру решений уравнения (1). Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение

$$\ddot{y}(t) + y(t) - \mu \int\limits_{0}^{\infty} e^{-ps^2} y(t+s)ds = 0, \tag{3}$$

фазовым пространством которого является пространство $H = D_\sigma(R_+) \oplus R$ элементов $(y_0(s), y_1)(0 \leqslant s < \infty)$ и задача Коши для которого разрешима в сторону убывания t. Это уравнение называется сопряженным с уравнением (1).

Между элементами $e(s) = (x_0(s), x_1) \in E$ и $h(s) = (y_0(s), y_1) \in H$ введем скалярное произведение

$$< e(s), h(s) >= x_0(0)y_1 + x_1 y_0(0) + \mu \int\limits_{-\infty}^{0} \int\limits_{0}^{s} e^{-ps^2} x(\xi) y(\xi - s) d\xi ds.$$

Утверждение 1. *Пусть* $x(t+s)$ *– решение уравнения* (1), *определенное при* $t > \tau_1$, $y(t+s)$ *– решение уравнения* (3), *определенное при* $t < \tau_2$, $\tau_1 < \tau_2$. *Тогда при* $\tau_1 < t < \tau_2$

$$< e(t+s), h(t+s) >= const, \quad e(t+s) = (x(t+s), \dot{x}(t)), \quad h(t+s) = (y(t+s), \dot{y}(t)).$$

Обозначим через E_+ и H_- ($\dim E_+, H_- = 3$) подпространства E и H, являющиеся соответственно линейными оболочками функций

$$e_0(s) = (e^{\lambda_0 s}, \lambda_0), \quad e_c(s) = (e^{\lambda_r s}\cos(\lambda_i s), \lambda_r), \quad e_s(s) = (e^{\lambda_r s}\sin(\lambda_i s), \lambda_i)$$

и

$$h_0(s) = (e^{-\lambda_0 s}, -\lambda_0), \quad h_c(s) = (e^{-\lambda_r s}\cos(\lambda_i s), -\lambda_r), \quad h_s(s) = (e^{-\lambda_r s}\sin(\lambda_i s), \lambda_i).$$

Обозначим $E_- = \{e(s) \in E, \quad < e(s), h(s) >= 0, \quad h(s) \in H_-\}$. Очевидно $E = E_+ \oplus E_-$.

Утверждение 2. *Пусть* $x_-(t+s)$ *– решение уравнения* (1), *определенное при* $t > \tau$, *с начальными условиями*

$$x_-(\tau+s) = x_0(s), \quad \dot{x}_-(\tau) = x_1, \quad (x_0(s), x_1) \in E_-.$$

Тогда $|x_-(t)| = O(e^{-\sigma t})$, *при* $t \to \infty$ *для любого* $\sigma > 0$.

Совокупность решений уравнения (1) с начальными условиями из E_+ определяется линейными комбинациями функций $e^{\lambda_0(t+s)}, e^{\lambda_r(t+s)}\cos(\lambda_i(t+s)), e^{\lambda_r(t+s)}\sin(\lambda_i(t+s))$.

Список литературы

1. *Прудников А. П.,Брычков Ю. А.,Маричев О. И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 800 с. [English transl.: *Prudnikov A., Brychkov Yu., Marichev O.* Integrals and Series. M .: Nauka, 1981.]

Марушкина Е. А. Фазовая модель системы из четырех диффузионно слабо связанных осцилляторов на окружности (Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова)[1]. Рассматривается система диффузионно слабо связанных осцилляторов

$$\dot{u}_j = \mu\varepsilon D(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) + (A_0 + \varepsilon A_1)u_j + F_2(u_j, u_j) + F_3(u_j, u_j, u_j) + O(\| u_j \|^4), \quad (1)$$

