УДК 517.9

Применение метода квазинормальных форм к математической модели отдельного нейрона

Преображенская М. М.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

e-mail: rita.preo@gmail.com

получена 17 июля 2014

Ключевые слова: буферность, дифференциально-разностное уравнение, асимптотика, устойчивость, уравнение Кортевега – де Фриза, квазинормальные формы

Рассматривается скалярное нелинейное дифференциально-разностное уравнение с двумя запаздываниями, которое моделирует поведение отдельного нейрона. При некоторых дополнительных предположениях к этому уравнению применяется известный метод квазинормальных форм. Суть его заключается в формальной нормализации Пуанкаре – Дюлака, получении квазинормальной формы и последующем применении теорем о соответствии. В данном случае результатом применения квазинормальных форм является счетная система дифференциально-разностных уравнений, которую удастся свернуть в краевую задачу типа Кортевега – де Фриза. Исследование этой краевой задачи позволяет сделать вывод о поведении исходного уравнения. А именно, при подходящем выборе параметров в рамках данного уравнения реализуется феномен буферности, состоящий в наличии бифуркационного механизма, обеспечивающего рождение сколь угодно большого числа устойчивых циклов.

1. Общая постановка задачи

Объектом исследования данной статьи служит скалярное нелинейное дифференциально-разностное уравнение с двумя запаздываниями вида

$$\dot{u} = \lambda \left((a + 1)f(u(t - h_1)) - a - bg(u(t - h_2)) \right) u, \quad (1)$$

моделирующее поведение отдельного нейрона. Здесь $u(t) > 0$ — мембранный потенциал нейрона, параметр λ характеризует скорость протекания электрических процессов в системе и предполагается большим, h_1, h_2, a, b — положительные параметры. Функции $f(u), g(u)$ принадлежат классу $C^\infty(\mathbb{R}_+)$, где $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$. Это уравнение впервые было введено в [1, 2] на основе подхода, описанного в книге [3], для моделирования электрической активности отдельного нейрона. Позднее

оно было рассмотрено в ряде работ, например, в [4], [5]. Дополнительно отметим статью [6], в которой выполнен локальный анализ и проделан численный эксперимент для уравнений с двумя запаздываниями (1) в случае линейных $f(u)$ и $g(u)$.

Как и в статье [4], предположим, что функции $f(u)$, $g(u)$ удовлетворяют следующим трём условиям.

Условие 1. Считаем, что $f'(u) < 0$, $g'(u) > 0 \forall u \in \mathbb{R}_+$ и, кроме того, выполняются равенства $f(0) = 1$, $g(0) = 0$, $\lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = 0$, $\lim_{u \rightarrow +\infty} g(u) = 1$.

Монотонность функций $f(u)$ и $g(u)$ обеспечивает существование и единственность решения $u = u_0(a, b) > 0$ уравнения $(a + 1)f(u) - a - bg(u) = 0$.

Условие 2. Предполагаем, что при фиксированном параметре $a > 0$ уравнение

$$\psi(b) \equiv (a + 1)f'(u)|_{u=u_0(a,b)} + bg'(u)|_{u=u_0(a,b)} = 0$$

имеет на полуоси $b \in \mathbb{R}_+$ единственное решение $b = b_* > 0$ и $\psi'(b_*) > 0$.

Перед формулировкой последнего условия введем функции

$$V_1(v, b) = \frac{1}{2f'(u)u} \left(f(u(1+v)) - f(u) - f'(u)uv \right) \Big|_{u=u_0(a,b)},$$

$$V_2(v, b) = -\frac{b}{2(a+1)f'(u)u} \left(g(u(1+v)) - g(u) - g'(u)uv \right) \Big|_{u=u_0(a,b)}.$$

Тейлоровские разложения этих функций в точке $v = 0$ начинаются с квадратичных слагаемых. В частности, справедливы равенства

$$V_j(v, b_*) = a_{j2}v^2 + a_{j3}v^3 + O(v^4), \quad j = 1, 2. \quad (2)$$

Условие 3. Считаем, что $d \equiv 4(a_{12}^2 - a_{22}^2) + 2(a_{23} - a_{13}) < 0$.

При сформулированных ограничениях поставим вопрос об автоколебательных режимах уравнения (1), бифурцирующих из состояния равновесия $u = u_0(a, b)$ при изменении параметров b , h_1 , h_2 .

