Модел. и анализ информ. систем. Т. **21**, № **5** (2014) 5–37

УДК 517.929

Метод центральных многообразий в задаче асимптотического интегрирования функционально-дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами. II[1]

Нестеров П.Н.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

e-mail: nesterov.pn@gmail.com

получена 14 февраля 2014

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, критическое многообразие, асимптотическое интегрирование, метод усреднения, теорема Левинсона

В работе исследуется задача асимптотического интегрирования некоторого класса линейных систем функционально-дифференциальных уравнений в окрестности бесконечности. Изучается вопрос о построении асимптотики решений указанных систем в критическом случае. Во второй части работы установлен факт существования критического многообразия для рассматриваемого класса систем и изучены основные его свойства. Рассмотрена задача построения асимптотики решений редуцированной на критическое многообразие системы. В качестве примера использования предложенного в работе метода асимптотического интегрирования строится асимптотика решений одного скалярного уравнения с запаздыванием.

1. Постановка задачи

Во второй части работы продолжаются начатые в [4] исследования вопроса о построении асимптотики при $t \to \infty$ решений следующей системы функционально-дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = B_0 x_t + G(t, x_t). \tag{1}$$

Здесь $x \in \mathbb{C}^m$, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ $(-h \le \theta \le 0)$ — элемент пространства $C_h \equiv C\big([-h,0],\mathbb{C}^m\big)$ непрерывных на $[-h,0]$ функций со значениями в $\mathbb{C}^m$. Далее, B_0 —

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ № МК-80.2013.1 и проекта 1875 госзадания на НИР №2014/258.

линейный ограниченный оператор, действующий из C_h в $\mathbb{C}^m$ и не зависящий от t, а оператор $G(t, x_t)$ допускает представление в виде

$$G(t, x_t) = B(t, x_t) + R(t, x_t). \tag{2}$$

В этой формуле $B(t, \cdot)$ и $R(t, \cdot)$ — линейные ограниченные операторы, действующие из C_h в $\mathbb{C}^m$, такие, что при любом фиксированном $\varphi \in C_h$ функции $B(t, \varphi)$ и $R(t, \varphi)$ измеримы по Лебегу при $t \geq t_0$ и, кроме того,

$$|R(t, \varphi)| \leq \gamma(t) \|\varphi\|_{C_h}, \quad \gamma(t) \in L_1[t_0, \infty) \quad \Big(\|\varphi\|_{C_h} = \sup_{-h \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)| \Big). \tag{3}$$

Оператор $B(t, \varphi)$ устроен следующим образом:

$$B(t, \varphi) = \sum_{i=1}^{n} v_i(t) B_i(t, \varphi) + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) B_{i_1 i_2}(t, \varphi) + \ldots + \\ + \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n} v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_k}(t) B_{i_1 \ldots i_k}(t, \varphi). \tag{4}$$

Здесь $B_{i_1 \ldots i_l}(t, \cdot)$ — линейные ограниченные операторы, действующие из пространства C_h в пространство $\mathbb{C}^m$, относительно которых предполагается, что

$$B_{i_1 \ldots i_l}(t, \varphi) = \sum_{j=1}^{L} \Gamma_j^{(i_1 \ldots i_l)}(t) \ell_j^{(i_1 \ldots i_l)}(\varphi), \qquad \varphi \in C_h. \tag{5}$$

В формуле выше $\ell_j^{(i_1 \ldots i_l)}(\varphi)$ — линейные ограниченные операторы, не зависящие от t и действующие из C_h в $\mathbb{C}^m$, а $\Gamma_j^{(i_1 \ldots i_l)}(t)$ — матрицы, элементами которых являются тригонометрические многочлены, т.е.

$$\Gamma_j^{(i_1 \ldots i_l)}(t) = \sum_{s=1}^{M} \beta_{sj}^{(i_1 \ldots i_l)} e^{\mathrm{i} \omega_s t}, \tag{6}$$

где $\beta_{sj}^{(i_1 \ldots i_l)}$ — постоянные, вообще говоря, комплексные $(m \times m)$-матрицы, а ω_s — вещественные числа. Наконец, $v_1(t), \ldots, v_n(t)$ — скалярные абсолютно непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции такие, что

1^0. $v_1(t) \to 0, v_2(t) \to 0, \ldots, v_n(t) \to 0$ при $t \to \infty$;

2^0. $\dot{v}_1(t), \dot{v}_2(t), \ldots, \dot{v}_n(t) \in L_1[t_0, \infty)$;

3^0. Найдется такое $k \in \mathbb{N}$, что произведение $v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) \ldots v_{i_{k+1}}(t) \in L_1[t_0, \infty)$ для любого набора $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_{k+1} \leq n$.

Основное предположение, при котором система (1) рассматривается в данной работе, состоит в следующем. Характеристическое уравнение

$$\det \Delta(\lambda) = 0, \qquad \Delta(\lambda) = \lambda I - B_0(e^{\lambda \cdot} I), \tag{7}$$

построенное для линейной автономной системы

$$\dot{x} = B_0 x_t, \tag{8}$$

имеет N корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ на мнимой оси с учетом их кратностей, а вещественные части остальных корней отрицательны. Данное предположение можно записать в виде следующих гипотез $\mathbf{H_1}$ и $\mathbf{H_2}$. Пусть

$$\Lambda = \big\{\lambda_i \in \mathbb{C} \;\big|\; \det \Delta(\lambda_i) = 0,\ i = 1, \ldots, N\big\}. \tag{9}$$

Предположим, что:

$\mathbf{H_1}$. $\operatorname{Re}\lambda = 0$ для всех $\lambda \in \Lambda$;

$\mathbf{H_2}$. Множество Λ совпадает со множеством

$$\big\{\lambda \in \mathbb{C} \;\big|\; \det \Delta(\lambda) = 0,\ \operatorname{Re}\lambda > \beta\big\} \tag{10}$$

для некоторого $\beta < 0$.

Вторая часть работы организована следующим образом. В разделе 2 изложены некоторые результаты из общей теории систем функционально-дифференциальных уравнений, необходимые нам в дальнейшем. Основные теоремы, описывающие свойства так называемого критического многообразия, устанавливаются в разделе 3. В разделе 4 изучается задача асимптотического интегрирования при $t \to \infty$ системы на критическом многообразии. В этом же разделе развитая в работе техника используется для построения асимптотики решений при $t \to \infty$ уравнения

$$\dot{x} = -\frac{\pi}{2}x(t-1) + \frac{a\sin\omega t}{t^\rho}x(t), \tag{11}$$

где $a, \omega \in \mathbb{R}/\{0\}$ и $\rho > 0$.

2. Вспомогательные сведения

Излагаемые в данном разделе сведения могут быть найдены, например, в монографии [7] (см. также [14, 16]).

Известно, что линейная автономная система (8) для $t \geq 0$ порождает в C_h сильно непрерывную полугруппу операторов $T(t) : C_h \to C_h$. Оператор $T(t)$, называемый оператором сдвига вдоль траекторий системы (8), определяется следующим образом: $T(t)\varphi = x_t^\varphi(\theta)$, где $\varphi \in C_h$ и $x_t^\varphi(\theta)$ — решение системы (8) с начальным условием $x_0^\varphi(\theta) = \varphi$. Инфинитезимальный производящий оператор A этой полугруппы задается равенством $A\varphi = \varphi'(\theta)$, где $\varphi \in D(A)$. Область определения оператора A

$$D(A) = \big\{\varphi \in C_h \;\big|\; \varphi'(\theta) \in C_h,\ \ \varphi'(0) = B_0\varphi\big\}$$

плотна в C_h. Имеют место следующие равенства:

$$\frac{d}{dt}T(t)\varphi = T(t)A\varphi = AT(t)\varphi, \qquad \varphi \in D(A). \tag{12}$$

В дальнейшем нам удобно будет использовать представление Рисса для оператора B_0:

$$B_0\varphi = \int\limits_{-h}^{0} d\eta(\theta)\varphi(\theta), \tag{13}$$

где $(m \times m)$-матричная функция $\eta(\theta)$ имеет ограниченную вариацию на $[-h, 0]$.

С системой (8) можно связать так называемую формально сопряженную систему

$$\dot{y} = -\int_{-h}^{0} y(t-\theta)d\eta(\theta), \tag{14}$$

где $y(t)$ — комплекснозначная вектор-строка длины m. Фазовым пространством для системы (14) является множество $C'_h \equiv C\big([0,h], \mathbb{C}^{m*}\big)$, где $\mathbb{C}^{m*}$ — пространство вектор-строк длины m. Для любых $\psi \in C'_h$ и $\varphi \in C_h$ определим билинейную форму

$$\big(\psi(\xi), \varphi(\theta)\big) = \psi(0)\varphi(0) - \int_{-h}^{0}\int_{0}^{\theta} \psi(\xi-\theta)d\eta(\theta)\varphi(\xi)d\xi. \tag{15}$$

Пусть множество Λ определено согласно (9). Тогда пространство C_h можно разложить в прямую сумму двух подпространств

$$C_h = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda. \tag{16}$$

Здесь P_Λ — прямая сумма обобщенных собственных подпространств оператора A, отвечающих собственным значениям из Λ, а Q_Λ — некоторое дополнительное пространство такое, что $T(t)Q_\Lambda \subseteq Q_\Lambda$. Для того чтобы охарактеризовать эти подпространства более точно, определим $(m \times N)$-матрицу $\Phi(\theta)$, по столбцам которой расположены обобщенные собственные функции $\varphi_1(\theta), \dots, \varphi_N(\theta)$ оператора A, отвечающие собственным числам из Λ. Таким образом, столбцы матрицы $\Phi(\theta)$ образуют базис подпространства P_Λ. Далее, пусть $\Psi(\xi)$ — $(N \times m)$-матрица, по строкам которой расположены базисные функции $\psi_1(\xi), \dots, \psi_N(\xi)$ прямой суммы обобщенных собственных подпространств P^T_Λ оператора A^*, формально сопряженного к A относительно билинейной формы (15). Матрицы $\Phi(\theta)$ и $\Psi(\xi)$ могут быть выбраны таким образом, что

$$\big(\Psi(\xi), \Phi(\theta)\big) = \big\{\big(\psi_i(\xi), \varphi_j(\theta)\big)\big\}_{1\le i,j\le N} = I. \tag{17}$$

Поскольку $\Phi(\theta)$ — базис P_Λ и $AP_\Lambda \subseteq P_\Lambda$, то существует такая $(N \times N)$-матрица D, спектром которой является множество Λ, что $A\Phi(\theta) = \Phi(\theta)D$. Тогда, учитывая определение оператора A, а также соотношения (12), имеем

$$\Phi(\theta) = \Phi(0)e^{D\theta}, \qquad T(t)\Phi(\theta) = \Phi(\theta)e^{Dt} = \Phi(0)e^{D(t+\theta)}, \tag{18}$$

где $-h \le \theta \le 0$ и $t \ge 0$. Аналогично для матрицы $\Psi(\xi)$ получаем

$$\Psi(\xi) = e^{-D\xi}\Psi(0), \tag{19}$$

где $0 \le \xi \le h$. Возвращаясь теперь к разложению (16), мы можем описать пространства P_Λ и Q_Λ следующим образом:

$$\begin{aligned} P_\Lambda &= \big\{\varphi \in C_h \;\big|\; \varphi(\theta) = \Phi(\theta)a,\ a \in \mathbb{C}^N\big\}, \\ Q_\Lambda &= \big\{\varphi \in C_h \;\big|\; (\Psi, \varphi) = 0\big\}. \end{aligned} \tag{20}$$

Пусть $x_t(\theta)$ — решение системы (1) при $t \geq t_0$ с начальным условием $x_{t_0} = \varphi$. Имеет место так называемая формула вариации произвольных постоянных (см. [14]):

$$x_t(\theta) = T(t-t_0)\varphi + \int\limits_{t_0}^{t} dK(t,s)G(s,x_s)ds, \quad t \geq t_0. \tag{21}$$

Здесь $(m \times m)$-матрица $K(t,\cdot) : [t_0, t] \to C_h$ задается формулой

$$K(t,s)(\theta) = \int\limits_{t_0}^{s} X(t+\theta-\alpha)d\alpha, \tag{22}$$

где $X(t)$ — единственное матричное решение системы (8) с начальным условием при $t = 0$ равным

$$X_0(\theta) = \begin{cases} I, & \theta = 0, \\ 0, & -h \leq \theta < 0. \end{cases} \tag{23}$$

Формуле (21) можно придать формальный вид (см. [7])

$$x_t(\theta) = T(t-t_0)\varphi + \int\limits_{t_0}^{t} T(t-s)X_0(\theta)G(s,x_s)ds, \quad t \geq t_0, \tag{24}$$

где $T(t-s)X_0(\theta) = X(t+\theta-s)$.

Разложим теперь решение $x_t(\theta)$ системы (1) с начальным условием $x_{t_0} = \varphi$, используя представление (16). Тогда с учетом (21) получаем

$$x_t(\theta) = x_t^{P_\Lambda} + x_t^{Q_\Lambda}, \quad \varphi(\theta) = \varphi^{P_\Lambda} + \varphi^{Q_\Lambda}, \tag{25}$$

$$x_t^{P_\Lambda}(\theta) = T(t-t_0)\varphi^{P_\Lambda} + \int\limits_{t_0}^{t} T(t-s)X_0^{P_\Lambda}(\theta)G(s,x_s)ds, \tag{26}$$

$$x_t^{Q_\Lambda}(\theta) = T(t-t_0)\varphi^{Q_\Lambda} + \int\limits_{t_0}^{t} d\big[K(t,s)^{Q_\Lambda}\big]G(s,x_s)ds, \tag{27}$$

где $t \geq t_0$ и

$$X_0^{P_\Lambda}(\theta) = \Phi(\theta)\Psi(0), \quad K(t,s)^{Q_\Lambda} = K(t,s) - \Phi(\theta)\big(\Psi, K(t,s)\big). \tag{28}$$

Осуществляя разложение (25) в формуле (24), заключаем, что справедливы представления, аналогичные (26), (27) с заменой представления (27) на следующее:

$$x_t^{Q_\Lambda}(\theta) = T(t-t_0)\varphi^{Q_\Lambda} + \int\limits_{t_0}^{t} T(t-s)X_0^{Q_\Lambda}(\theta)G(s,x_s)ds, \tag{29}$$

где $X_0^{Q_\Lambda}(\theta) = X_0(\theta) - X_0^{P_\Lambda}(\theta)$. Представлением (29), как правило, удобнее пользоваться при вычислениях. При этом для придания необходимой строгости в получаемых подынтегральных выражениях следует заменять члены вида $T(t-s)X_0(\theta)(\ldots)ds$ на $dK(t,s)(\theta)(\ldots)$. Положим

$$x_t^{P_\Lambda}(\theta) = \Phi(\theta)u(t), \qquad u(t) \in \mathbb{C}^N, \tag{30}$$

тогда $u(t) = (\Psi, x_t)$ и, кроме того, функция $u(t)$ удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = Du + \Psi(0)G(t, x_t), \qquad t \geq t_0 \tag{31}$$

с начальным условием $u(t_0) = (\Psi, \varphi)$.