где $u_j(t) \in \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, $j = 1,2,3,4$, $u_0 = u_3$, $u_4 = u_1$, $m \times m$ матрица A_0 имеет пару чисто мнимых собственных чисел $\pm i\omega$, причем остальные ее собственные числа лежат в левой комплексной полуплоскости. Для $m \times m$ матрицы A_1 и квадратичной и кубической нелинейностей $F_2(u,u)$ и $F_3(u,u,u)$ будем считать выполненными условия бифуркации Андронова – Хопфа, то есть при достаточно малых значениях параметра $0 < \varepsilon \ll 1$ у каждого отдельного осциллятора от нулевого состояния равновесия ответвляется орбитально устойчивый цикл. Обозначим a собственный вектор матрицы A_0 такой, что $A_0 a = i\omega a$, соответственно b — удовлетворяет сопряженной системе $A^T b = -i\omega b$, причем $(a,b) = 1$. Величины $\varphi_0 + i\psi_0 = (A_1 a, b)$ и $d_0 + ic_0 = (F_3(\bar{a},a,a) + F_3(a,\bar{a},a) + F_3(a,a,\bar{a}) + F_2(a,w_0) + F_2(w_0,a) + F_2(w_1,\bar{a}) + F_2(\bar{a},w_1), b)$, где $w_0 = -A_0^{-1}\left(F_2(a,\bar{a}) + F_2(\bar{a},a)\right)$, $w_1 = (2i\omega E - A_0)^{-1}F_2(a,a)$, позволяют сформулировать условие возникновения указанной фазовой перестройки. Для рождения цикла необходимо, чтобы $\varphi_0 > 0$, $d_0 < 0$. Рассмотрим задачу об устойчивых режимах, возникающих у системы (1) при изменении параметра $\mu > 0$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке проекта 1875 госзадания на НИР №2014/258.

Выполним в (1) стандартную замену асимптотического метода Крылова–Боголюбова–Митропольского (см., например, [1])

$$u_j = \sqrt{\varepsilon} u_{0,j}(t,s) + \varepsilon u_{1,j}(t,s) + \varepsilon^{3/2} u_{2,j}(t,s) + \ldots, \quad j = 1,2,3,4, \tag{2}$$

где $s = \varepsilon t$ — медленное время, $u_{0,j}(t,s) = z_j(s)\exp(i\omega t)a + \bar{z}_j(s)\exp(-i\omega\tau_j)\bar{a}$, функции $u_{k,j}(t,s)$ $2\pi/\omega$-периодичны по t. В результате этой замены на третьем шаге после отбрасывания слагаемых высшего порядка малости система (1) преобразуется к виду

$$z_j' = (\varphi_0 + i\psi_0)z_j + (d_0 + ic_0)|z_j|^2 z_j + \mu\varkappa\exp(i\delta)(z_{j-1} - 2z_j + z_{j+1}), \quad j = 1,2,3,4, \tag{3}$$

где $z_0 = z_3$, $z_4 = z_1$, $(Da, b) = \varkappa\exp(i\delta)$, штрихом обозначена производная по s. Следуя [2, 3, 4], выполним в (3) полярную замену $z_j = \xi_j \exp\tau_j$ и обозначим $\alpha_j = \tau_{j+1} - \tau_j$, $j = 1,2,3$, при этом $\alpha_0 = \alpha_4 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$.

При $\mu = 0$ система (3) имеет глобально экспоненциально устойчивое интегральное многообразие $\xi_j = (-\varphi_0/d_0)^{1/2}$, $j = 1,2,3,4$, поведение траекторий на котором описывается уравнениями $\alpha_j' = 0$, $j = 1,2,3$. Можно показать, что при всех малых μ она имеет аналогичное интегральное многообразие, уравнения на котором имеют в первом приближении вид

$$\begin{aligned}
\alpha_1' &= 2\sin\alpha_1 + \sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) - \sin\alpha_2 + \kappa(\cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) - \cos\alpha_2),\\
\alpha_2' &= 2\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1 - \sin\alpha_3 + \kappa(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_3),\\
\alpha_3' &= 2\sin\alpha_3 + \sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) - \sin\alpha_2 + \kappa(\cos\alpha_2 - \cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)),
\end{aligned} \tag{4}$$

где $\kappa = (x_0 + b_0)/(x_0 b_0 - 1)$, $x_0 = -\operatorname{Im}(Da, b)/\operatorname{Re}(Da, b)$, $b_0 = c_0/d_0$. Для системы (4) в [2] показано, что в ее фазовом пространстве имеются области, заполненные предельными циклами. Негрубый характер полученных режимов не позволяет сделать каких-либо выводов относительно существования устойчивых режимов в системе (1).