Остановимся на выборе параметров. Как и в статье [4], будем интересоваться сингулярно возмущенным случаем, когда

$$\frac{h_2}{h_1} = \varepsilon h, \quad h = const > 0, \quad \varepsilon = \frac{1}{\lambda}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

На выборе параметра h остановимся позднее. Также будем считать, что параметр b меняется в окрестности критического значения $b = b_*$, о котором говорится в условии 2.

2. Дополнительные построения

Для последующего применения метода квазинормальных форм при сформулированных выше условиях приведем задачу к более удобному виду. С этой целью положим

$$b = b_* + \alpha(\mu), \quad |\mu| \ll 1, \quad (3)$$

где μ — вспомогательный малый параметр, а функция $\alpha(\mu)$, $\alpha(0) = 0$, определяется из уравнения

$$\psi(\alpha, \mu) \equiv \frac{(1+a)f'(u)}{(b_* + \alpha)g'(u)} \Big|_{u=u_0(a, b_* + \alpha)} + \frac{1-2\mu}{1+2\mu} = 0.$$

Подставим в уравнение (1) соотношение (3) и перейдем к новой переменной v , полагая $u = u_*(\mu)(1+v)$, где $u_*(\mu) = u_0(a, b_* + \alpha(\mu))$. В результате после нормировок

$$\frac{\varepsilon}{\varkappa_*(\mu)} \mapsto \varepsilon, \quad h\varkappa_*(\mu) \mapsto h, \quad \text{где } \varkappa_*(\mu) \equiv -\frac{2(1+a)f'(u_*(\mu))u_*(\mu)}{1-2\mu} > 0,$$

рассматриваемое уравнение преобразуется к более удобному виду

$$\varepsilon \dot{v} = -\left(\left(\frac{1}{2} - \mu \right) v(t - \varepsilon h) + \left(\frac{1}{2} + \mu \right) v(t - 1) + \Delta_1(v(t - \varepsilon h), \mu) + \Delta_2(v(t - 1), \mu) \right) (1 + v), \quad (4)$$

где $\Delta_j(v, \mu) = (1 - 2\mu)V_j(v, b_* + \alpha(\mu))$, $j = 1, 2$.

Вернемся к определению до сих пор не выбранного параметра h . С этой целью рассмотрим характеристическое уравнение

$$\varepsilon \lambda + \left(\frac{1}{2} - \mu \right) e^{-\varepsilon h \lambda} + \left(\frac{1}{2} + \mu \right) e^{-\lambda} = 0, \quad (5)$$

отвечающее нулевому состоянию равновесия уравнения (4). Анализ данного характеристического уравнения проведен в статье [7]. Отметим, что в случае $h < \pi$ все его корни распадаются на две группы. К первой группе относятся некритические корни, которые находятся в левой комплексной полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$ и не приближаются к мнимой оси при $\varepsilon, \mu \rightarrow 0$. Ко второй группе относятся все оставшиеся корни $\lambda_n(\varepsilon, \mu)$, $\bar{\lambda}_n(\varepsilon, \mu)$, $n \in \mathbb{N}$ уравнения (5), являющиеся комплексными и при $\varepsilon = \mu = 0$ обращающиеся в соответствующие корни $\lambda_n = i\omega_n$, $\omega_n = \pi(2n - 1)$, $n \in \mathbb{N}$ уравнения $e^{-\lambda} = -1$. Как показано в статье [7], для этих корней справедливы следующие асимптотические равенства

$$\lambda_n(\varepsilon, \mu) = i\omega_n \left(1 + \varepsilon(h - 2) + \varepsilon^2(h - 2)^2 \right) - 2\varepsilon^2\omega_n^2(1 - h) + 4\mu + O(\varepsilon^3 + \varepsilon\mu), \quad \varepsilon, \mu \rightarrow 0, \quad (6)$$

которые позволяют увязать порядки малости μ и ε . Для наших последующих целей удобно положить равенства

$$h = 1 - h_0\varepsilon, \quad \mu = \mu_0\varepsilon^3, \quad h_0, \mu_0 = \text{const} > 0, \quad (7)$$

которые далее считаем выполненными. Отметим, что при таком выборе параметров $\operatorname{Re} \lambda_n(\varepsilon, \mu)$ имеет порядок ε^3 .