Пусть выполнены гипотезы $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_2}$ и пространство C_h разложено по Λ в прямую сумму (16). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется константа $M = M(\varepsilon)$ такая, что имеют место следующие неравенства:

$$\|T(t)\varphi^{Q_\Lambda}\|_{C_h} \leq Me^{(\beta+\varepsilon)t}\|\varphi^{Q_\Lambda}\|_{C_h}, \quad t \geq 0,\ \varphi \in C_h, \tag{32}$$

$$\|T(t)X_0^{Q_\Lambda}\|_{C_h} \leq Me^{(\beta+\varepsilon)t}, \quad t \geq 0, \tag{33}$$

$$\Big\|\int\limits_{t_0}^{t} d\big[K(t,s)^{Q_\Lambda}\big]G(s, x_s)ds\Big\|_{C_h} \leq M\int\limits_{t_0}^{t} e^{(\beta+\varepsilon)(t-s)}\big|G(s, x_s)\big|ds, \quad t \geq t_0. \tag{34}$$

Отметим, что в левой части неравенства (33) функция $T(t)X_0^{Q_\Lambda}$ принадлежит пространству C_h лишь при $t \geq h$. Тем не менее оценка левой части (33) по норме пространства C_h допустима в силу ограниченности функции $T(t)X_0^{Q_\Lambda}(\theta)$ по $\theta \in [-h, 0]$, если $t \in [0, h]$.

3. Критическое многообразие: основные теоремы

В этом разделе будут установлены основные теоремы, касающиеся свойств критических многообразий. Методика доказательств соответствующих утверждений во многом опирается на схему, использованную в [9] при исследовании свойств центральных многообразий в нелинейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений. Напомним сначала следующее определение (см. [4]).

Определение 1. *Будем говорить, что множество (линейное пространство) $\mathcal{W}(t) \subset C_h$ при $t \geq t_* \geq t_0$ является критическим многообразием для системы* (1)*, если выполнены следующие условия:*

1. Существует $(m \times N)$-матрица $H(t, \theta)$ непрерывная по $t \geq t_*$ и $\theta \in [-h, 0]$ такая, что ее столбцы принадлежат пространству Q_Λ при всех $t \geq t_*$ и, кроме того, $\|H(t, \cdot)\|_{C_h} \to 0$ при $t \to \infty$, где

$$\|H(t, \cdot)\|_{C_h} = \sup_{-h \leq \theta \leq 0} |H(t, \theta)|$$

и $|\cdot|$ — некоторая матричная норма в пространстве $(m \times N)$-матриц;

2. Множество $\mathcal{W}(t)$ для $t \geq t_*$ задается формулой

$$\mathcal{W}(t) = \Big\{\varphi(\theta) \in C_h \bigm| \varphi(\theta) = \Phi(\theta)u + H(t, \theta)u,\ u \in \mathbb{C}^N\Big\}, \tag{35}$$

где столбцы $(m \times N)$-матрицы $\Phi(\theta)$ образуют базис в пространстве P_Λ из (16)*;*

3. Множество $\mathcal{W}(t)$ при $t \geq t_*$ положительно инвариантно относительно траекторий системы (1)*, т.е. если $x_T \in \mathcal{W}(T)$, $T \geq t_*$, то $x_t \in \mathcal{W}(t)$ для всех $t \geq T$.*

Пусть в начальный момент $t = T$ вектор-функция $x_T(\theta)$ принадлежит многообразию $\mathcal{W}(T)$. В силу положительной инвариантности $\mathcal{W}(t)$ имеем

$$x_t(\theta) = \Phi(\theta)u(t) + H(t,\theta)u(t), \qquad t \geq T, \quad u(t) \in \mathbb{C}^N. \tag{36}$$

Заметим, что формула (36) представляет собой разложение (25) и, следовательно, функция $u(t)$ в силу (31) удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = \Big[D + \Psi(0)G\big(t, \Phi(\theta) + H(t,\theta)\big)\Big]u, \qquad t \geq T. \tag{37}$$

Эту систему назовем проекцией системы (1) на критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$ или, короче, системой на критическом многообразии. В [4] показано, что если критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$ существует при $t \geq t_*$, то для всех (t,θ) таких, что $t+\theta \geq t_*$, матрица $H(t,\theta)$ удовлетворяет системе

$$\Phi(\theta)\Psi(0)G\big(t,\Phi(\theta)+H(t,\theta)\big) + H(t,\theta)\left(D + \Psi(0)G\big(t,\Phi(\theta)+H(t,\theta)\big)\right) + \frac{\partial H}{\partial t} =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial \theta}, & -h \leq \theta < 0, \\ B_0 H + G\big(t,\Phi(\theta)+H(t,\theta)\big), & \theta = 0. \end{cases} \tag{38}$$

Далее нам потребуется следующее вспомогательное утверждение (см., например, [6, Глава XIII], [13, стр. 18–19]).

Утверждение 1. *Пусть неотрицательная функция $p(t)$ локально интегрируема на промежутке $[t_*,\infty)$ и при $t \geq t_*$*

$$\int\limits_t^{t+1} p(s)ds \to 0, \qquad t \to \infty. \tag{39}$$

Положим

$$f(t) = \int\limits_{t_*}^{\infty} e^{-\alpha|t-s|}p(s)ds, \qquad \alpha > 0. \tag{40}$$

Тогда $f(t) \to 0$ при $t \to \infty$, и, кроме того, если $p(t) \in L_1[t_*,\infty)$, то $f(t) \in L_1[t_*,\infty)$.

Замечание. Если функция $p(t)$ удовлетворяет условию (39), то для функции $f(t)$, заданной формулой (40), при $t \geq t_*$ имеет место неравенство (см., например, оценки в [17, Лемма 2.1])

$$f(t) \leq \frac{2N(t_*)}{1-e^{-\alpha}}, \qquad N(t) = \max_{s\geq t} \int\limits_s^{s+1} p(s)ds. \tag{41}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *При достаточно больших t у системы* (1) *существует критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$, определяемое формулой* (35).

Доказательство. Поскольку столбцы матрицы $H(t,\theta)$ должны принадлежать пространству Q_Λ, то в силу (29) (см. также (27)) и (36) эта матрица удовлетворяет при $t \ge t_*$ интегральному уравнению

$$H(t,\theta)u(t) = T(t-t_*)H(t_*,\theta)u(t_*)+\int\limits_{t_*}^{t} T(t-s)X_0^{Q_\Lambda}(\theta)G\big(s,\Phi(\theta)+H(t,\theta)\big)u(s)ds. \quad (42)$$

В (42) вектор-функция $u(t) \in \mathbb{C}^N$ является решением системы (37) с начальным условием при $t = t_*$ равным $u(t_*)$. Пусть $U_H(t,s)$ $(t, s \ge t_*)$ — матрица Коши системы (37) $(U_H(s,s) = I)$. Тогда, учитывая, что $u(t) = U_H(t,t_*)u(t_*)$, и используя свойства матрицы $U_H(t,s)$, запишем уравнение (42) в операторной форме:

$$H(t,\theta) = \mathcal{A}H(t,\theta), \quad (43)$$

$$\mathcal{A}H(t,\theta) = T(t-t_*)H(t_*,\theta)U_H(t_*,t)+\int\limits_{t_*}^{t} T(t-s)X_0^{Q_\Lambda}(\theta)G\big(s,\Phi(\theta)+H(t,\theta)\big)U_H(s,t)ds. \quad (44)$$

Областью определения оператора $\mathcal{A}$ будем считать банахово пространство B непрерывных по $t \ge t_*$ и $\theta \in [-h, 0]$ матриц $H(t,\theta)$ размера $(m \times N)$ с фиксированным начальным условием $H(t_*,\theta)$ таких, что $\|H(t,\cdot)\|_{C_h} \to 0$ при $t \to \infty$. При этом столбцы матрицы $H(t_*,\theta)$ принадлежат пространству Q_Λ. Норму в этом пространстве введем стандартным образом:

$$\|H\|_B = \sup_{t \ge t_*} \|H(t,\cdot)\|_{C_h}. \quad (45)$$

Покажем далее, что при достаточно больших t_* и достаточно малой величине $\|H(t_*,\cdot)\|_{C_h}$ оператор $\mathcal{A}$ будет сжимающим в некотором шаре $\|H\|_B \le r_0$ $(r_0 > 0)$ пространства B.

Покажем сначала, что оператор $\mathcal{A}$ переводит шар $\|H\|_B \le r_0$ в себя. Заметим, что из (44) сразу следует, что матрица $\mathcal{A}H$ непрерывна по $t \ge t_*$ и $\theta \in [-h, 0]$. Кроме того, столбцы этой матрицы принадлежат пространству Q_Λ при всех $t \ge t_*$ в силу инвариантности этого пространства относительно оператора сдвига $T(t)$ и вида формулы (44). Таким образом, нам необходимо показать, что $\|\mathcal{A}H\|_B \le r_0$ и $\|(\mathcal{A}H)(t,\cdot)\|_{C_h} \to 0$ при $t \to \infty$. В дальнейшем нам потребуется оценка для величины $|U_H(s,t)|$, где $s \le t$. Получить эту оценку можно следующим образом. Сперва заметим, что в силу (2)–(4), для любого $\varphi(\theta) \in C_h$ справедливо неравенство

$$|G(t,\varphi)| \le p(t)\|\varphi\|_{C_h}, \qquad p(t) = w(t) + \gamma(t). \quad (46)$$

Здесь $w(t) \to 0$ при $t \to \infty$, $\gamma(t) \in L_1[t_0,\infty)$, и функция $p(t)$, следовательно, обладает свойством (39). Без ограничения общности можно считать, что $p(t) > 0$ для всех $t \ge t_0$. Неравенство (46), очевидно, справедливо и в том случае, если $\varphi(\theta)$ — $(m \times N)$-матрица (вместо векторной нормы, естественно, необходимо брать матричную норму). В силу свойств матриц Коши, имеем

$$\big(U_H(s,t)\big)^* = \big(U_H^*(t,s)\big)^{-1} = U_H^c(t,s), \qquad s \le t, \quad (47)$$

где символ * означает эрмитово сопряжение, а $U^c_H(t,s)$ — матрица Коши сопряженной к (37) системы

$$\dot{u} = \Big[-D^* - \Big(G\big(t, \Phi(\theta) + H(t,\theta)\big)\Big)^* \Psi^*(0)\Big]u, \qquad t \geq t_*. \tag{48}$$

Отсюда,

$$U^c_H(t,s) = e^{-D^*(t-s)} - \int\limits_s^t e^{-D^*(t-\tau)}\Big(G\big(\tau, \Phi(\theta) + H(\tau,\theta)\big)\Big)^* \Psi^*(0) U^c_H(\tau,s)d\tau. \tag{49}$$

В силу гипотезы $\mathbf{H_1}$ все собственные числа матрица D (а следовательно, и матрицы $(-D^*)$) имеют нулевые вещественные части. Таким образом, $\forall\varepsilon > 0$ можно подобрать константу $M = M(\varepsilon)$ так, что будет выполнено неравенство

$$|e^{-D^*(t-\tau)}| \leq Me^{\varepsilon(t-\tau)}, \qquad t_* \leq \tau \leq t.$$

Учитывая (46), выводим из (49) оценку

$$|U^c_H(t,s)| \leq Me^{\varepsilon(t-s)} + M\int\limits_s^t e^{\varepsilon(t-\tau)}p(\tau)|U^c_H(\tau,s)|d\tau. \tag{50}$$

Здесь и далее все возникающие в оценках константы, если их точный вид нас не интересует, мы будем обозначать одним символом. Домножая обе части неравенства (50) на $e^{-\varepsilon t}$ и применяя лемму Гронуолла–Беллмана, получаем

$$|U^c_H(t,s)| \leq M\exp\Big\{\varepsilon(t-s) + M\int\limits_s^t p(\tau)d\tau\Big\}.$$

В силу свойства (39) функции $p(t)$, выбирая t_* достаточно большим, для любого $\varepsilon > 0$ мы можем добиться выполнения неравенства

$$|U^c_H(t,s)| \leq Me^{\varepsilon(t-s)}, \qquad t_* \leq s \leq t. \tag{51}$$

Отметим, что константа M в этом неравенстве может быть выбрана одна для всех $H(t,\theta)$ из шара $\|H\|_B \leq r_0$. Из (47) тогда следует, что аналогичное (51) неравенство (возможно, с другой константой M) справедливо и для матрицы Коши $U_H(s,t)$.

Вернемся теперь к равенству (44). Заметим, что в силу гипотезы $\mathbf{H_2}$ неравенства (32)–(34) справедливы с некоторым показателем экспоненты $-\alpha < 0$. Из (44) тогда следует, что

$$\|(\mathcal{A}H)(t,\cdot)\|_{C_h} \leq Me^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)}\|H(t_*,\cdot)\|_{C_h} + M\int\limits_{t_*}^t e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-s)}p(s)ds, \qquad t \geq t_*. \tag{52}$$

Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, что $-\alpha + \varepsilon < 0$. Используя теперь утверждение 1, заключаем, что выражение в правой части неравенства (52) стремится к нулю при $t \to \infty$. Кроме того, выбирая t_* достаточно большим и $\|H(t_*,\cdot)\|_{C_h}$ достаточно малой, мы можем добиться того, что $\|\mathcal{A}H\|_B \le r_0$. Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ переводит шар $\|H\|_B \le r_0$ пространства B в себя.