Для системы (3) построим асимптотические формулы устойчивого интегрального многообразия и системы фазовых уравнений на нем более высокой степени точности. Уточненная система, выписанная для переменных $x_1 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \pi)/2$, $x_2 = (\alpha_2 + \alpha_3 + \pi)/2$, $x_3 = (\alpha_1 + \alpha_3 + \pi)/2$, приобретает вид

$$\begin{aligned}
x_1' &= \varkappa^* \cos x_1 \sin x_2 \sin(x_3 + \gamma) - \frac{\mu}{2\varphi_0}\Big(\cos x_3\Big(\cos x_3 + x_0(\sin x_3 - 2\sin x_3\cos 2x_2)\Big) +\\
&\quad + \frac{\kappa}{2}\Big(-\frac{1}{2}\sin 2x_3 + x_0(\cos^2 x_3 - \cos 2x_3\cos 2x_2)\Big)\Big)\sin 2x_1\,,\\
x_2' &= \varkappa^* \sin x_1 \cos x_2 \sin(x_3 - \gamma) - \frac{\mu}{2\varphi_0}\Big(\cos x_3\Big(\cos x_3 + x_0(\sin x_3 - 2\sin x_3\cos 2x_1)\Big) +\\
&\quad + \frac{\kappa}{2}\Big(\frac{1}{2}\sin 2x_3 + x_0(\cos^2 x_3 - \cos 2x_3\cos 2x_1)\Big)\Big)\sin 2x_2\,,\\
x_3' &= 4\sin x_1 \sin x_2 \cos x_3 + \frac{\mu}{2\varphi_0}\kappa\Big(\cos x_3(\cos 2x_2 - \cos 2x_1) +\\
&\quad + x_0 \sin x_3(2\cos 2x_1\cos 2x_2 - \cos 2x_1 - \cos 2x_2)\Big)\cos x_3\,,
\end{aligned}$$

где $\varkappa^* = (4 + \kappa^2)^{1/2}$, $\gamma = \arccos\big(2(4+\kappa^2)^{-1/2}\big)$.

При $\mu \neq 0$ представляет интерес нахождение всех негрубых решений полученной системы.

Список литературы

1. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю.* Локальные методы анализа динамических систем: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2006. 92 с. [*Glyzin S.D., Kolesov A.Yu.* Lokalnye metody

analiza dinamicheskikh sistem: uchebnoe posobie. Yaroslavl: YarGU, 2006. 92 c. (in Russian)].

2. *Глызин С.Д.* Разностные аппроксимации уравнения «реакция-диффузия» на отрезке // Моделирование и анализ информационных систем. 2009. Т. 16, № 3. С. 96 – 116. [*Glyzin S. D.* Difference approximations of "reaction – diffusion" equation on a segment // Modeling and Analysis of Information Systems. 2009. V. 16, No 3. P. 96 – 116 (in Russian).]

3. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Конечномерные модели диффузионного хаоса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50, № 5. С. 860 – 875. [English transl.: *Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., and Rozov N. Kh.* Finite-dimensional models of diffusion chaos // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2010. V. 50. No 5. P. 816 – 830.]

4. *Глызин С.Д.* Размерностные характеристики диффузионного хаоса // Моделирование и анализ информационных систем. 2013. Т. 20, № 1. С. 30–51. [*Glyzin S. D.* Dimensional Characteristics of Diffusion Chaos // Modeling and Analysis of Information Systems. 2013. V. 20, No 1. P. 30–51 (in Russian).]

Морякова А.Р. Исследование колебательных решений дифференциально-разностного уравнения второго порядка в одном критическом случае (Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова). Рассматривается дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом

$$\ddot{x} + A\dot{x} + x + f(x(t-h)) + g(\dot{x}(t-h)) = 0, \tag{1}$$

в котором $A, h > 0,\ f(x) = f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + ...,\ g(x) = g_1x + g_2x^2 + g_3x^3 + ...$ гладкие при $|x| \leqslant x_0$ функции.

Изучаются автоколебательные решения, бифурцирующие из нулевого состояния равновесия при изменении параметров.