3. Применение метода квазинормальных форм

В данном случае алгоритмическая часть метода квазинормальных форм состоит в следующем. Подставим в уравнение (4) равенства (7) и выполним в нем замену времени

$$\tau = (1 + \tilde{\sigma})t, \quad s = \varepsilon^3 t, \quad \tilde{\sigma} = \varepsilon\sigma_1 + \varepsilon^2\sigma_2 + \varepsilon^3\sigma_3, \quad \sigma_1 = -1, \quad \sigma_2 = 1 - h_0, \quad \sigma_3 = 2h_0 - 1, \quad (8)$$

где поправки $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ к собственным частотам ω_n заимствованы из формул (6). В результате замен и с учетом равенств (2) приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \varepsilon(1 + \tilde{\sigma})v_\tau + \varepsilon^4 v_s = & - \left(\left(\frac{1}{2} - \mu_0 \right) v(s - \tilde{s}, \tau - \tilde{\tau}) + (1 - 2\mu_0 \varepsilon^3) (a_{12} v^2(s - \tilde{s}, \tau - \tilde{\tau}) + \right. \\ & \left. + a_{13} v^3(s - \tilde{s}, \tau - \tilde{\tau}) + \dots) + \left(\frac{1}{2} + \mu_0 \right) v(s - \varepsilon^3, \tau - 1 - \tilde{\sigma}) + \right. \\ & \left. + (1 - 2\mu_0 \varepsilon^3) (a_{22} v^2(s - \varepsilon^3, \tau - 1 - \tilde{\sigma}) + a_{23} v^3(s - \varepsilon^3, \tau - 1 - \tilde{\sigma}) + \dots) \right) (1 + v), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\tilde{s} = \varepsilon^4(1 - h_0 \varepsilon)$, $\tilde{\tau} = \varepsilon(1 - h_0 \varepsilon)(1 + \tilde{\sigma})$.

Будем искать главную асимптотику возможных автоколебательных режимов получившегося уравнения в виде ряда

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(s, \tau) \varepsilon^{\frac{k+3}{2}}. \quad (10)$$

Здесь $v_k(s, \tau)$ — подлежащие определению 2-периодические по τ функции, $k = 0, 1, 2, \dots$, причем начальное приближение $v_0(s, \tau) = \xi(s, \tau)$ удовлетворяет условию антипериодичности

$$\xi(s, \tau + 1) \equiv -\xi(s, \tau), \quad (11)$$

где ξ — пока неизвестная функция. Причина, по которой ξ выбирается антипериодической, становится понятной из формулы (6), в силу которой ξ должна раскладываться в ряд Фурье по гармоникам $e^{i\omega_n}$, $\omega_n = \pi(2n - 1)$, $n \in \mathbb{N}$.

Последовательность дальнейших действий такова. Подставляем выражения (10) в (9), раскладываем функции $v(s - \tilde{s}, \tau - \tilde{\tau})$, $v(s - \varepsilon^3, \tau - 1 - \tilde{\sigma})$ в ряд Тейлора по запаздываниям $\tilde{s}$, $\tilde{\tau}$, ε^3 , $\tilde{\sigma}$, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях ε в левой и правой частях получившегося равенства для v_k , $k = 0, 1, 2, \dots$. В результате приходим к рекуррентной последовательности линейных неоднородных уравнений

$$\frac{1}{2} (v_k(s, \tau) + v_k(s, \tau - 1)) = F_k(s, \tau), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

где неоднородность $F_k(s, \tau)$ — 2-периодическая по τ функция.

Как показано в [7], анализ этих уравнений проводится следующим образом. Разобьем функцию $F_k(s, \tau)$ на два слагаемых $F_k^{(1)}(s, \tau) + F_k^{(2)}(s, \tau)$ таких, что выполняются равенства $F_k^{(1)}(s, \tau + 1) \equiv -F_k^{(1)}(s, \tau)$, $F_k^{(2)}(s, \tau + 1) \equiv F_k^{(2)}(s, \tau)$, где

$$F_k^{(1)}(s, \tau) = \frac{F_k(s, \tau) - F_k(s, \tau - 1)}{2}, \quad F_k^{(2)}(s, \tau) = \frac{F_k(s, \tau) + F_k(s, \tau - 1)}{2}.$$

Система (12) разрешима в классе 2-периодических функций при выполнении условия $F_k^{(1)}(s, \tau) \equiv 0$, в этом случае решение системы может быть найдено как $v_k(s, \tau) = F_k^{(2)}(s, \tau)$.