Покажем далее, что оператор $\mathcal{A}$ является сжимающим в шаре $\|H\|_B \le r_0$. Пусть $H_1(t,\theta), H_2(t,\theta) \in B$ и $\|H_1\|_B \le r_0$, $\|H_2\|_B \le r_0$. Тогда из (44) следует, что

$$\|(\mathcal{A}H_1)(t,\cdot) - (\mathcal{A}H_2)(t,\cdot)\|_{C_h} \le Me^{-\alpha(t-t_*)}\|H_1(t_*,\cdot)\|_{C_h}|U_{H_1}(t_*,t) - U_{H_2}(t_*,t)| +$$
$$+ M\int\limits_{t_*}^{t} e^{-\alpha(t-s)}p(s)|U_{H_1}(s,t) - U_{H_2}(s,t)|ds +$$
$$+ M\int\limits_{t_*}^{t} e^{-\alpha(t-s)}p(s)\|H_1(s,\cdot) - H_2(s,\cdot)\|_{C_h}|U_{H_1}(s,t)|ds +$$
$$+ M\int\limits_{t_*}^{t} e^{-\alpha(t-s)}p(s)\|H_2(s,\cdot)\|_{C_h}|U_{H_1}(s,t) - U_{H_2}(s,t)|ds. \quad (53)$$

Здесь при выводе оценки (53) мы учли, что $H_1(t_*,\theta) = H_2(t_*,\theta)$, а также предварительно в правой части выражения для $\mathcal{A}H_1 - \mathcal{A}H_2$ мы добавили и вычли величину

$$\int\limits_{t_*}^{t} T(t-s)X_0^{Q_\Lambda}(\theta)G\big(s, H_2(s,\theta)\big)U_{H_1}(s,t)ds.$$

Оценим далее величину $|U_{H_1}(s,t) - U_{H_2}(s,t)|$ $(s \le t)$. По тем же соображениям, что были использованы ранее, нам достаточно получить оценку для величины $|U^c_{H_1}(t,s) - U^c_{H_2}(t,s)|$, где $U^c_{H_1}(t,s), U^c_{H_2}(t,s)$ — фундаментальные матрицы сопряженной системы (48) с $H(t,\theta)$ равной $H_1(t,\theta)$ и $H_2(t,\theta)$ соответственно. Из (48) выводим

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(U^c_{H_1}(t,s) - U^c_{H_2}(t,s)\Big) = -D^*\big(U^c_{H_1}(t,s) - U^c_{H_2}(t,s)\big) - \Big(G\big(t,\Phi(\theta)\big)\Big)^*\Psi^*(0)\times$$
$$\times\big(U^c_{H_1}(t,s) - U^c_{H_2}(t,s)\big) - \Big(G\big(t,H_1(t,\theta)\big)\Big)^*\Psi^*(0)U^c_{H_1}(t,s) + \Big(G\big(t,H_2(t,\theta)\big)\Big)^*\Psi^*(0)\times$$
$$\times U^c_{H_2}(t,s) = -D^*\big(U^c_{H_1}(t,s) - U^c_{H_2}(t,s)\big) - \Big(G\big(t,\Phi(\theta)\big)\Big)^*\Psi^*(0)\big(U^c_{H_1}(t,s) - U^c_{H_2}(t,s)\big) -$$
$$-\Big(G\big(t,H_1(t,\theta) - H_2(t,\theta)\big)\Big)^*\Psi^*(0)U^c_{H_1}(t,s) - \Big(G\big(t,H_2(t,\theta)\big)\Big)^*\Psi^*(0)\big(U^c_{H_1}(t,s) - U^c_{H_2}(t,s)\big).$$

Таким образом, разность $U^c_{H_1}(t,s) - U^c_{H_2}(t,s)$ удовлетворяет некоторой неоднородной системе, однородная часть которой совпадает с матрицей системы (48), где $H(t,\theta) = H_2(t,\theta)$. Следовательно, в силу формулы вариации постоянных, учитывая равенство $U^c_{H_1}(s,s) - U^c_{H_2}(s,s) = 0$, имеем

$$U^c_{H_1}(t,s) - U^c_{H_2}(t,s) = -\int\limits_{s}^{t} U^c_{H_2}(t,\tau)\Big(G\big(\tau, H_1(\tau,\theta) - H_2(\tau,\theta)\big)\Big)^*\Psi^*(0)U^c_{H_1}(\tau,s)d\tau. \quad (54)$$

Из (54) с учетом (46) и (51) при $t_* \le s \le t$ получаем оценку

$$|U^c_{H_1}(t,s)-U^c_{H_2}(t,s)|\le Me^{\varepsilon(t-s)}\int\limits_s^t p(\tau)\|H_1(\tau,\cdot)-H_2(\tau,\cdot)\|_{C_h}d\tau\le$$
$$\le Me^{2\varepsilon(t-s)}\|H_1-H_2\|_B. \quad (55)$$

Здесь мы, разумеется, учли (39). Возвращаясь теперь к неравенству (53) и используя оценку (55) применительно к величине $|U_{H_1}(s,t)-U_{H_2}(s,t)|$ ($t_*\le s\le t$), при условии $-\alpha+2\varepsilon<0$ устанавливаем неравенство

$$\|\mathcal{A}H_1-\mathcal{A}H_2\|_B\le M\Big\{\|H_1(t_*,\cdot)\|_{C_h}+\int\limits_{t_*}^t e^{(-\alpha+2\varepsilon)(t-s)}p(s)ds+$$
$$+\int\limits_{t_*}^t e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-s)}p(s)ds\Big\}\|H_1-H_2\|_B. \quad (56)$$

Выбирая теперь t_* достаточно большим, а величину $\|H_1(t_*,\cdot)\|_{C_h}$ достаточно малой, на основании (41) устанавливаем сжимаемость оператора $\mathcal{A}$ в некотором шаре $\|H\|_B\le r_0$ пространства B. □

В первой части этой работы (см. [4]) нами была построена $(m\times N)$-матрица $\hat H(t,\theta)$, которая в определенном смысле является приближением для матрицы $H(t,\theta)$, описывающей критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$. Напомним, что

$$\hat H(t,\theta)=\sum_{i=1}^n v_i(t)H_i(t,\theta)+\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)H_{i_1i_2}(t,\theta)+\ldots+$$
$$+\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)H_{i_1\ldots i_k}(t,\theta), \quad (57)$$

где элементы $(m\times N)$-матриц $H_{i_1\ldots i_l}(t,\theta)$ являются тригонометрическими многочленами переменной t и непрерывно дифференцируемы по $\theta\in[-h,0]$, а величина $k\in\mathbb{N}$ определена свойством 3^0 функций $v_1(t),\ldots,v_n(t)$. Кроме того, столбцы матриц $H_{i_1\ldots i_l}(t,\theta)$ (а следовательно, и столбцы матрицы $\hat H(t,\theta)$) принадлежат пространству Q_Λ при всех $t\in\mathbb{R}$. Показано, что матрица $\hat H(t,\theta)$ удовлетворяет системе

$$\Phi(\theta)\Psi(0)G\big(t,\Phi(\theta)+\hat H(t,\theta)\big)+\hat H(t,\theta)\Big(D+\Psi(0)G\big(t,\Phi(\theta)+\hat H(t,\theta)\big)\Big)+\frac{\partial\hat H}{\partial t}=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{\partial\hat H}{\partial\theta}+R_1(t,\theta), & -h\le\theta<0,\\ B_0\hat H+G\big(t,\Phi(\theta)+\hat H(t,\theta)\big)+R_1(t,0)-R_2(t), & \theta=0.\end{cases} \quad (58)$$

Здесь матрицы $R_1(t,\theta)$ и $R_2(t)$ таковы, что $\|R_1(t,\cdot)\|_{C_h},R_2(t)\in L_1[t_0,\infty)$, и матрица $R_2(t)$ — абсолютно интегрируемая на $[t_0,\infty)$ составляющая матрицы $G\big(t,\Phi(\theta)+\hat H(t,\theta)\big)$.

Установим теперь результат, который определяет, в каком именно смысле матрица $\hat H(t,\theta)$ приближает матрицу $H(t,\theta)$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathcal{W}(t)$ *— критическое многообразие системы* (1), *существующее согласно теореме 1 при достаточно больших* t. *Тогда найдется такое достаточно большое* t_*, *что при* $t \geq t_*$ *матрица* $H(t,\theta)$ *из* (35) *допускает представление в виде*

$$H(t,\theta) = \hat{H}(t,\theta) + Z(t,\theta), \qquad t \geq t_* \geq t_0, \quad -h \leq \theta \leq 0. \tag{59}$$

Здесь матрица $\hat{H}(t,\theta)$, *определяемая формулой* (57), *удовлетворяет системе* (58), *а* $(m \times N)$*-матрица* $Z(t,\theta)$ *такова, что* $\|Z(t,\cdot)\|_{C_h} \to 0$ *при* $t \to \infty$ *и* $\|Z(t,\cdot)\|_{C_h} \in L_1[t_*,\infty)$.

Доказательство. Представим решение $H(t,\theta)$ операторного уравнения (43) в виде суммы (59), где $\hat{H}(t,\theta)$ — матрица (57), принадлежащая пространству B, и $Z(t,\theta)$ — некоторая матрица из B. Тогда уравнение (43) можно записать относительно неизвестной матрицы $Z(t,\theta)$:

$$Z(t,\theta) = \mathcal{S}Z(t,\theta), \tag{60}$$

$$\mathcal{S}Z(t,\theta) = \mathcal{A}\big(\hat{H}(t,\theta) + Z(t,\theta)\big) - \hat{H}(t,\theta), \tag{61}$$

где оператор $\mathcal{A}$ определен формулой (44). Будем рассматривать оператор $\mathcal{S}$ действующим в пространстве BL непрерывных по $t \geq t_*$ и $\theta \in [-h,0]$ матриц $Z(t,\theta)$ с фиксированным начальным условием $Z(t_*,\theta)$ таких, что $\|Z(t,\cdot)\|_{C_h} \to 0$ при $t \to \infty$ и $p(t)\|Z(t,\cdot)\|_{C_h} \in L_1[t_*,\infty)$. Здесь функция $p(t)$, определяемая формулой (46), удовлетворяет условию (39). Кроме того, столбцы матрицы $Z(t_*,\theta)$ принадлежат пространству Q_Λ. Пространство BL будет банаховым, если ввести в нем норму по правилу

$$\|Z\|_{BL} = \|Z\|_B + \|Z\|_L, \qquad \|Z\|_L = \int\limits_{t_*}^{\infty} p(t)\|Z(t,\cdot)\|_{C_h} dt, \tag{62}$$

где норма $\|\cdot\|_B$ определяется формулой (45). Покажем далее, что оператор $\mathcal{S}$ является сжимающим в некотором шаре $\|Z\|_{BL} \leq r_0$ $(r_0 > 0)$ пространства BL при условии, что величина $\|Z(t_*,\cdot)\|_{C_h}$ достаточно мала, а t_* — достаточно велико.

Установим сначала, что оператор $\mathcal{S}$ переводит пространство BL в себя. В силу свойств оператора $\mathcal{A}$ и матрицы $\hat{H}(t,\theta)$ сразу заключаем, что матрица $\mathcal{S}Z$ непрерывна по $t \geq t_*$ и $\theta \in [-h,0]$, и, кроме того, $\|(\mathcal{S}Z)(t,\cdot)\|_{C_h} \to 0$ при $t \to \infty$. Отметим также, что столбцы матрицы $\mathcal{S}Z$ принадлежат пространству Q_Λ при всех $t \geq t_*$ в силу свойств оператора $\mathcal{A}$ и матрицы $\hat{H}(t,\theta)$. Таким образом, нам необходимо показать, что $p(t)\|(\mathcal{S}Z)(t,\cdot)\|_{C_h} \in L_1[t_*,\infty)$. С этой целью получим для оператора $\mathcal{S}$ несколько иное представление.

Пусть вектор-функция $u(t) \in \mathbb{C}^N$ является решением системы (37), в которой $H(t,\theta)$ есть сумма (59), с начальным условием при $t = t_*$ равным $u(t_*)$. В силу вида матрицы $\hat{H}(t,\theta)$ (см. формулу (57)) и абсолютной непрерывности функций $v_1(t),\ldots v_n(t)$, а также свойств оператора сдвига $T(t)$, заключаем, что вектор-функция $T(t-s)\hat{H}(s,\theta)u(s)$ абсолютно непрерывна по переменной s на промежутке $t_* \leq s \leq t$. Следовательно,

$$\hat{H}(t,\theta)u(t) = T(t-t_*)\hat{H}(t_*,\theta)u(t_*) + \int\limits_{t_*}^{t} \frac{d}{ds}\big(T(t-s)\hat{H}(s,\theta)u(s)\big)ds. \tag{63}$$

Учтем (см. вывод формул (12) в [7, стр. 202]), что для любой функции $\varphi \in C_h$, непрерывно дифференцируемой на отрезке $[-h, 0]$,

$$\int_{t_*}^{t} \frac{d}{ds}\big(T(t-s)\varphi(\theta)\big) = -\int_{t_*}^{t} T(t-s)\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{d\theta}, & -h \le \theta < 0, \\ B_0\varphi(\theta), & \theta = 0. \end{cases} ds =$$
$$= -\int_{t_*}^{t} T(t-s)\frac{d\varphi}{d\theta}ds + \int_{t_*}^{t} T(t-s)X_0(\theta)\frac{d\varphi}{d\theta}ds - \int_{t_*}^{t} T(t-s)X_0(\theta)B_0\varphi\, ds. \quad (64)$$

При этом мы напоминаем, что для придания математической строгости равенству (64) его следует переписать в следующем виде:

$$\int_{t_*}^{t} \frac{d}{ds}\big(T(t-s)\varphi(\theta)\big)ds = -\int_{t_*}^{t} T(t-s)\frac{d\varphi}{d\theta}ds + \int_{t_*}^{t} dK(t,s)\frac{d\varphi}{d\theta} - \int_{t_*}^{t} dK(t,s)B_0\varphi. \quad (65)$$

Здесь матрица $K(t,s)(\theta)$ определяется формулой (22). Поскольку матрица $\hat{H}(t,\theta)$ абсолютно непрерывна по $t \ge t_0$ и непрерывно дифференцируема по $\theta \in [-h, 0]$, несложно показать, что

$$\int_{t_*}^{t} \frac{d}{ds}\big(T(t-s)\hat{H}(s,\theta)u(s)\big)ds = \int_{t_*}^{t} T(t-s)\Big\{-\frac{\partial \hat{H}}{\partial\theta}u(s) + X_0(\theta)\frac{\partial \hat{H}}{\partial\theta}u(s) -$$
$$- X_0(\theta)B_0\hat{H}u(s) + \frac{\partial \hat{H}}{\partial s}u(s) + \hat{H}(s,\theta)\frac{du}{ds}\Big\}ds = \int_{t_*}^{t} T(t-s)\Big\{-\frac{\partial \hat{H}}{\partial\theta} + X_0(\theta)\frac{\partial \hat{H}}{\partial\theta} -$$
$$- X_0(\theta)B_0\hat{H} + \frac{\partial \hat{H}}{\partial s} + \hat{H}(s,\theta)\Big(D + \Psi(0)G\big(s, \Phi(\theta) + \hat{H}(s,\theta) + Z(s,\theta)\big)\Big)\Big\}u(s)ds. \quad (66)$$