Проведен анализ расположения корней характеристического уравнения $\lambda^2 + A\lambda + 1 + (f_1 + \lambda g_1)e^{-\lambda h} = 0$ линейной части уравнения (1) методом D-разбиений [1], из которого следует, что при определенных значениях параметров корни уравнения лежат в левой комплексной полуплоскости, за исключением двух пар комплексно-сопряженных корней вида $\pm i\sigma_j,\ j = 1, 2,\ 0 < \sigma_1 < \sigma_2$, для которых реализуется резонанс $1:3$ $(\sigma_2/\sigma_1 = 3)$. Так, при значениях параметров $A = A_0 \approx 0.768,\ \ f_1 = f_{10} \approx 0.827,\ \ g_1 = g_{10} \approx -0.8,\ \ h = h_0 \approx 4.996$ имеем $\sigma_1 \approx 0.432,\ \sigma_2 \approx 1.29$ и резонанс $1:3$ проводится при изменении параметров. Этот критический случай представляет интерес с точки зрения теории бифуркаций.

Положим в (1) $A = A_0 + \varepsilon A_1,\ f_1 = f_{10} + \varepsilon f_{11},\ g_1 = g_{10} + \varepsilon g_{11},\ h = h_0 + \varepsilon h_1$ и применим метод интегральных многообразий для качественного исследования поведения решений уравнения (1) в окрестности нулевого решения. Этот метод позволяет выделить в фазовом пространстве исходной задачи локальное асимптотически устойчивое гладкое инвариантное четырехмерное многообразие $M(\varepsilon)$ и построить систему обыкновенных дифференциальных уравнений, поведение решений которой определяет поведение решений исходного уравнения на этом многообразии и в окрестности нулевого решения. Эта система в рассматриваемом критическом случае имеет следующий вид:

$$\dot{z}_1 = (i\sigma_1 + \lambda_1^1\varepsilon + d_{11}|z_1|^2 + d_{12}|z_2|^2)z_1 + A_1\bar{z}_1^2 z_2 + \ldots = Z_1(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2; \varepsilon), \tag{2}$$

$$\dot{z}_2 = (i\sigma_2 + \lambda_2^1\varepsilon + d_{21}|z_1|^2 + d_{22}|z_2|^2)z_2 + A_2 z_1^3 + \ldots = Z_2(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2; \varepsilon), \tag{3}$$

в которой $z_j(t) \in C$, $\lambda_j = \tau_j^1 + i\sigma_j^1, d_{ij} = a_{ij} + ib_{ij}, A_j = |A_j|\exp(i\gamma_j)$ – комплексные коэффициенты, точками обозначены слагаемые более высокого порядка малости по z_1, z_2.

Положим $z_j = \varepsilon^{1/2}\rho_j \exp(i\tau_j), \rho_j \geqslant 0, (j = 1, 2)$ и перейдем к "медленным" переменным $\rho_1, \rho_2, \theta = 3\tau_1 - \tau_2$. Выполнив нормировку времени $t \to t/\varepsilon$, рассмотрим укороченную систему уравнений "медленных" переменных. Подберем значения параметров так, чтобы $\tau_1^1 = \tau_2^1 = 1$ и, считая $a_{11}, a_{22} < 0$, проведем нормирующие замены переменных $\rho_j = \xi_j/\sqrt{|a_{jj}|}$, $j = 1, 2$, которые позволяют перейти к системе уравнений

$$\dot{\xi}_1 = (1 - \xi_1^2 + a_1\xi_2^2)\rho_1 + b_1\cos(-\theta + \gamma_1)\xi_1^2\xi_2, \tag{4}$$

$$\dot{\xi}_2 = (1 + a_2\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi_2 + b_2\cos(\theta + \gamma_2)\xi_1^3, \tag{5}$$

$$\dot{\theta} = 3\sigma_1^1 - \sigma_2^1 + a_3\xi_1^2 + a_4\xi_2^2 - 3b_1\sin(-\theta + \gamma_1)\xi_1\xi_2 - b_2\sin(\theta + \gamma_2)\xi_1^3/\xi_2. \tag{6}$$

Система (4)–(6) анализировалась численно с помощью программы Tracer 3.7 (использовались методы, изложенные в [2]). Выберем $a_1 < 0$, $a_2 < 0$ и зафиксируем значения параметров σ_1^1, σ_2^1, b_2, a_3, a_4, γ_1, γ_2. Будем изменять значение параметра b_1. Было отмечено существование следующего бифуркационного сценария: при $b_1 < b_1^* \approx 0.2$ существует устойчивое состояние равновесия, которое при увеличении b_1 теряет устойчивость и в системе возникает периодическое решение. При дальнейшем увеличении b_1 наблюдается серия бифуркаций удвоения периода и возникновение хаотических колебаний. Эти колебания наблюдаются при $b_1 \in [0.2, 0.24]$. При $b_1 = 0.23$ были вычислены ляпуновские показатели и ляпуновская размерность, которые оказались следующими: $\lambda_1 \approx 0.68$, $\lambda_2 \approx 0$, $\lambda_3 \approx -2.58$, $d_L \approx 2.63$.