При $k = 0$ и $k = 1$ получаем, что в (12) неоднородность $F_k(s, \tau) \equiv 0$, поскольку $v_0(s, \tau) = \xi(s, \tau)$ антипериодическая. Для простоты последующего анализа целесообразно положить

$$v_1(s, \tau) \equiv 0. \quad (13)$$

Выбор поправок $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ гарантирует разрешимость в классе 2-периодических функций уравнений (12) вплоть до номера $k = 5$. Таким образом, следуя изложенному выше алгоритму и учитывая (11), (13), находим

$$v_2(s, \tau) \equiv 0, \quad v_3(s, \tau) = -(a_{12} + a_{22})\xi^2, \quad v_4(s, \tau) \equiv 0, \quad v_5(s, \tau) = (4a_{12} + 1)\xi\xi_\tau.$$

Далее при $k = 6$ из условия разрешимости можно сделать вывод, что функция ξ является решением краевой задачи

$$\xi_s = 2h_0\xi_{\tau\tau} + \frac{1}{3}\xi_{\tau\tau\tau} + 4\mu_0\xi + (4(a_{12}^2 - a_{22}^2) + 2(a_{23} - a_{13}))\xi^3, \quad \xi(s, \tau + 1) \equiv -\xi(s, \tau), \quad (14)$$

которую будем называть квазинормальной формой задачи (4). При этом 1-периодическая составляющая $F_6^{(2)}(s, \tau)$ нелинейности $F_6(s, \tau)$ равна 0, откуда заключаем, что

$$v_6(s, \tau) \equiv 0.$$

Остановимся на соответствии между автоколебательными режимами квазинормальной формы (14) и уравнения (4). В формулируемом ниже утверждении в качестве фазового пространства краевой задачи (14) возьмем пространство E_3 , состоящее из антипериодических функций $\xi(s, \tau)$ класса $W_2^3[0, 1]$, а фазовым пространством самого уравнения (4) будем считать $C[-1, 0]$.

Теорема 1. Пусть μ и h удовлетворяют условиям (7), а квазинормальная форма (14) допускает периодическое решение типа бегущей волны

$$\xi = \xi_0(y), \quad y = \alpha s + \tau, \quad \xi_0(y + 1) = \xi_0(y), \quad \alpha_0 = \text{const}, \quad (15)$$

экспоненциально орбитально устойчивое или дихотомичное. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ решению (15) отвечает цикл уравнения (4) с теми же свойствами устойчивости. Главная асимптотика этого цикла задается равенством, получающимся из построенного выше отрезка ряда (10) при учете формул (15) и равенств (8), связывающих переменные s и τ с исходной переменной t .

Доказательство этого факта базируется на результатах, изложенных в работах [8], [9].

Вернемся к рассмотрению уравнения (14). После нормировок $\frac{1}{3}s \mapsto s, -\tau \mapsto \tau, \sqrt{-d}\xi \mapsto \xi$, где d определено в условии 3, задача (14) преобразуется к виду

$$\xi_s + \xi_{\tau\tau\tau} = \alpha\xi_{\tau\tau} + \beta\xi - \xi^3, \quad \xi(s, \tau + 1) = -\xi(s, \tau), \quad (16)$$

где $\alpha = 6h_0, \beta = 12\mu_0$. Из условия теоремы 1 становится ясно, что интерес представляют периодические решения задачи (16).

4. Анализ квазинормальной формы

Полученную систему (16) будем изучать при дополнительных условиях $\alpha = \varepsilon\kappa, \beta = \varepsilon$, где $0 < \varepsilon \ll 1, \kappa = \text{const} > 0$. Таким образом, предметом дальнейшего исследования выбрана система

$$\xi_s + \xi_{\tau\tau\tau} = \varepsilon\kappa\xi_{\tau\tau} + \varepsilon\xi - \xi^3, \quad \xi(s, \tau + 1) = -\xi(s, \tau). \quad (17)$$

Здесь s выполняет роль времени, а τ — пространственной переменной. В качестве фазового пространства взято соболевское пространство W_2^3 антипериодических функций.

Поставим вопрос существования и устойчивости инвариантных торов системы (17) различной размерности.