Здесь мы, разумеется, учли тот факт, что вектор-функция $u(t)$ является решением системы (37). Повторим, что, аналогично (64), в правой части формулы (66) подынтегральные члены вида $T(t-s)X_0(\theta)(\ldots)ds$ должны быть заменены на $dK(t,s)(\theta)(\ldots)$. Воспользуемся теперь тем обстоятельством, что матрица $\hat{H}(t,\theta)$ удовлетворяет системе (58), которую можно записать в виде

$$\Phi(\theta)\Psi(0)G\big(t, \Phi(\theta) + \hat{H}(t,\theta)\big) + \hat{H}(t,\theta)\Big(D + \Psi(0)G\big(t, \Phi(\theta) + \hat{H}(t,\theta)\big)\Big) + \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} =$$
$$= \frac{\partial \hat{H}}{\partial\theta} + R_1(t,\theta) - X_0(\theta)\frac{\partial \hat{H}}{\partial\theta} + X_0(\theta)B_0\hat{H} + X_0(\theta)G\big(t, \Phi(\theta) + \hat{H}(t,\theta)\big) - X_0(\theta)R_2(t). \quad (67)$$

Учтем (67) в (66) и представим вектор-функцию $u(t)$ в виде $u(t) = U_{\hat{H}+Z}(t, t_*)u(t_*)$, где $U_{\hat{H}+Z}(t,s)$ $(t, s \ge t_*)$ — матрица Коши системы (37) $(U(t,t) = I)$, в которой $H(t,\theta)$ есть сумма (59). Тогда, вспоминая обозначение $X_0^{Q_\Lambda} = X_0(\theta) - \Phi(\theta)\Psi(0)$, из (63) выводим

$$\hat{H}(t,\theta) = T(t-t_*)\hat{H}(t_*,\theta)U_{\hat{H}+Z}(t_*,t)+\int\limits_{t_*}^{t} T(t-s)\Big\{R_1(s,\theta)+X_0^{Q_\Lambda}G\big(s,\Phi(\theta)+\hat{H}(s,\theta)\big)-$$
$$- X_0(\theta)R_2(s) + \hat{H}(s,\theta)\Psi(0)G\big(s,Z(s,\theta)\big)\Big\}U_{\hat{H}+Z}(s,t)ds. \quad (68)$$

В силу (59), (44) и (68), из (61) получаем следующее представление для оператора $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S}Z(t,\theta) = T(t-t_*)Z(t_*,\theta)U_{\hat{H}+Z}(t_*,t) + \int\limits_{t_*}^{t} T(t-s)\Big\{X_0^{Q_\Lambda}G\big(s,Z(s,\theta)\big) - R_1(s,\theta)+$$
$$+ X_0(\theta)R_2(s) - \hat{H}(s,\theta)\Psi(0)G\big(s,Z(s,\theta)\big)\Big\}U_{\hat{H}+Z}(s,t)ds. \quad (69)$$

Поскольку матрица $R_1(t,\theta)$ непрерывна по $\theta \in [-h,0]$, то в силу (16) ее можно записать в виде суммы

$$R_1(t,\theta) = R_1^{P_\Lambda}(t,\theta) + R_1^{Q_\Lambda}(t,\theta),$$

где столбцы $(m\times N)$-матриц $R_1^{P_\Lambda}(t,\theta)$ и $R_1^{Q_\Lambda}(t,\theta)$ принадлежат пространствам P_Λ и Q_Λ соответственно при всех $t \ge t_0$. Заметим также, что $\|R_1^{P_\Lambda}(t,\cdot)\|_{C_h}$ и $\|R_1^{Q_\Lambda}(t,\cdot)\|_{C_h}$ принадлежат классу $L_1[t_0,\infty)$. Далее, из формулы (57), определяющей вид матрицы $\hat{H}(t,\theta)$ и принадлежности столбцов матриц $H_{i_1\dots i_l}(t,\theta)$ пространству Q_Λ при всех $t \in \mathbb{R}$, следует, что столбцы матриц $\hat{H}(t,\theta)$ и $\dfrac{\partial \hat{H}}{\partial t}$ также принадлежат пространству Q_Λ при $t \ge t_0$. Значит, из (58) следует, что $R_1^{P_\Lambda}(t,\theta) = \Phi(\theta)\Psi(0)R_2(t)$, поскольку матрица $R_2(t)$ составлена из абсолютно интегрируемых на $[t_0,\infty)$ элементов матрицы $G\big(t,\Phi(\theta)+\hat{H}(t,\theta)\big)$. С учетом этого обстоятельства уравнение (69) приобретает следующий вид:

$$\mathcal{S}Z(t,\theta) = T(t-t_*)Z(t_*,\theta)U_{\hat{H}+Z}(t_*,t) + \int\limits_{t_*}^{t} T(t-s)\Big\{X_0^{Q_\Lambda}G\big(s,Z(s,\theta)\big) + X_0^{Q_\Lambda}R_2(s)-$$
$$- R_1^{Q_\Lambda}(s,\theta) - \hat{H}(s,\theta)\Psi(0)G\big(s,Z(s,\theta)\big)\Big\}U_{\hat{H}+Z}(s,t)ds. \quad (70)$$

Вновь мы обращаем внимание на то, что для придания правой части выражения (70) необходимой строгости подынтегральные члены вида $T(t-s)X_0^{Q_\Lambda}(\dots)ds$ должны быть заменены на $dK(t,s)^{Q_\Lambda}(\theta)(\dots)$, где матрица $K(t,s)^{Q_\Lambda}$ определяется формулой (28).

Используя теперь оценки (32)-(34), а также неравенство (51) для $U_{\hat{H}+Z}(s,t)$, получаем

$$\|(\mathcal{S}Z)(t,\cdot)\|_{C_h} \le Me^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)}\|Z(t_*,\cdot)\|_{C_h} + M\int\limits_{t_*}^{t} e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-s)}p(s)\|Z(s,\cdot)\|_{C_h}ds+$$
$$+ M\int\limits_{t_*}^{t} e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-s)}\big(|R_2(s)| + \|R_1^{Q_\Lambda}(s,\cdot)\|_{C_h}\big)ds, \qquad t \ge t_*. \quad (71)$$

Откуда, меняя порядок интегрирования,

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} p(t)\|(\mathcal{S}Z)(t,\cdot)\|_{C_h} dt \le M\|Z(t_*,\cdot)\|_{C_h} \int\limits_{t_*}^{\infty} e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)} p(t)dt +$$
$$+ M\int\limits_{t_*}^{\infty} p(s)\|Z(s,\cdot)\|_{C_h} \int\limits_{t_*}^{\infty} e^{(-\alpha+\varepsilon)|t-s|} p(t)dtds +$$
$$+ M\int\limits_{t_*}^{\infty} \big(|R_2(s)| + \|R_1^{Q_\Lambda}(s,\cdot)\|_{C_h}\big) \int\limits_{t_*}^{\infty} e^{(-\alpha+\varepsilon)|t-s|} p(t)dtds. \quad (72)$$

Учтем теперь утверждение 1, неравенство (41) и тот факт, что функции $\|R_1^{Q_\Lambda}(t,\cdot)\|_{C_h}$, $|R_2(t)|$ и $p(t)\|Z(t,\cdot)\|_{C_h}$ $(Z(t,\theta) \in BL)$ принадлежат классу $L_1[t_*,\infty)$. Заключаем, что все интегралы в правой части (72) существуют, а следовательно, функция $p(t)\|(\mathcal{S}Z)(t,\cdot)\|_{C_h}$ принадлежит $L_1[t_*,\infty)$ и оператор $\mathcal{S}$ переводит пространство BL в себя.

Заметим, что в силу (49), (50) константа M, фигурирующая в неравенстве (72), может быть выбрана одна для всех матриц $Z(t,\theta)$ из шара $\|Z\|_{BL} \le r_0$. Тогда из (72) с учетом неравенства (41) выводим, что $\|\mathcal{S}Z\|_L \le MN(t_*)$ для всех $\|Z\|_{BL} \le r_0$. Далее в силу (52), (61) для всех $\|Z\|_{BL} \le r_0$ имеем

$$\|\mathcal{S}Z\|_{BL} = \|\mathcal{A}\big(\hat{H}(t,\theta)+Z(t,\theta)\big) - \hat{H}(t,\theta)\|_B + \|\mathcal{S}Z\|_L \le M\big(\|\hat{H}\|_B + \|Z(t_*,\cdot)\|_{C_h} + N(t_*)\big). \quad (73)$$

Поскольку $\|\hat{H}(t,\cdot)\|_{C_h} \to 0$ и $N(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то, выбирая t_* достаточно большим, а величину $\|Z(t_*,\cdot)\|_{C_h}$ достаточно малой, мы можем добиться выполнения неравенства $\|\mathcal{S}Z\|_{BL} \le r_0$. Таким образом, оператор $\mathcal{S}$ переводит шар $\|Z\|_{BL} \le r_0$ пространства BL в себя. Покажем теперь, что оператор $\mathcal{S}$ будет сжимающим в этом шаре при достаточно больших t_*. Из (56), (61) следует, что для любых $Z_1(t,\theta)$, $Z_2(t,\theta)$ из шара $\|Z\|_{BL} \le r_0$

$$\|\mathcal{S}Z_1 - \mathcal{S}Z_2\|_{BL} = \|\mathcal{A}(\hat{H}+Z_1) - \mathcal{A}(\hat{H}+Z_2)\|_B + \|\mathcal{S}Z_1 - \mathcal{S}Z_2\|_L \le$$
$$\le q\|Z_1 - Z_2\|_B + \|\mathcal{S}Z_1 - \mathcal{S}Z_2\|_L, \qquad 0 \le q < 1, \quad (74)$$

если величина $\|Z_1(t_*,\cdot)\|_{C_h} = \|Z_2(t_*,\cdot)\|_{C_h}$ достаточно мала, а t_* — достаточно велико. Далее из (70) выводим

$$\|\mathcal{S}Z_1 - \mathcal{S}Z_2\|_L \le M\|Z_1(t_*,\cdot)\|_{C_h} \int\limits_{t_*}^{\infty} e^{-\alpha(t-t_*)} p(t)|U_{H_1}(t_*,t) - U_{H_2}(t_*,t)|dt +$$
$$+ M\int\limits_{t_*}^{\infty} p(t) \int\limits_{t_*}^{t} e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-s)} p(s)\|Z_1(s,\cdot) - Z_2(s,\cdot)\|_{C_h} dsdt +$$
$$+ M\int\limits_{t_*}^{\infty} p(t) \int\limits_{t_*}^{t} e^{-\alpha(t-s)} p(s)\|Z_2(s,\cdot)\|_{C_h} |U_{H_1}(s,t) - U_{H_2}(s,t)|dsdt +$$

$$+ M\int\limits_{t_*}^{\infty} p(t)\int\limits_{t_*}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\big(|R_2(s)| + \|R_1^{Q_\Lambda}(s,\cdot)\|_{C_h}\big)|U_{H_1}(s,t) - U_{H_2}(s,t)|dsdt+$$

$$+ M\int\limits_{t_*}^{\infty} p(t)\int\limits_{t_*}^{t} e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-s)}p(s)\|\hat{H}(s,\cdot)\|_{C_h}\|Z_1(s,\cdot) - Z_2(s,\cdot)\|_{C_h}dsdt+$$

$$+ M\int\limits_{t_*}^{\infty} p(t)\int\limits_{t_*}^{t} e^{-\alpha(t-s)}p(s)\|\hat{H}(s,\cdot)\|_{C_h}\|Z_2(s,\cdot)\|_{C_h}|U_{H_1}(s,t) - U_{H_2}(s,t)|dsdt, \quad (75)$$

где $H_1 = \hat{H} + Z_1$ и $H_2 = \hat{H} + Z_2$. При выводе оценки (75) мы учли, что $Z_1(t_*,\theta) = Z_2(t_*,\theta)$, неравенство (51), а также предварительно в правой части выражения для $\mathcal{S}Z_1 - \mathcal{S}Z_2$ мы добавили и вычли величину

$$\int\limits_{t_*}^{t} T(t-s)X_0^{Q_\Lambda}(\theta)G\big(s,Z_2(t,\theta)\big)U_{H_1}(s,t)ds - \int\limits_{t_*}^{t} T(t-s)\hat{H}(s,\theta)\Psi(0)G\big(s,Z_2(s,\theta)\big)U_{H_1}(s,t)ds.$$

Из первого неравенства в (55) при $t_* \le s \le t$ для любых $Z_1(t,\theta)$, $Z_2(t,\theta)$ из шара $\|Z\|_{BL} \le r_0$ вытекает оценка

$$|U_{H_1}(s,t) - U_{H_2}(s,t)| \le Me^{\varepsilon(t-s)}\|Z_1 - Z_2\|_L, \quad (76)$$

где $H_1 = \hat{H} + Z_1$ и $H_2 = \hat{H} + Z_2$. Меняя в (75) порядок интегрирования и учитывая (41), (76) и неравенства $\|Z_i\|_{BL} \le r_0$ $(i = 1, 2)$, заключаем

$$\|\mathcal{S}Z_1 - \mathcal{S}Z_2\|_L \le MN(t_*)\|Z_1 - Z_2\|_L \le q\|Z_1 - Z_2\|_L, \qquad 0 \le q < 1, \quad (77)$$

если t_* достаточно велико. Обращаясь теперь к неравенству (74), устанавливаем сжимаемость оператора $\mathcal{S}$ в шаре $\|Z\|_{BL} \le r_0$.

Пусть $Z(t,\theta)$ — существующее в силу доказанного выше решение уравнения (60) из пространства BL. Заметим, что поскольку функции $p(t)\|Z(t,\cdot)\|_{C_h}$, $\|R_1^{Q_\Lambda}(t,\cdot)\|_{C_h}$ и $|R_2(t)|$ принадлежат классу $L_1[t_*,\infty)$, то в силу утверждения 1 правая часть неравенства (71) есть функция из класса $L_1[t_*,\infty)$. Следовательно, $\|Z(t,\cdot)\|_{C_h} \in L_1[t_*,\infty)$, и теорема доказана. □

При построении асимптотики решений системы (37) на критическом многообразии часто необходимо иметь более точную информацию о скорости стремления к нулю функции $\|Z(t,\cdot)\|_{C_h}$ при $t \to \infty$. В этой связи полезно привести следующий результат, вытекающий из теоремы 2.