Список литературы

1. *Неймарк Ю. И.* D-разбиение пространства квазиполиномов (к устойчивости линеаризованных распределенных систем) // ПММ. 1949. Т. 13, № 4. С. 349–380. [*Neymark Yu. I.* D- razbienie prostranstva kvazipolinomov (k ustoychivosti linearizovannykh raspredelennykh sistem) // PMM. 1949. T. 13, № 4. S. 349–380 (in Russian).]

2. *Глызин Д. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 2. С. 268 – 273. [English transl.: *Glyzin D.S., Glyzin S.D., Kolesov A.Yu., and Rozov N.Kh.* The Dynamic Renormalization Method for Finding the Maximum Lyapunov Exponent of a Chaotic Attractor // Differential Equations. 2005. V. 41. No. 2. P. 284–289.]

Преображенская М.М. Численный анализ явления буферности в квазилинейном уравнении Кортевега–де Фриза (Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова). Рассматривается краевая задача

$$u_t + u_{xxx} = \varepsilon\varkappa u_{xx} + \varepsilon u - u^3, \quad u(t, x + 1) = -u(t, x), \tag{1}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, $\varkappa = const > 0$. В качестве фазового пространства взято соболевское пространство W_2^3 антипериодических с периодом 1 функций.

Задача (1) была получена в работе [1] методами статьи [2] как квазинормальная форма уравнения с двумя запаздываниями, моделирующего поведение отдельного нейрона [3]. Для этой квазинормальной формы исследовался вопрос существования и устойчивости инвариантных торов различной размерности и был получен следующий результат.

Теорема. *По каждому натуральному n можно указать такое достаточно малое $\varepsilon_n > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_n$ и при параметре $\varkappa < (2\omega_n^2 - \omega_1^2)^{-1}$ у задачи (1) существует устойчивая бегущая волна, задающаяся равенством*

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_0(y) + O(\varepsilon^{3/2}), \tag{2}$$

где $y = (2n-1)\pi x + \omega_n(\varepsilon)t$, $\omega_n(\varepsilon) = (2n-1)^3\pi^3 + O(\varepsilon)$. Торы размерности два и выше системы (1) неустойчивы.

Число $K(\varkappa)$ устойчивых циклов краевой задачи (1) удовлетворяет неравенству

$$K(\varkappa) \geqslant \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{\pi^2\varkappa} + 1} + 1\right)\right]. \tag{3}$$

Отсюда следует, что $K(\varkappa)$ неограниченно растет с уменьшением параметра $\varkappa$.

В настоящей работе представлен результат численного анализа, подтверждающий теоретические выводы статьи [1]. Указанные в теореме циклы обладают свойством устойчивости не только при малых значениях параметра $0 < \varepsilon \ll 1$, но и при $\varepsilon \sim 1$. Однако проверить это удается лишь с помощью компьютерного моделирования. Для описания соответствующего численного эксперимента фиксируем произвольное натуральное N и заменим частные производные по x в (1) приближенными равенствами (см. [2])

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\Big|_{x=\frac{k}{N}} \approx N^2(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}),\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,x)\Big|_{x=\frac{k}{N}} \approx \frac{N^3}{2}(u_{k+2} - 2u_{k+1} + 2u_{k-1} - u_{k-2}), \tag{4}$$

где $u_k = u(t,x)\big|_{x=\frac{k}{N}}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

После замены (4) и нормировки времени $\frac{N^3}{2} \mapsto N$ приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u_k} = -(u_{k+2} - 2u_{k+1} + 2u_{k-1} - u_{k-2}) + \frac{2\varepsilon\varkappa}{N}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) + \frac{2\varepsilon u_k}{N^3} - \frac{2u_k}{N^3},$$
$$k = 0, 1, \ldots, N-1,\ u_N = -u_1,\ u_{-1} = u_{N-1}.$$