Следствие 1. Пусть имеет место оценка

$$\|R_1^{Q_\Lambda}(t,\cdot)\|_{C_h} + |R_2(t)| \le \varphi(t), \qquad t \ge t_0, \quad (78)$$

где функция $\varphi(t) > 0$ при $t \ge t_0$ и, кроме того, существует такое $\beta \in (0,\alpha)$, что

$$\varphi(t_1)e^{\beta t_1} \le \varphi(t_2)e^{\beta t_2}, \qquad t_0 \le t_1 \le t_2. \quad (79)$$

Тогда решение уравнения (60) при $t \ge t_* \ge t_0$ удовлетворяет неравенству

$$\|Z(t,\cdot)\|_{C_h} \le K\varphi(t) \quad (80)$$

с некоторой постоянной K.

Доказательство. Из доказательства теоремы 2 следует, что оператор $\mathcal{S}$ переводит некоторый шар $\|Z\|_B \le r_0$ пространства B в себя и является сжимающим в этом шаре (см. неравенства (73), (74)). Рассмотрим подпространство B' пространства B, состоящее из матриц $Z(t,\theta)$, лежащих в шаре $\|Z\|_B \le r_0$, для которых имеет место неравенство (80) с некоторой фиксированной константой K. Подпространство B' можно считать банаховым пространством с нормой пространства B. Таким образом, нам необходимо лишь показать, что при некотором выборе константы K оператор $\mathcal{S}$ переводит B' в себя. Пусть $Z(t,\theta) \in B'$, тогда из (71) с учетом (78) следует, что

$$\|(\mathcal{S}Z)(t,\cdot)\|_{C_h} \le Me^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)}\|Z(t_*,\cdot)\|_{C_h} + KM\int\limits_{t_*}^{t} e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-s)}p(s)\varphi(s)ds + \\ + M\int\limits_{t_*}^{t} e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-s)}\varphi(s)ds, \qquad t \ge t_*. \quad (81)$$

Далее, в силу (79) заключаем, что

$$\varphi(s) \le e^{\beta(t-s)}\varphi(t), \qquad t_* \le s \le t \quad (82)$$

и, следовательно,

$$\|Z(t_*,\cdot)\|_{C_h} = \frac{\|Z(t_*,\cdot)\|_{C_h}}{\varphi(t_*)}\varphi(t_*) \le \frac{\|Z(t_*,\cdot)\|_{C_h}}{\varphi(t_*)}e^{\beta(t-t_*)}\varphi(t), \qquad t \ge t_*. \quad (83)$$

Учитывая (82), (83) в (81), получаем

$$\|(\mathcal{S}Z)(t,\cdot)\|_{C_h} \le M\Bigg(e^{(-\alpha+\beta+\varepsilon)(t-t_*)}\frac{\|Z(t_*,\cdot)\|_{C_h}}{\varphi(t_*)} + K\int\limits_{t_*}^{t} e^{(-\alpha+\beta+\varepsilon)(t-s)}p(s)ds + \\ + \int\limits_{t_*}^{t} e^{(-\alpha+\beta+\varepsilon)(t-s)}ds\Bigg)\varphi(t), \qquad t \ge t_*. \quad (84)$$

Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, что $-\alpha+\beta+\varepsilon < 0$. Используя неравенство (41), окончательно получаем

$$\|(\mathcal{S}Z)(t,\cdot)\|_{C_h} \le M\Big(\frac{\|Z(t_*,\cdot)\|_{C_h}}{\varphi(t_*)} + \frac{2KN(t_*)}{1-e^{-\alpha+\beta+\varepsilon}} + \frac{1}{\alpha-\beta-\varepsilon}\Big)\varphi(t), \qquad t \ge t_*. \quad (85)$$

Из (85) следует, что можно подобрать такую константу K и выбрать t_* достаточно большим, а величину $\|Z(t_*,\cdot)\|_{C_h}$ достаточно малой, так, чтобы при $t \ge t_*$ было выполнено неравенство $\|(\mathcal{S}Z)(t,\cdot)\|_{C_h} \le K\varphi(t)$. □

Следствие 2. Пусть имеет место оценка

$$\|R_1^{Q_\Lambda}(t,\cdot)\|_{C_h} + |R_2(t)| \le Ke^{-\beta t}, \qquad t \ge t_0, \quad (86)$$

где $\beta > \alpha$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, \alpha)$ найдется такая константа $M(\varepsilon) > 0$, что решение уравнения (60) при $t \geq t_* \geq t_0$ удовлетворяет неравенству

$$\|Z(t,\cdot)\|_{C_h} \leq Me^{(-\alpha+\varepsilon)t}. \tag{87}$$

Замечание. Из (2), (3), (57), (58) и условий 1^0–3^0, накладываемых на функции $v_1(t), \ldots, v_n(t)$, следует, что функция $\|R_1^{Q_\Lambda}(t,\cdot)\|_{C_h} + |R_2(t)|$ есть величина порядка

$$O\Big(\sum_{1\leq i_1\leq\ldots\leq i_{k+1}\leq n} |v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_{k+1}}(t)|\Big) + O\Big(\sum_{i=1}^{n} |\dot{v}_i(t)|\Big) + O\big(\gamma(t)\big). \tag{88}$$

Установим теперь свойство глобального притяжения многообразия $\mathcal{W}(t)$.

Теорема 3. *Пусть $x(t)$ — решение системы* (1), *определенное при $t \geq T \geq t_0$. Тогда найдется такое достаточно большое $t_* \geq T$, что при $t \geq t_*$ имеет место следующее асимптотическое представление:*

$$x_t(\theta) = \Phi(\theta)u_H(t) + H(t,\theta)u_H(t) + O\big(e^{(-\alpha+\varepsilon)t}\big), \qquad t \to \infty. \tag{89}$$

Здесь величина $\alpha > 0$ выбрана так, что выполнены неравенства (32)–(34) *с показателем экспоненты, равным $(-\alpha)$, $\varepsilon \in (0,\alpha)$ — произвольно и $u_H(t)$ $(t \geq t_*)$ — некоторое решение системы на критическом многообразии* (37).

Доказательство. В силу (25), (30) для решения $x_t(\theta)$ имеем

$$x_t(\theta) = \Phi(\theta)u(t) + x_t^{Q_\Lambda}(\theta), \qquad t \geq t_*, \tag{90}$$

где $x_t^{Q_\Lambda}(\theta)$ определяется формулой (27) (см. также (29)) с $t_0 = t_*$, а функция $u(t)$ является решением системы (31) с начальным условием $u(t_*) = \big(\Psi(\xi), x_{t_*}(\theta)\big)$. Далее, пусть $\mathcal{W}(t)$ — критическое многообразие для системы (1), существующее в силу теоремы 1 при $t \geq t_*$, где t_* достаточно велико. Напомним, что это многообразие определяется формулой (35). Положим $u_H(t_*) = u(t_*)$, тогда

$$\tilde{x}_t(\theta) = \Phi(\theta)u_H(t) + H(t,\theta)u_H(t) \tag{91}$$

представляет собой некоторое решение системы (1), лежащее при $t \geq t_*$ на многообразии $\mathcal{W}(t)$. Покажем, что $x_t(\theta) = \tilde{x}_t(\theta) + O(e^{(-\alpha+\varepsilon)t})$. Полагая $z(t,\theta) = x_t^{Q_\Lambda}(\theta) - H(t,\theta)u_H(t)$, $r(t) = u(t) - u_H(t)$ и вычитая (91) из (90), получаем

$$x_t(\theta) - \tilde{x}_t(\theta) = \Phi(\theta)r(t) + z(t,\theta), \qquad t \geq t_*. \tag{92}$$

Замечая, что вектор функция $H(t,\theta)u_H(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (42) и вычитая (42) из (29) (с $t_0 = t_*$), с учетом (90) получаем следующее уравнение для нахождения $z(t,\theta)$:

$$z(t,\theta) = T(t-t_*)z(t_*,\theta) + \int_{t_*}^{t} T(t-s)X_0^{Q_\Lambda}G\big(s, \Phi(\theta)r(s) + z(s,\theta)\big)ds, \qquad t \geq t_*. \tag{93}$$

Отметим, что мы можем считать величину $\|z(t_*,\cdot)\|_{C_h}$ настолько малой, насколько нам это потребуется. Действительно, мы всегда можем от решения $x_t(\theta)$ в силу линейности системы (1) перейти к рассмотрению решения $\delta x_t(\theta)/\|x_{t_*}(\theta)\|_{C_h}$ с начальной функцией при $t = t_*$ равной $\varphi(\theta)$ и нормой $\|\varphi(\theta)\|_{C_h} = \delta$ для любого наперед заданного $\delta > 0$.

Далее, вычитая (37) (где $u(t) = u_H(t)$) из (31) и учитывая (90), заключаем, что вектор-функция $r(t)$ является решением следующей задачи Коши:

$$\dot r = Dr(t) + \Psi(0)G\bigl(t, \Phi(\theta)r(t) + z(t,\theta)\bigr), \qquad r(t_*) = 0. \tag{94}$$

Представим матрицу D, имеющую жорданову форму

$$D = \operatorname{diag}(D^{(1)},\dots,D^{(l)}), \qquad D^{(i)} = \begin{pmatrix} \lambda^{(i)} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^{(i)} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda^{(i)} & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda^{(i)} \end{pmatrix}, \tag{95}$$

где $\lambda^{(i)} \in \Lambda$, $D^{(i)}$ — $(N_i \times N_i)$-матрица и $N_1 + \ldots + N_l = N$, в виде суммы

$$D = D_1 + D_2, \qquad D_1 = \operatorname{diag} D \tag{96}$$

и D_2 — нильпотентная матрица. Заметим, что всегда можно считать, что $|D_2| < \delta$ для любого наперед заданного $\delta > 0$. Действительно, в системе (94) можно осуществить замену с постоянной матрицей $r = C_\delta \tilde r$, где матрица C_δ приводит матрицу $\delta^{-1}D$ к жордановой форме. Тогда эта замена оставляет матрицу D_1 без изменения, а у матрицы D_2 могут быть отличными от нуля лишь элементы $d_{i,i+1} = \delta$. Переходя от (94) к соответствующему интегральному уравнению, получаем

$$r(t) = \int_{t_*}^{t} e^{D_1(t-s)}\bigl[D_2 r(s) + \Psi(0)G\bigl(s, \Phi(\theta)r(s) + z(s,\theta)\bigr)\bigr]ds. \tag{97}$$

Рассмотрим пространство B_1, элементами которого являются пары $\bigl(z(t,\theta), r(t)\bigr)$. Вектор-функция $z(t,\theta)$ непрерывна по переменным $\theta \in [-h,0]$ и $t \ge t_*$, а вектор-функция $r(t)$ непрерывна по $t \ge t_*$. Считаем, что функция $z(t_*,\theta)$ фиксирована и принадлежит пространству Q_Λ. Кроме того, имеют место следующие неравенства:

$$\|z(t,\cdot)\|_{C_h} \le Ke^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)}, \qquad |r(t)| \le Ke^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)}, \qquad t \ge t_*, \tag{98}$$

с некоторой константой $K > 0$ и выбранной произвольным образом величиной $\varepsilon \in (0,\alpha)$. Пространство B_1 становится банаховым, если ввести в нем норму по правилу

$$\bigl\|\bigl(z(t,\theta), r(t)\bigr)\bigr\|_{B_1} = \sup_{t \ge t_*}\bigl(e^{(\alpha-\varepsilon)(t-t_*)}(\|z(t,\cdot)\|_{C_h} + |r(t)|)\bigr).$$

Заметим, что если система (93), (97) имеет решение $\bigl(z(t,\theta), r(t)\bigr) \in B_1$, то уравнение (97) и можно записать в следующей эквивалентной форме. Устремим в этом уравнении переменную t к бесконечности, учтем правое из неравенств (98), а также тот факт, что в силу гипотезы $\mathbf{H_1}$ все собственные числа матрицы D_1 имеют нулевые вещественные части. Получим

$$\int_{t_*}^{\infty} e^{-D_1 s}\big[D_2 r(s) + \Psi(0)G\big(s, \Phi(\theta)r(s) + z(s,\theta)\big)\big]ds = 0.$$

Используя это соотношение в (97), переписываем последнее в следующем виде:

$$r(t) = -\int_{t}^{\infty} e^{D_1(t-s)}\big[D_2 r(s) + \Psi(0)G\big(s, \Phi(\theta)r(s) + z(s,\theta)\big)\big]ds, \qquad t \geq t_*. \tag{99}$$

Систему уравнений (93), (99) запишем в виде операторного уравнения в пространстве B_1:

$$\big(z(t,\theta), r(t)\big) = \mathcal{L}\big(z(t,\theta), r(t)\big) = \big(\mathcal{L}_1\big(z(t,\theta), r(t)\big), \mathcal{L}_2\big(z(t,\theta), r(t)\big)\big), \tag{100}$$

где операторы $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ определяются правыми частями уравнений (93) и (99) соответственно. Покажем, что оператор $\mathcal{L}$ будет сжимающим в пространстве B_1, если величина $\|z(t_*,\cdot)\|$ достаточно мала и t_* достаточно велико.

Сначала установим, что оператор $\mathcal{L}$ переводит пространство B_1 в себя. Пусть $(z,r) \in B_1$, тогда из (93) с учетом (41) следует, что

$$\|\big(\mathcal{L}_1(z,r)\big)(t,\cdot)\|_{C_h} \leq Me^{-\alpha(t-t_*)}\|z(t_*,\cdot)\|_{C_h} + MKe^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)}\int_{t_*}^{t} e^{-\varepsilon(t-s)}p(s)ds \leq$$
$$\leq M\Big(\|z(t_*,\cdot)\|_{C_h} + \frac{2KN(t_*)}{1-e^{-\varepsilon}}\Big)e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)}, \qquad t \geq t_*. \tag{101}$$

Выбирая теперь $\|z(t_*,\cdot)\|_{C_h}$ достаточно малой и t_* достаточно большим, можно добиться того, что для функции $\mathcal{L}_1(z,r)$ будет выполнено левое из неравенств (98). Замечая, что $|e^{D_1(t-s)}| \leq C$ для некоторой константы C (она зависит только от используемой матричной нормы) и $|D_2| < \delta$, из (99) выводим

$$|\big(\mathcal{L}_2(z,r)\big)(t)| \leq \frac{CK\delta}{\alpha-\varepsilon}e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)} + MK\int_{t}^{\infty} e^{(-\alpha+\varepsilon)(s-t_*)}p(s)ds \leq$$
$$\leq K\Big(\frac{C\delta}{\alpha-\varepsilon} + M\hat{\varepsilon} + M\int_{t}^{\infty}\gamma(s)ds\Big)e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)}, \qquad t \geq t_*, \tag{102}$$

где величина M зависит, вообще говоря, от δ. Здесь мы учли формулу (46), определяющую вид функции $p(t)$, а также то обстоятельство, что $w(t) < \hat{\varepsilon}$ для любого наперед заданного $\hat{\varepsilon} > 0$, если t_* достаточно велико. Используя теперь тот факт, что $\gamma(t) \in L_1[t_0,\infty)$, произвольность величин δ, $\hat{\varepsilon}$ и выбирая t_* достаточно большим, устанавливаем справедливость правого из неравенств (98) для функции $\mathcal{L}_2(z,r)$.

Установим теперь сжимаемость оператора $\mathcal{L}$. Пусть (z_1,r_1) и (z_2,r_2) принадлежат пространству B_1, тогда

$$\|\mathcal{L}(z_1,r_1)-\mathcal{L}(z_2,r_2)\|_{B_1}=\sup_{t\ge t_*}\Big\{e^{(\alpha-\varepsilon)(t-t_*)}\big(\|(\mathcal{L}_1(z_1,r_1)-\mathcal{L}_1(z_2,r_2))(t,\cdot)\|_{C_h}+$$

$$+\,|(\mathcal{L}_2(z_1,r_1)-\mathcal{L}_2(z_2,r_2))(t)|\big)\Big\}\le M\sup_{t\ge t_*}\int\limits_{t_*}^{t}e^{-\varepsilon(t-s)}p(s)e^{(\alpha-\varepsilon)(s-t_*)}\big\{|r_1(s)-r_2(s)|+$$

$$+\,\|z_1(s,\cdot)-z_2(s,\cdot)\|_{C_h}\big\}ds+\sup_{t\ge t_*}\Big\{C\delta e^{(\alpha-\varepsilon)t}\int\limits_{t}^{\infty}e^{(-\alpha+\varepsilon)s}e^{(\alpha-\varepsilon)(s-t_*)}|r_1(s)-r_2(s)|ds+$$

$$+\,Me^{(\alpha-\varepsilon)t}\int\limits_{t}^{\infty}e^{(-\alpha+\varepsilon)s}p(s)e^{(\alpha-\varepsilon)(s-t_*)}\big(|r_1(s)-r_2(s)|+\|z_1(s,\cdot)-z_2(s,\cdot)\|_{C_h}\big)ds\Big\}\le$$

$$\le\Big\{\frac{2MN(t_*)}{1-e^{-\varepsilon}}+\frac{C\delta}{\alpha-\varepsilon}+M\hat{\varepsilon}+M\int\limits_{t_*}^{\infty}\gamma(s)ds\Big\}\|(z_1,r_1)-(z_2,r_2)\|_{B_1}.\quad(103)$$

Выбирая теперь t_* достаточно большим, а величины $\delta,\hat{\varepsilon}$ достаточно малыми, устанавливаем сжимаемость оператора $\mathcal{L}$ в пространстве B_1. Следовательно, уравнение (100) имеет единственное решение в пространстве B_1.

Обращаясь теперь к равенству (92), завершаем доказательство теоремы. □

Пусть $u^{(1)}(t),\dots,u^{(N)}(t)$ — фундаментальные решения системы на критическом многообразии (37), а $x(t)$ — произвольное решение системы (1), определенное при $t\ge T$. Тогда в силу теоремы 4 имеет место следующее асимптотическое представление:

$$x(t)=x_t(0)=\sum_{i=1}^{N}c_i\big(\Phi(0)+H(t,0)\big)u^{(i)}(t)+O\big(e^{-\beta t}\big),\qquad t\to\infty,\quad(104)$$

где $c_1,\dots,c_N$ — произвольные комплексные постоянные и $\beta>0$ — некоторое действительное число.

4. Асимптотическое интегрирование системы на критическом многообразии

Система (37), описывающая динамику исходной системы (1) на критическом многообразии $\mathcal{W}(t)$, относится к классу так называемых систем с колебательно убывающими коэффициентами. Метод асимптотического интегрирования систем такого типа предложен в работе [5]. Система (37) в силу (57), (59) имеет вид

$$\dot{u}=\Big[D+\sum_{i=1}^{n}v_i(t)A_i(t)+\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)A_{i_1i_2}(t)+\ldots+$$
$$+\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)A_{i_1\ldots i_k}(t)+W(t)\Big]u,\qquad u\in\mathbb{C}^N.\quad(105)$$

В этой системе матрица D определяется формулой (95), $(N\times N)$-матрицы $A_{i_1\ldots i_l}(t)$ — это матрицы, элементами которых являются тригонометрические многочлены, т.е.

матрицы вида (6), а матрица $W(t)$ — это некоторая матрица из класса $L_1[t_*,\infty)$. Без ограничения общности можно считать, что матрица D в системе (105) — это матрица D_2, отличными от нуля элементами которой могут быть лишь элементы $d_{i,i+1}=1$ при некоторых $i\in\mathbb{N}$. Действительно, матрицу D можно представить в виде суммы (96), где в силу гипотезы $\mathbf{H}_1$ все собственные числа диагональной матрицы D_1 имеют нулевые вещественные части. В системе (105) можно предварительно сделать замену $u=e^{D_1t}\hat{u}$, которая не меняет свойств матриц $A_{i_1\dots i_l}(t)$ и $W(t)$, а на месте матрицы D в преобразованной системе будет стоять матрица D_2.

Таким образом, в дальнейшем будем считать, что единственным собственным числом жордановой матрицы D в системе (105) является ноль. Построение асимптотики решений этой системы при $t\to\infty$ усложняет то обстоятельство, что ее коэффициенты имеют колебательный вид. Поэтому на первом этапе построения асимптотических формул в системе (105) осуществляется так называемая усредняющая замена, которая позволяет избавиться от осциллирующих величин в главной части системы. Имеет место следующая теорема (см. [5]).

Теорема 4. *Система* (105) *при достаточно больших t заменой*

$$u=\Big[I+\sum_{i=1}^{n}Y_i(t)v_i(t)+\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}Y_{i_1i_2}(t)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)+\ldots+ \\ +\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}Y_{i_1\dots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big]u_1 \quad (106)$$

приводится к виду

$$\dot{u}_1=\Big[D+\sum_{i=1}^{n}A_iv_i(t)+\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}A_{i_1i_2}v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)+\ldots+ \\ +\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}A_{i_1\dots i_k}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)+W_1(t)\Big]u_1(t) \quad (107)$$

с постоянными матрицами $A_{i_1\dots i_l}$ и матрицей $W_1(t)$ из класса $L_1[t_*,\infty)$. В замене (106) *I — единичная матрица, а элементами матриц $Y_{i_1\dots i_l}(t)$ являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением.*

Как правило, для построения асимптотики решений системы (107) достаточно вычислить лишь несколько первых постоянных матриц. По этой причине приведем здесь для них явные формулы. Имеем

$$A_i=\mathrm{M}\big[A_i(t)\big],\qquad i=1,\dots,n.\quad \left(\mathrm{M}\big[F(t)\big]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(s)ds\right). \quad (108)$$

Далее,

$$A_{ij}=\mathrm{M}\big[A_{ij}(t)+A_i(t)Y_j(t)+A_j(t)Y_i(t)\big],\quad 1\le i<j\le n$$

и

$$A_{ii}=\mathrm{M}\big[A_{ii}(t)+A_i(t)Y_i(t)\big],\quad i=1,\dots,n. \quad (109)$$

Матрицы $Y_i(t)$ с нулевым средним значением определяются как решения матричных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{Y}_i - DY_i + Y_i D = A_i(t) - A_i, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{110}$$

Дальнейшее преобразование усредненной системы (107) во многом определяется структурой матрицы D. Рассмотрим подробно лишь случай, когда матрица D в системах (105) и (107) является нулевой. Предположим, что в главной части системы (107) можно выделить так называемый ведущий член, и этим членом является матрица $A_{i_1 \dots i_s} v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_s}(t)$. Это означает, что систему (107) можно записать в виде

$$\dot{u}_1 = \big[A_{i_1 \dots i_s} + V(t)\big] v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_s}(t) u_1 + W_1(t) u_1, \tag{111}$$

где матрица $V(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и $\dot{V}(t) \in L_1[t_*, \infty)$. Справедлива следующая лемма (см., например, [1, 3, 13]).

Лемма 1 (о диагонализации переменной матрицы). *Пусть все собственные числа матрицы $A_{i_1 \dots i_s}$ различны, а матрица $V(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и $\dot{V}(t) \in L_1[t_*, \infty)$. Тогда при достаточно больших t существует невырожденная матрица $C(t)$ такая, что:*

(i) *по столбцам этой матрицы расположены собственные векторы матрицы $A_{i_1 \dots i_s} + V(t)$ и $C(t) \to C_0$ при $t \to \infty$. Постоянная матрица C_0 составлена из собственных векторов матрицы $A_{i_1 \dots i_s}$;*

(ii) *$\dot{C}(t) \in L_1[t_*, \infty)$;*

(iii) *она приводит матрицу $A_{i_1 \dots i_s} + V(t)$ к диагональному виду, т.е.*

$$C^{-1}(t) \big[A_{i_1 \dots i_s} + V(t)\big] C(t) = \hat{\Lambda}(t),$$

где $\hat{\Lambda}(t) = \operatorname{diag}\big(\tilde{\lambda}_1(t), \dots, \tilde{\lambda}_N(t)\big)$ и $\tilde{\lambda}_j(t)$ $(j = 1, \dots, N)$ — собственные числа матрицы $A_{i_1 \dots i_s} + V(t)$.

В системе (107) осуществим замену

$$u_1(t) = C(t) u_2(t), \tag{112}$$

где $C(t)$ — матрица из леммы 1. Эта замена приводит систему (107) к так называемому L-диагональному виду:

$$\dot{u}_2 = \big[\Lambda(t) + W_2(t)\big] u_2, \tag{113}$$

где $\Lambda(t) = \operatorname{diag}\big(\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t)\big)$, $\lambda_j(t) = \tilde{\lambda}_j(t) v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_s}(t)$ $(j = 1, \dots, N)$ и

$$W_2(t) = -C^{-1}(t) \dot{C}(t) + C^{-1}(t) W_1(t) C(t).$$

В силу свойств (i) и (ii) матрицы $C(t)$ матрица $W_2(t)$ принадлежит классу $L_1[t_*, \infty)$.

Для построения асимптотики фундаментальной матрицы L-диагональной системы (113) при $t \to \infty$ может быть использована известная асимптотическая теорема

Н. Левинсона. Предположим, что для элементов матрицы $\Lambda(t)$ выполнено следующее условие, называемое условием дихотомии: для каждой пары индексов (i, j) имеет место либо неравенство

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}\big(\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\big)ds \le K_1, \qquad t_2 \ge t_1 \ge t_*, \tag{114}$$

либо неравенство

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}\big(\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\big)ds \ge K_2, \qquad t_2 \ge t_1 \ge t_*, \tag{115}$$

где K_1, K_2 — некоторые постоянные. Справедлива следующая теорема (см., например, [3, 13]).

Теорема 5 (Levinson). *Пусть выполнено условие дихотомии* (114), (115). *Тогда фундаментальная матрица L-диагональной системы* (113) *допускает следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:*

$$U(t) = \big(I + o(1)\big)\exp\Big\{\int\limits_{t^*}^{t} \Lambda(s)ds\Big\}. \tag{116}$$

В том случае, когда матрица D в системе (107) является ненулевой жордановой матрицей, а также когда жордановой является матрица $A_{i_1 \ldots i_s}$ в системе (111), общего алгоритма построения асимптотики указать нельзя. В этой ситуации на вид асимптотических формул в главном существенное влияние могут оказывать элементы матрицы $W_1(t)$, принадлежащей классу $L_1[t_*, \infty)$. В этой работе мы не будем приводить соответствующие результаты, ограничившись лишь некоторыми ссылками (см., например, [10–13]).

Пример. Рассмотрим задачу построения асимптотических формул для решений уравнения (11) при $t \to \infty$. Известно (см., например, [7]), что характеристический полином для соответствующего предельного уравнения (8)

$$p(\lambda) = \lambda + \frac{\pi}{2}e^{-\lambda}$$

имеет чисто мнимые корни $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\pi/2$, а вещественные части всех остальных корней этого уравнения — отрицательны. Таким образом, мы находимся в условиях применимости описанного выше метода. Несложные вычисления показывают, что (1×2)-матрица $\Phi(\theta)$ и (2×1)-матрица $\Psi(\xi)$, удовлетворяющие условию нормировки (17), могут быть выбраны следующим образом:

$$\Phi(\theta) = \big(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\theta}, e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\theta}\big), \quad -1 \le \theta \le 0, \qquad \Psi(\xi) = \frac{4}{4+\pi^2}\begin{pmatrix}(1 - \mathrm{i}\frac{\pi}{2})e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\xi} \\ (1 + \mathrm{i}\frac{\pi}{2})e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\xi}\end{pmatrix}, \quad 0 \le \xi \le 1.$$

Далее, поскольку $G(t,\varphi) = at^{-\rho}\sin\omega t\varphi(0)$, то система на критическом многообразии (37) имеет вид

$$\dot{u} = \Big[D + t^{-\rho}B_1(t) + W(t)\Big]u, \qquad t \geq t_*, \tag{117}$$

где

$$D = \frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad B_1(t) = -\frac{2a\mathrm{i}}{4+\pi^2}(e^{\mathrm{i}\omega t} - e^{-\mathrm{i}\omega t})\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2} & 1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2} \\ 1+\mathrm{i}\frac{\pi}{2} & 1+\mathrm{i}\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, \tag{118}$$

и $W(t) = \Psi(0)G\big(t, H(t,\theta)\big)$. Заметим, что в силу представления (57), вида оператора $G(t,\varphi)$, а также теоремы 2, следствия 1 и замечания к этой теореме, следует, что $W(t) = O\big(t^{-2\rho}\big)$. Рассмотрим далее следующие случаи.

Если

$$\rho > 1,$$

то система (117) имеет L-диагональную форму (113). Из теоремы 5 тогда следует, что фундаментальные решения системы (117) имеют следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$u^{(j)}(t) = \big(e_j + o(1)\big)e^{\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{2}t}, \quad j = 1, 2, \tag{119}$$

где e_j — векторы канонического базиса в $\mathbb{R}^2$. Тогда в силу (104) и свойств матрицы $H(t,\theta)$ все решения уравнения (11) при $t \to \infty$ имеют следующее асимптотическое представление:

$$x(t) = c_1\big(1 + o(1)\big)e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}t} + c_2\big(1 + o(1)\big)e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}t} + O\big(e^{-\beta t}\big), \tag{120}$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные и $\beta > 0$ — некоторое действительное число.