Численный анализ модели проводился с помощью пакета программ *tracer 3.7*, разработанного Д.С. Глызиным (использовался метод Рунге–Кутта четвертого порядка точности с шагом 10^{-3}), при $N = 25$, $\varkappa = 10^{-3}$, $\varepsilon = 1$ и начальных условиях

$$u_{0k} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\frac{(2j+1)\pi k}{N},\ k = 1, \ldots, N. \tag{5}$$

Из (3) следует, что количество $K(\varkappa)$ одновременно существующих устойчивых циклов задачи (1) при $\varkappa = 10^{-3}$ удовлетворяет оценке $K(\varkappa) \geqslant 5$, что подтверждается численным экспериментом. Действительно, в результате численного исследования удалось обнаружить пять различных устойчивых циклов. Таким образом, полученная в [1] теория работает не только при малых значениях параметра $\varepsilon \ll 1$, на качественном уровне результаты сохраняются при $\varepsilon \sim 1$ и задача (1) обладает свойством буферности в том числе и при $\varepsilon \sim 1$.

Список литературы

1. *Преображенская М. М.* Применение метода квазинормальных форм к математической модели отдельного нейрона // Моделирование и анализ информационных систем. 2014. Т. 21, № 5. С. 38–48. [*Preobrazhenskaia M. M* Application of the Method of Quasi-Normal Forms to the Mathematical Model of a Single Neuron // Modeling and Analysis of Information Systems. 2014. V. 21, № 5. P. 38–48 (in Russian)].

2. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Экстремальная динамика обобщенного уравнения Хатчинсона // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49, № 1. С. 76–89. [English transl.: *Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* Extremal dynamics of the generalized Hutchinson equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2009. V. 49, No. 1. P. 71–83.]

3. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Явление буферности в нейродинамике // Доклады академии наук. 2012. Т. 443, № 2. С. 1–5. (English transl.: *Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* Buffer phenomenon in neurodynamics // Doklady Mathematics. 2012. V. 85. No. 2. P. 297–300.)

Толбей А. О. Локальная динамика кольца из трех однонаправленно связанных осцилляторов (Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова)[1]. Проблема предсказания сложного коллективного поведения ассоциаций связанных осцилляторов различной природы естественным образом возникает в большом числе приложений, и ее решение является актуальной задачей. Нейронные сети дают один из наиболее важных для приложений пример систем, обладающих сложным коллективным поведением. Принципиальными характеристиками сети, определяющими ее поведение, является характер и структура связей между элементами, для выявления особенностей динамики таких сетей представляет интерес изучение простейших ассоциаций близких осцилляторов. В статье [1] построен полный набор сетей из трех элементов с различными типами связей между ними. Остановимся на однонаправленном взаимодействии как одном из вариантов такой структуры. Учитывая, что системы, описывающие отдельные импульсные нейроны, являются колебательными, для локального анализа естественно предположить, что каждый осциллятор системы находится вблизи бифуркации Андронова–Хопфа, и изучить задачу об их взаимодействии. Рассмотрим общую постановку задачи о слабом однонаправленном взаимодействии трех осцилляторов

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= (A_0 + \varepsilon A_1)u_1 + F(u_1) + \varepsilon D(u_2 - u_1), \\ \dot{u}_2 &= (A_0 + \varepsilon A_1)u_2 + F(u_2) + \varepsilon D(u_3 - u_2), \\ \dot{u}_3 &= (A_0 + \varepsilon A_1)u_3 + F(u_3) + \varepsilon D(u_1 - u_3). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $u_1(t), u_2(t), u_3(t) \in \mathbb{R}^n$. Среди собственных чисел $n \times n$ матрицы A_0 имеется единственная чисто мнимая пара $\pm i\omega$, которой отвечают собственные векторы a и $\bar{a}$ такие, что $(a, b) = 1$, где вектор b определяется из системы $A_0^* b = -i\omega b$. Все остальные собственные числа A_0 лежат в левой комплексной полуплоскости. Гладкая нелинейность $F(u) = F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + F_*(u, \varepsilon)$ состоит из квадратичной F_2 и кубической F_3 симметричных форм, остаток F_* имеет порядок $O\left(||u||^4 + \varepsilon||u||^2 + \varepsilon^2||u||\right)$. A_1 и D — $n \times n$ постоянные матрицы, причем матрица D характеризует связь между осцилляторами. Наконец, $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр. Для изучения динамики системы (1) воспользуемся стандартной заменой метода нормальных форм

$$u_j(t, \tau) = \sqrt{\varepsilon} u_{0,j}(t, \tau) + \varepsilon u_{1,j}(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} u_{1,j}(t, \tau) + \ldots, \quad j = 1, 2, 3, \tag{2}$$