Пусть теперь

$$\frac{1}{2} < \rho \leq 1.$$

В системе (117) осуществим замену $u = \mathrm{diag}\big(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}t}, e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}t}\big)u_1$, которая приводит ее к виду

$$\dot{u}_1 = \big[t^{-\rho}A_1(t) + W_1(t)\big]u_1, \tag{121}$$

где

$$A_1(t) = -\frac{2a\mathrm{i}}{4+\pi^2}\begin{pmatrix} (1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2})(e^{\mathrm{i}\omega t} - e^{-\mathrm{i}\omega t}) & (1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2})(e^{\mathrm{i}\omega t} - e^{-\mathrm{i}\omega t})e^{-\mathrm{i}\pi t} \\ (1+\mathrm{i}\frac{\pi}{2})(e^{\mathrm{i}\omega t} - e^{-\mathrm{i}\omega t})e^{\mathrm{i}\pi t} & (1+\mathrm{i}\frac{\pi}{2})(e^{\mathrm{i}\omega t} - e^{-\mathrm{i}\omega t}) \end{pmatrix}, \tag{122}$$

а матрица $W_1(t) \in L_1[t_*, \infty)$. В системе (121) сделаем усредняющую замену

$$u_1 = \big(I + t^{-\rho}Y_1(t)\big)u_2,$$

в результате которой в силу теоремы 4 приходим к усредненной системе

$$\dot{u}_2 = \big[t^{-\rho}A_1 + W_2(t)\big]u_2. \tag{123}$$

Здесь $A_1 = \mathrm{M}\big[A_1(t)\big]$ и $W_2(t)$ – некоторая матрица из класса $L_1[t_*, \infty)$. Вид матрицы A_1 будет различаться в следующих случаях.

Пусть
$$\omega \neq \pm\pi. \tag{124}$$
Тогда матрица A_1 является нулевой и система (123) имеет L-диагональный вид. В силу теоремы Левинсона базисные решения этой системы имеют следующую асимптотику при $t \to \infty$:
$$u_2^{(j)}(t) = e_j + o(1), \quad j = 1, 2.$$
Возвращаясь теперь к системе (117), получаем асимптотические формулы (119) для ее фундаментальных решений при $t \to \infty$. Следовательно, все решения исходного уравнения (11) при $t \to \infty$ имеют асимптотику вида (120).

Предположим теперь, что
$$\omega = \pi. \tag{125}$$
Случай $\omega = -\pi$ в силу вида уравнения (11) сводится к данной ситуации простой заменой параметра a на $(-a)$. Имеем
$$A_1 = -\frac{2a\mathrm{i}}{4+\pi^2}\begin{pmatrix} 0 & 1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2} \\ -1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{126}$$
Собственные числа матрицы A_1 различны и имеют вид
$$\mu_{1,2} = \pm\frac{a}{\sqrt{4+\pi^2}}.$$
Таким образом, система (123) заменой $u_2 = Cu_3$, где матрица $C = [f_1, f_2]$ диагонализирует матрицу A_1, приводится к L-диагональному виду. Фундаментальные решения системы (123) имеют следующую асимптотику при $t \to \infty$:
$$u_2^{(j)}(t) = \big(f_j + o(1)\big)\exp\Big\{\mu_j \int t^{-\rho} dt\Big\}, \quad j = 1, 2,$$
где
$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\delta \end{pmatrix}, \quad \delta = \frac{-\pi + 2\mathrm{i}}{\sqrt{4+\pi^2}}.$$
В этой ситуации все решения исходного уравнения (11) имеют следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:
$$x(t) = c_1\Big(\exp\Big\{\mathrm{i}\frac{\pi}{2} + \mu_1\int t^{-\rho}dt\Big\}\big(1 + o(1)\big) + \exp\Big\{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2} + \mu_1\int t^{-\rho}dt\Big\}\big(\delta + o(1)\big)\Big) +$$
$$+c_2\Big(\exp\Big\{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}+\mu_2\int t^{-\rho}dt\Big\}\big(1+o(1)\big)+\exp\Big\{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}+\mu_2\int t^{-\rho}dt\Big\}\big(-\delta+o(1)\big)\Big)+O\big(e^{-\beta t}\big), \tag{127}$$
где c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные и $\beta > 0$ — некоторое действительное число.

Рассмотрим далее случай, когда
$$\frac{1}{3} < \rho \leq \frac{1}{2}. \tag{128}$$

Матрица $W(t) = \Psi(0)G\big(t, H(t,\theta)\big)$ в системе (117) более не принадлежит классу $L_1[t_*, \infty)$. Таким образом, нам необходимо построить (1×2)-матрицу $H(t,\theta)$, описывающую критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$. В силу (57), (59) имеем,

$$H(t,\theta) = t^{-\rho}H_1(t,\theta) + t^{-2\rho}H_2(t,\theta) + Z(t,\theta), \tag{129}$$

где $\|Z(t,\cdot)\|_{C_h} \in L_1[t_*, \infty)$. Заметим, что представляет интерес лишь изучение ситуации, когда выполнено неравенство (124). Действительно, если имеет место равенство (125), то усредненную систему на критическом многообразии можно сперва представить в виде (111), где $A_{i_1\dots i_s} = A_1$, а матрица A_1 определяется формулой (126). Затем, воспользовавшись леммой 1, эту систему можно привести к L-диагональному виду (113) и построить асимптотику с помощью теоремы Левинсона. Несложно установить, что в случае выполнения равенства (125) при условии $\rho \le 1/2$ для решений уравнения (11) при $t\to\infty$ будет справедливо асимптотическое представление типа (127). Единственное отличие состоит в том, что в этом представлении величину $\int t^{-\rho}dt$ нужно заменить на величину

$$\frac{t^{1-\rho}}{1-\rho}\big(1+o(1)\big). \tag{130}$$

Итак, будем считать, что выполнено неравенство (124). Вычислим матрицу $H_1(t,\theta)$, используя алгоритм, описанный в [4]. Подставим представление (129) в систему (38) и соберем члены, содержащие множитель $t^{-\rho}$. Получаем следующую систему для нахождения (1×2)-матрицы $H_1(t,\theta)$:

$$\begin{gathered}\frac{a}{2\mathrm{i}}\big(e^{\mathrm{i}\omega t} - e^{-\mathrm{i}\omega t}\big)\Phi(\theta)\Psi(0)\Phi(0) + H_1(t,\theta)D + \frac{\partial H_1}{\partial t} = \\ = \begin{cases} \dfrac{\partial H_1}{\partial \theta}, & -1\le\theta<0,\\ -\dfrac{\pi}{2}H(t,-1) + \dfrac{a}{2\mathrm{i}}\big(e^{\mathrm{i}\omega t} - e^{-\mathrm{i}\omega t}\big)\Phi(0), & \theta = 0.\end{cases}\end{gathered} \tag{131}$$

Полагая $H(t,\theta) = \big(h_1(t,\theta), h_2(t,\theta)\big)$, получаем следующие задачи для нахождения элементов этой матрицы:

$$\begin{gathered} -\frac{2a\mathrm{i}}{4+\pi^2}\big(e^{\mathrm{i}\omega t} - e^{-\mathrm{i}\omega t}\big)\Big(\big(1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\theta} + \big(1+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\theta}\Big) + (-1)^{j-1}\mathrm{i}\frac{\pi}{2}h_j(t,\theta) + \frac{\partial h_j}{\partial t} = \\ = \begin{cases} \dfrac{\partial h_j}{\partial\theta}, & -1\le\theta<0,\\ -\dfrac{\pi}{2}h_j(t,-1) + \dfrac{a}{2\mathrm{i}}\big(e^{\mathrm{i}\omega t} - e^{-\mathrm{i}\omega t}\big), & \theta=0,\end{cases} \qquad j=1,2.\end{gathered} \tag{132}$$

Каждая из этих задач однозначно разрешима в силу [4, Теорема 1]. Отсюда и из вида (132) легко вывести, что $h_2(t,\theta) = \overline{h_1(t,\theta)}$. Решение $h_1(t,\theta)$ ищем в виде

$$h_1(t,\theta) = g_1(\theta)e^{\mathrm{i}\omega t} + g_2(\theta)e^{-\mathrm{i}\omega t}. \tag{133}$$

Подставляя (133) в (132) и собирая члены при одинаковых показателях экспоненты, получаем

$$(-1)^j \frac{2a\mathrm{i}}{4+\pi^2}\Big(\big(1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\theta}+\big(1+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\theta}\Big)+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}g_j(\theta)+(-1)^{j-1}\mathrm{i}\omega g_j(\theta)=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{dg_j}{d\theta}, & -1\le\theta<0,\\ -\dfrac{\pi}{2}g_j(-1)+(-1)^j\dfrac{a\mathrm{i}}{2}, & \theta=0,\end{cases}\qquad j=1,2. \quad (134)$$

Несложные вычисления приводят к следующим формулам для функций $g_j(\theta)$ ($j=1,2$):

$$g_{1,2}(\theta)=K_{1,2}e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}\pm\omega)\theta}+\frac{2a}{\omega(4+\pi^2)}\big(1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\theta}+\frac{4a}{(\omega\pm\pi)(4+\pi^2)}\big(1+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\theta}, \quad (135)$$
$$K_{1,2}=\mp\frac{4a}{4+\pi^2}\big(1+\frac{\pi^2}{8}+\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\big)\frac{1}{\frac{\pi}{2}\pm\omega-\frac{\pi}{2}\exp\{\mp\mathrm{i}\omega\}}.$$

Здесь верхний знак в формулах и константа K_1 соответствуют функции $g_1(\theta)$, а нижний знак и константа K_2 — функции $g_2(\theta)$. Таким образом, матрица $H_1(t,\theta)$ имеет вид

$$H_1(t,\theta)=\big(h_1(t,\theta),\overline{h_1(t,\theta)}\big), \quad (136)$$

где функция $h_1(t,\theta)$ определяется формулами (133), (135).

Возвращаясь теперь к системе на критическом многообразии (117) и учитывая (129), (136), получаем для нее следующее представление:

$$\dot u=\Big[D+t^{-\rho}B_1(t)+t^{-2\rho}B_2(t)+R(t)\Big]u, \qquad t\ge t_*, \quad (137)$$

где матрицы D и $B_1(t)$ определяются формулами (118), а матрица $R(t)$ принадлежит классу $L_1[t_*,\infty)$. Кроме того,

$$B_2(t)=-\frac{a\mathrm{i}}{2}(e^{\mathrm{i}\omega t}-e^{-\mathrm{i}\omega t})\Psi(0)H_1(t,0)=$$
$$=-\frac{2a\mathrm{i}}{4+\pi^2}\big(e^{\mathrm{i}\omega t}-e^{-\mathrm{i}\omega t}\big)\begin{pmatrix}\big(1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)h_1(t,0) & \big(1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)\overline{h_1(t,0)}\\ \big(1+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)h_1(t,0) & \big(1+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)\overline{h_1(t,0)}\end{pmatrix}. \quad (138)$$

В системе (137) сделаем замену $u=\operatorname{diag}\big(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}t},e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}t}\big)u_1$, в результате которой она приводится к виду

$$\dot u_1=\big[t^{-\rho}A_1(t)+t^{-2\rho}A_2(t)+R_1(t)\big]u_1. \quad (139)$$

Здесь матрица $A_1(t)$ определяется формулой (122),

$$A_2(t)=-\frac{2a\mathrm{i}}{4+\pi^2}\begin{pmatrix}(1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2})(e^{\mathrm{i}\omega t}-e^{-\mathrm{i}\omega t})h_1(t,0) & (1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2})(e^{\mathrm{i}\omega t}-e^{-\mathrm{i}\omega t})e^{-\mathrm{i}\pi t}\overline{h_1(t,0)}\\ (1+\mathrm{i}\frac{\pi}{2})(e^{\mathrm{i}\omega t}-e^{-\mathrm{i}\omega t})e^{\mathrm{i}\pi t}h_1(t,0) & (1+\mathrm{i}\frac{\pi}{2})(e^{\mathrm{i}\omega t}-e^{-\mathrm{i}\omega t})\overline{h_1(t,0)}\end{pmatrix}, \quad (140)$$

и матрица $R_1(t)\in L_1[t_*,\infty)$. Согласно теореме 4, осуществим в системе (139) усредняющую замену

$$u_1=\big[I+t^{-\rho}Y_1(t)+t^{-2\rho}Y_2(t)\big]u_2.$$

В результате этой замены приходим к системе

$$\dot u_2=\big[t^{-2\rho}A_2+R_2(t)\big]u_2. \quad (141)$$

Здесь мы учли, что в силу (124) матрица $A_1 = \mathrm{M}\big[A_1(t)\big]$ является нулевой. Далее,

$$A_2 = \mathrm{M}\big[A_2(t) + A_1(t)Y_1(t)\big], \qquad \dot{Y}_1 = A_1(t) - A_1 = A_1(t) \tag{142}$$

и матрица $R_2(t) \in L_1[t_*, \infty)$. Пусть сначала

$$\omega = \frac{\pi}{2}, \qquad \Big(\omega = -\frac{\pi}{2}\Big). \tag{143}$$

Несложные, но довольно утомительные вычисления приводят к следующей формуле для матрицы A_2:

$$A_2 = \frac{4a^2}{\pi(4+\pi^2)} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \frac{\pi}{10} + \mathrm{i}\big(\frac{4}{15} - \frac{\pi}{5}\big) & \frac{4}{4+\pi^2}\big(\frac{\pi}{2} - 1 + \mathrm{i}\big(\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{8} + \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi^3}{16}\big)\big) \\ \frac{4}{4+\pi^2}\big(\frac{\pi}{2} - 1 - \mathrm{i}\big(\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{8} + \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi^3}{16}\big)\big) & \frac{4}{5} - \frac{\pi}{10} - \mathrm{i}\big(\frac{4}{15} - \frac{\pi}{5}\big) \end{pmatrix}. \tag{144}$$

Собственные числа матрицы A_2 действительны и разных знаков:

$$\mu_{1,2} = \frac{a^2}{15(4+\pi^2)}\big(48 - 6\pi \pm \sqrt{81\pi^2 - 516\pi + 4244}\big). \tag{145}$$

Система (141) заменой $u_2 = Cu_3$ приводится к L-диагональному виду. Фундаментальные решения системы (141), следовательно, имеют следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$u_2^{(j)}(t) = \big(f_j + o(1)\big) \exp\Big\{\mu_j \int t^{-2\rho} dt\Big\}, \quad j = 1, 2,$$

где $f_1 = \big(\delta_1, \delta_2\big)^T$ и f_2 — собственные векторы матрицы A_2, отвечающие собственным числам μ_1 и μ_2 соответственно. Решения исходного уравнения (11) при $t \to \infty$ имеют следующее асимптотическое представление:

$$x(t) = c_1\Big(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\big(\delta_1 + o(1)\big) + e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\big(\delta_2 + o(1)\big)\Big) \exp\Big\{\mu_1 \int t^{-2\rho} dt\Big\} + O\Big(\exp\Big\{\mu_2 \int t^{-2\rho} dt\Big\}\Big), \tag{146}$$

где c_1 — произвольная комплексная постоянная.