где $\tau = \varepsilon t$ — медленное время, $u_{0,j} = z_j(\tau) a \exp(i\omega t) +$ к.с., $z_j(\tau)$, $j = 1, 2, 3$ – подлежащие определению комплексные амплитуды, а функции $u_{s,j}(t, \tau)$, $s = 1, 2$ – некоторые тригонометрические полиномы переменной ωt с коэффициентами, зависящими от медленного времени τ. Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$ позволяет

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке проекта 1875 госзадания на НИР №2014/258.

получить для $z_j(\tau)$ укороченную нормализованную систему следующего вида:

$$\begin{aligned} z_1' &= (\varphi_0 + i\psi_0)z_1 + (d_0 + ic_0)z_1|z_1|^2 + \varkappa\exp(i\delta)(z_2 - z_1), \\ z_2' &= (\varphi_0 + i\psi_0)z_2 + (d_0 + ic_0)z_2|z_2|^2 + \varkappa\exp(i\delta)(z_3 - z_2), \\ z_3' &= (\varphi_0 + i\psi_0)z_3 + (d_0 + ic_0)z_3|z_3|^2 + \varkappa\exp(i\delta)(z_1 - z_3). \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь штрихом обозначена производная по τ, $\varphi_0+i\psi_0 = (A_1a, b)$, $d_0+ic_0 = 2(F_2(w_0, a), b)+2(F_2(w_2, \overline{a}), b)+3(F_3(a, a, \overline{a}), b)$, $w_0 = -2A_0^{-1}F_2(a, \overline{a})$, $w_2 = [2i\omega I - A_0]^{-1}F_2(a, a)$, $\varkappa\exp(i\delta) = (Da, b)$. Для системы (3) выполнено утверждение о соответствии (см. [2, 3]), которое состоит в том, что *если система* (3) *имеет некоторый автомодельный цикл или тор, экспоненциально орбитально устойчивый или дихотомичный, то найдется такое достаточно малое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при всех* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *исходная система* (1) *имеет цикл или тор с теми же свойствами устойчивости.* Сформулированное утверждение позволяет перейти от относительно сложной системы (1) к существенно более простой системе (3) и заняться задачей отыскании ее грубых решений. Основной результат, подробному описанию которого планируется посвятить отдельную публикацию, состоит в том, что система (3) при подходящем выборе параметров может иметь несколько сосуществующих устойчивых режимов типа бегущих волн, кроме того, динамика решений системы (3) может быть достаточно сложной и носить неупорядоченный характер.

Список литературы

1. *Uri Alon.* Network motifs: theory and experimental approaches // Nature Genetics. 2007. V. 8. P. 450–461.

2. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* О явлениях хаоса в кольце из трех однонаправленно связанных генераторов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46, № 10. С. 1809 – 1821. [English transl.: *Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* Chaos Phenomena in a Circle of Three Unidirectionally Connected Oscillators // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2006. V. 46, No. 10. P. 1724–1736.]

3. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Явление буферности и хаос в кольцевых цепочках однонаправленно связанных генераторов // Доклады Академии наук. 2014. Т. 457. №3. С. 278–281. [English transl.: *Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* Buffer Phenomenon and Chaos in Circular Chains of Unidirectionally Coupled Oscillators // Doklady Mathematics. 2014. Vol. 90, No. 1. P. 509 – 513.]

Тряхов М.С. Оптимальное управление поведением решений начально-краевой задачи, моделирующей динамику телескопического манипулятора (Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова)[1]. Рассматривается нелинейная начально-краевая задача

$$J(l)\ddot{\theta} - \int\limits_0^l (b + l - x_1)u_{tt}^{(1)}(x_1, t)dx_1 + 2\dot{l}\dot{\theta}(b - l - 1/2) = M(t), \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при поддержке проекта № 984 в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ.

$$(1+m)\ddot{z} + \int\limits_0^l u_{tt}^{(2)}(x,t)dx = F_1(t), \tag{2}$$

$$\ddot{l} - \dot{\theta}^2(b+l-1/2) = F_2(t), \tag{3}$$

$$u_{tt}^{(1)} + u_{xxxx}^{(1)} = (b+l-x)\ddot{\theta} + 2\dot{l}\dot{\theta}, \tag{4}$$

$$u_{tt}^{(2)} + u_{xxxx}^{(2)} = -\ddot{z} - g, \tag{5}$$

$$u_{xx}^{(j)}(0,t) = u_{xxx}^{(j)}(0,t) = 0, u^{(j)}(l,t) = u_x^{(j)}(l,t) = 0, \tag{6}$$

$$\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \theta_1, z(0) = z_0,\ \dot{z}(0) = z_1,$$

$$l(0) = l_0, \dot{l}(0) = l_1, u^{(j)}(x,0) = u_0^{(j)}(x), u_t^{(j)}(x,0) = u_1^{(j)}(x),\ (j=1,2,\ 0 \leqslant x \leqslant l(0)). \tag{7}$$

относительно функций $\theta = \theta(t), z = z(t), l = l(t) > 0$ и $u^{(j)} = u^{(j)}(x,t)$ области $Q_{l,T} = \{0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$, где $M(t), F_j(t) \in L_2(0,T),\ (j=1,2), J(l) = J_0 + 1/3 + (b+l)[(b+l)-1] > 0$, J_0, m, b и g – положительные параметры.

Манипулятор обладает тремя степенями свободы и представляет собой твердое тело, которое может двигаться вдоль вертикальной стойки-основания под действием силы $F_1(t)$. Твердое тело служит направляющей для горизонтальной упругой руки длины $l(t)$, которая может перемещаться в горизонтальном направлении под действием силы $F_2(t)$. Твердое тело может поворачиваться вокруг вертикальной стойки под действием момента $M(t)$. Вывод уравнений (1) – (7) движения такой системы имеется в монографии [1].

В докладе для начально-краевой задачи (1) – (7) сформулировано понятие обобщенного решения с введением соответствующих функциональных пространств и интегральных соотношений, определяющих обобщенное решение.

Для начально-краевой задачи (1) – (7) предложен алгоритм решения следующих задач оптимального управления.

Задача 1. *Определить функции $M(t), F_1(t), F_2(t) \in L_2(0,T)$, переводящие решение начально-краевой задачи* (1) – (7) *из начального положения* (7) *в конечное*

$$\theta(T) = \theta_{0T},\ \dot{\theta}(T) = \theta_{1T}, z(T) = z_{0T}, z(T) = z_{1T}, l(T) = l_{0T}, \dot{l}(T) = l_{1T}, u(x,T) = u_{0T}(x),$$

$$u_t^{(j)}(x,T) = u_{1T}^{(j)}(x)\ (0 \leqslant x \leqslant l(T),\ j=1,2), \tag{8}$$

в заданный момент времени T и минимизирующие функционал

$$\Phi(M,F_1,F_2) = \|M(t)\|^2_{L_2(0,T)} + \|F_1(t)\|^2_{L_2(0,T)} + \|F_2(t)\|^2_{L_2(0,T)}.$$

Задача 2 (задача быстродействия). *Определить функции $M(t), F_1(t) \in L_2(0,T)$, $F_2(t) \in L_2(0,T)$, $\Phi(M,F_1,F_2) \leqslant L < \infty$, переводящие решение начально-краевой задачи* (1) – (7) *из* (7) *в* (8) *за минимальное время T .*

Список литературы

1. *Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н., Градецкий В. Г.* Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. М.: Наука, 1989. 363 с. [*Chernousko F.L., Bolotnik N.N., Gradetskiy V.G.* Manipulyatsionnye roboty: dinamika, upravlenie, optimizatsiya. M.: Nauka, 1989. 363 s. (in Russian)].

Seminar “Nonlinear Dynamics”

The workshop of the Nonlinear Dynamics scientific-educational center continued its work in 2014, focusing on methods of the dynamical system analysis and studies of their behavior. More than 30 talks in the field of scientific-educational center research have been made this year. The talk topics included numerical analysis of traveling waves in the Fisher–KPP equation with delay and simulations of the two-phase heat distribution problem using heterogeneous computing architectures. In a number of talks normal and quasi-normal forms of differential equations with several delays were derived and studied, also one talk considered a problem of optimal control of a telescopic manipulator. The selected talk abstracts are presented in this issue of the journal.