Предположим теперь, что

$$\omega \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi, \tag{147}$$

и имеет место неравенство (128). Матрица A_2, определяемая соотношениями (142), имеет следующий вид:

$$A_2 = \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \bar{\nu} \end{pmatrix}, \quad \nu = -\frac{2\pi a^2 \mathrm{i}}{4+\pi^2}\left(\frac{\big(1 - \mathrm{i}\frac{\pi}{4}\big)(\cos\omega - 1)}{\omega^2 + \pi\omega\mathrm{i}\sin\omega + \frac{\pi^2}{2}\cos\omega - \frac{\pi^2}{2}} + \frac{1}{\omega^2 - \pi^2}\right). \tag{148}$$

Фундаментальные решения системы (141) имеют следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$u_2^{(1,2)}(t) = \big(e_{1,2} + o(1)\big) \exp\Big\{\big(\operatorname{Re}\nu \pm \mathrm{i}\operatorname{Im}\nu\big) \int t^{-2\rho} dt\Big\},$$

где e_j — векторы канонического базиса в $\mathbb{R}^2$. Следовательно, все решения уравнения (11) имеют следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)\exp\Big\{\mathrm{i}\Big(\frac{\pi}{2}t + \operatorname{Im}\nu\int t^{-2\rho}dt\Big)\Big\}\exp\Big\{\operatorname{Re}\nu\int t^{-2\rho}dt\Big\}+$$
$$+\,c_2\big(1+o(1)\big)\exp\Big\{-\mathrm{i}\Big(\frac{\pi}{2}t + \operatorname{Im}\nu\int t^{-2\rho}dt\Big)\Big\}\exp\Big\{\operatorname{Re}\nu\int t^{-2\rho}dt\Big\} + O\big(e^{-\beta t}\big), \quad (149)$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные и $\beta > 0$ — некоторое действительное число. Очевидно, что качественное поведение решений уравнения (11) в рассматриваемой ситуации будет определяться знаком величины $\operatorname{Re}\nu$. Можно показать (используя, в частности, пакеты символьных вычислений), что эта величина задается формулой

$$\operatorname{Re}\nu = \frac{2\pi^2 a^2\sin^2(\frac{\omega}{2})\,(2\omega^2 + 8\omega\sin\omega + \pi^2\cos\omega - \pi^2)}{(4+\pi^2)\,\big((\pi^2-2\omega^2)^2 - 2\pi^2(\pi^2-2\omega^2)\cos\omega + \pi^4\cos^2\omega + 4\pi^2\omega^2\sin^2\omega\big)}. \quad (150)$$

График величины $\operatorname{Re}\nu$ как функции переменной ω изображен на рис. 1. Используя

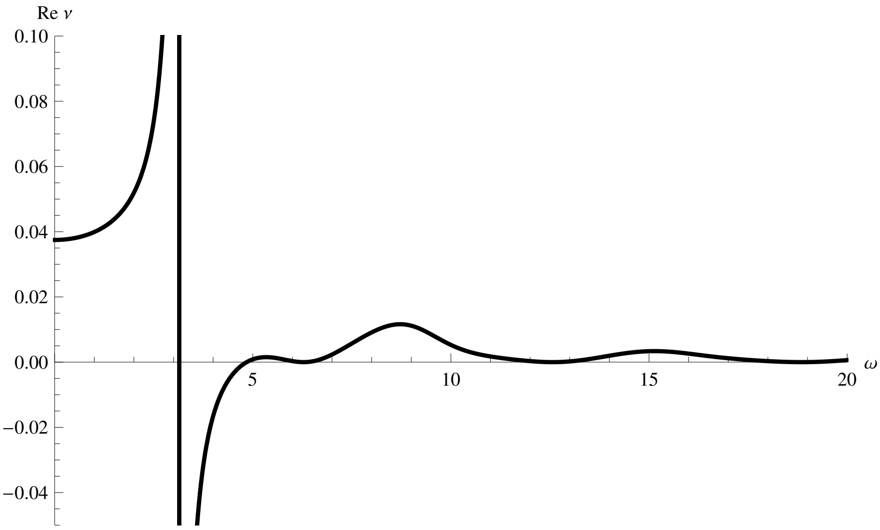

Рис. 1. График величины (150) при $a = 1$.

(150), несложно установить следующие предельные равенства:

$$\lim_{\omega\to 0}\operatorname{Re}\nu = \frac{\pi^2 a^2(20-\pi^2)}{(4+\pi^2)^3}, \qquad \operatorname{Re}\nu = \frac{\pi^2 a^2\sin^2(\frac{\omega}{2})}{(4+\pi^2)\omega^2}\Big(1 + O\big(\omega^{-1}\big)\Big), \quad \omega\to+\infty \quad (151)$$

и

$$\operatorname{Re}\nu = -\frac{2\pi}{(4+\pi^2)^2(\omega-\pi)}\big(1+O(\omega-\pi)\big), \qquad \omega\to\pi. \quad (152)$$

Из (151), (152) (см. также Рис. 1) заключаем, в частности, что $\operatorname{Re}\nu > 0$ при достаточно больших ω ($\omega \neq 2\pi n$, $n\in\mathbb{N}$) и $\operatorname{Re}\nu < 0$, если $\omega\to\pi+0$.

Пусть, наконец,

$$\rho \le \frac{1}{3}. \quad (153)$$

В силу (57), (59) имеем,

$$H(t,\theta) = t^{-\rho}H_1(t,\theta) + \ldots + t^{-k\rho}H_k(t,\theta) + Z(t,\theta). \quad (154)$$

Здесь $k \in \mathbb{N}$ выбрано так, что $k\rho \le 1 < (k+1)\rho$, а (1×2)-матрица $Z(t,\theta)$ такова, что $\|Z(t,\cdot)\|_{C_h} \in L_1[t_*,\infty)$. Система на критическом многообразии имеет вид

$$\dot u = \Big[D + t^{-\rho}B_1(t) + t^{-2\rho}B_2(t) + \ldots + t^{-k\rho}B_k(t) + R(t)\Big]u, \qquad t \ge t_*, \tag{155}$$

где матрицы D, $B_1(t)$ определяются формулами (118), матрица $B_2(t)$ имеет вид (138) и матрица $R(t)$ принадлежит классу $L_1[t_*,\infty)$. Заменой $u = \operatorname{diag}\big(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}t}, e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}t}\big)u_1$ систему (155) приводим к виду

$$\dot u_1 = \big[t^{-\rho}A_1(t) + t^{-2\rho}A_2(t) + \ldots + t^{-k\rho}A_k(t) + R_1(t)\big]u_1. \tag{156}$$

Согласно теореме 4, осуществим в системе (156) усредняющую замену

$$u_1 = \big[I + t^{-\rho}Y_1(t) + t^{-2\rho}Y_2(t) + \ldots + t^{-k\rho}Y_k(t)\big]u_2.$$

В результате этой замены приходим к системе

$$\dot u_2 = \big[A_1t^{-\rho} + t^{-2\rho}A_2 + \ldots + t^{-k\rho}A_k + R_2(t)\big]u_2. \tag{157}$$

Дальнейший анализ системы (157) связан с представлением ее в виде (111) и последующим использованием леммы 1 для приведения этой системы к L-диагональной форме (113). Если $\omega = \pm\pi$, то собственные числа матрицы A_1 различны. Следовательно, в этом случае для решений уравнения (11) справедливо представление (127), где величину $\int t^{-\rho}dt$ нужно заменить на выражение (130). Далее, если $\omega = \pm\frac{\pi}{2}$, то $A_1 = 0$, а собственные числа матрицы A_2 различны и имеют вид (145). Асимптотика всех решений уравнения (11) определяется тогда формулой (146), где $\int t^{-2\rho}dt$ следует заменить выражением

$$\frac{t^{1-2\rho}}{1-2\rho}\big(1+o(1)\big). \tag{158}$$

Наконец, если выполнены неравенства (147), то $A_1 = 0$, а матрица A_2 определяется формулой (148). В этой ситуации собственные числа различны, если $\operatorname{Im}\nu \ne 0$. Тогда в предположении, что $\operatorname{Re}\nu \ne 0$, асимптотика всех решений уравнения (11) имеет вид (149), где $\int t^{-2\rho}dt$ следует заменить величиной (158).

Интересно сравнить динамику решений уравнения (11) при $t \to \infty$ с динамикой решений так называемого адиабатического осциллятора

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \Big(\omega_0^2 + \frac{a\sin\omega t}{t^\rho}\Big)x = 0, \qquad \omega_0 = \frac{\pi}{2}. \tag{159}$$

Заметим, что предельные уравнения (т.е. уравнения (11) и (159) при $a = 0$) демонстрируют, по существу, одинаковую динамику. Динамика этих предельных уравнений совпадает с динамикой гармонического осциллятора с частотой собственных колебаний, равной ω_0:

$$x(t) = c_1e^{\mathrm{i}\omega_0 t} + c_2e^{-\mathrm{i}\omega_0 t}, \tag{160}$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные. Уравнения (11) и (159), таким образом, можно рассматривать как возмущенные гармонические осцилляторы с одинаковым характером внешнего воздействия. Если $\rho > 1$, то решения уравнений

(11) и (159) в пределе при $t \to \infty$ описываются формулой (160). Хорошо известно (см., например, [2, 13, 15]), что если ($\omega = \pm 2\omega_0$ и $\rho \le 1$) или ($\omega = \pm\omega_0$ и $\rho \le 1/2$), то уравнение (159) имеет неограниченные решения для всех $a \ne 0$. Если $\omega \ne \pm\omega_0, \pm 2\omega_0$, то все решения уравнения (159) ограничены и не стремятся к нулю при $t \to \infty$. Таким образом (см. формулу (127)), можно заключить, что динамика уравнений (11) и (159) при $\rho > 1/2$ качественно одинакова. Существенные различия наблюдаются в случае, когда $\rho \le 1/2$. Так, в уравнении (11) неограниченные колебания реализуются почти при всех ω, когда $\omega \gg 1$. Кроме того, все решения уравнения (11) могут стремиться к нулю, если $\omega \to \pi + 0$.

Список литературы

1. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1954. 216 с. (*Bellman R.* Stability theory of differential equations. New York, McGraw-Hill, 1953.)

2. *Бурд В.Ш., Каракулин В.А.* Асимптотическое интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами // Математические заметки. 1998. Т. 64, №5. С. 658–666. (English transl.: *Burd V.Sh., Karakulin V.A.* On the asymptotic integration of systems of linear differential equations with oscillatory decreasing coefficients // Math. Notes. 1998. V. 64, No. 5. P. 571–578.)

3. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958. 475 с. (*Coddington E.A., Levinson N.* Theory of ordinary differential equations. New York, McGraw-Hill, 1955.)

4. *Нестеров П.Н.* Метод центральных многообразий в задаче асимптотического интегрирования функционально-дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами. I // Модел. и анализ информ. систем. 2014. Т. 21, №3. С. 5–34. [*Nesterov P.N.* Center manifold method in the asymptotic integration problem for functional differential equations with oscillatory decreasing coefficients. I // Modeling and Analysis of Information Systems. 2014. Vol. 21, №3. P. 5–34 (in Russian).]

5. *Нестеров П.Н.* Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, №6. С. 731–742. (English transl.: *Nesterov P.N.* Averaging method in the asymptotic integration problem for systems with oscillatory-decreasing coefficients // Differ. Equ. 2007. V. 43, No. 6. P. 745–756.)

6. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с. (*Hartman P.* Ordinary Differential Equations. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1964.)

7. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. (*Hale J.K.* Theory of functional differential equations. New York: Springer-Verlag, 1977.)

8. *Ait Babram M., Hbid M.L., Arino O.* Approximation scheme of a center manifold for functional differential equations // J. Math. Anal. Appl. 1997. Vol. 213. P. 554–572.

9. *Carr J.* Applications of centre manifold theory. New York: Springer-Verlag, 1981.

10. *Castillo S., Pinto M.* Asymptotic integration of ordinary different systems // J. Math. Anal. Appl. 1998. Vol. 218, No. 1. P. 1–12.

11. *Coppel W.A.* Stability and asymptotic behavior of differential equations. D.C. Heath and Co., Boston, 1965.

12. *Devinatz A.* The asymptotic nature of the solutions of certain linear systems of differential equations // Pacific J. Math. 1965. V. 15, No. 1. P. 75–83.

13. *Eastham M.S.P.* The asymptotic solution of linear differential systems. London Math. Soc. Monographs. Oxford: Clarendon Press, 1989.

14. *Hale J., Verduyn Lunel S.M.* Introduction to functional differential equations. Appl. Math. Sciences 99. New York: Springer-Verlag, 1993.

15. *Harris Jr. W.A., Lutz D.A.* Asymptotic integration of adiabatic oscillators // J. Math. Anal. Appl. 1975. Vol. 51. P. 76–93.

16. *Kolmanovskii V., Myshkis A.* Introduction to the theory and applications of functional differential equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.

17. *Nesterov P.* Method of averaging for systems with main part vanishing at infinity // Math. Nachr. 2011. Vol. 284, No. 11-12. P. 1496–1514.

Center Manifold Method in the Asymptotic Integration Problem for Functional Differential Equations with Oscillatory Decreasing Coefficients. II

Nesterov P.N.

P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia

Keywords: functional-differential equations, critical manifold, asymptotic integration, averaging method, Levinson's theorem

In this paper we study the asymptotic integration problem in the neighborhood of infinity for a certain class of linear functional differential systems. We construct the asymptotics for the solutions of the considered systems in a critical case. In the second part of the work we establish the existence of a critical manifold for the considered class of systems and study its main properties. We also investigate the asymptotic integration problem for a reduced system. We illustrate the proposed method with an example of constructing the asymptotics for the solutions of a certain scalar delay differential equation.

Сведения об авторе:
Нестеров Павел Николаевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
канд. физ.-мат. наук, доцент