4.1. Вторичная квазинормализация

Возможные автоколебательные решения задачи (17) будем искать в виде ряда

$$\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k(s, \theta, \tau) \varepsilon^{\frac{2k+1}{2}}, \quad (18)$$

где $\xi_0(s, \theta, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(\theta) e^{iy_k} + \bar{z}_k(\theta) e^{-iy_k}$, $y_k = \nu_k^3 s + \nu_k \tau$, $\nu_k = (2k-1)\pi$, $\theta = \varepsilon s$, $z_k(\theta)$ — пока произвольные комплекснозначные функции, которые предстоит определить. Выбранная функция $\xi_0(s, \theta, \tau)$ по переменным s, τ удовлетворяет линейному однородному уравнению

$$\xi_s + \xi_{\tau\tau\tau} = 0.$$

Функцию ξ_1 будем искать в виде тригонометрического ряда переменных y_k , $k = 1, 2, \dots$. Подставим (18) в (17) и приравняем коэффициенты при $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$, в результате чего получим краевую задачу

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial s} + \frac{\partial^3 \xi_1}{\partial \tau^3} = F(s, \theta, \tau), \quad \xi_1(s, \theta, \tau + 1) = -\xi_1(s, \theta, \tau) \quad (19)$$

для неизвестной функции ξ_1 с неоднородностью

$$F(s, \theta, \tau) \equiv \varkappa \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial \tau^2} + \xi_0 - \frac{\partial \xi_0}{\partial \theta} - \xi_0^3, \quad (20)$$

где θ считаем параметром.

Учитывая в (20) явную форму функции ξ_0 , приходим к выводу, что правая часть (20) представляет собой тригонометрический ряд, содержащий гармоники вида $e^{\pm i(y_k + y_l + y_m)}$ и $e^{\pm i(y_k + y_l - y_m)}$, $k, l, m = 1, 2, \dots$. В том же виде будем искать и функцию ξ_1 . Однако последнее возможно тогда и только тогда, когда неоднородность F не содержит первых гармоник e^{iy_k} , $k = 1, 2, \dots$. Поэтому приравняем коэффициенты при указанных гармониках к нулю. В результате для имеющихся в запасе комплексных амплитуд $z_k(\theta)$ получаем счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{z}_k = (1 - \varkappa \nu_k^2) z_k - 6 \sum_{l=1}^{\infty} z_k |z_l|^2 + 3 z_k |z_k|^2, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (21)$$

которая и является квазинормальной формой задачи (17).

Отметим, что функция ξ_1 может быть найдена из задачи (19) в виде тригонометрического ряда, содержащего гармоники $e^{\pm i(y_k + y_l + y_m)}$, $k, l, m = 1, 2, \dots$, и $e^{\pm i(y_k + y_l - y_m)}$, $k, l, m = 1, 2, \dots$, $l \neq m \neq k$. Связано это с тем, что здесь выполняются соответствующие условия нерезонансности $(\nu_k^3 + \nu_l^3 + \nu_m^3) - (\nu_k + \nu_l + \nu_m)^3 \neq 0$, $k, l, m = 1, 2, \dots$; $(\nu_k^3 + \nu_l^3 - \nu_m^3) - (\nu_k + \nu_l - \nu_m)^3 \neq 0$, $k, l, m = 1, 2, \dots$, $l \neq m$.

Для удобства последующего анализа выполним в квазинормальной форме (21) замены $z_k = \sqrt{\eta_k} e^{i\psi_k}$, $\tau \rightarrow \frac{\tau}{2}$, где η_k и ψ_k — вещественные переменные. В результате приходим к системе

$$\dot{\eta}_k = \left(1 - \varkappa \nu_k^2 - 6 \sum_{l=1}^{\infty} \eta_l + 3\eta_k\right) \eta_k, \quad \dot{\psi}_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (22)$$

Однако в дальнейшем будем работать с отщепляющейся от (22) системой для η_k , имеющей вид

$$\dot{\eta}_k = \left(1 - \varkappa \nu_k^2 - 6 \sum_{l=1}^{\infty} \eta_l + 3\eta_k\right) \eta_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (23)$$

4.2. Анализ амплитудной системы

Заметим, что у системы (23) отсутствуют состояния равновесия с бесконечным числом ненулевых координат. (Обоснование аналогичного факта можно найти в книге [10].) Фиксируем произвольные натуральные p , $n_1 < n_2 < \dots < n_p$ и поставим вопрос о существовании и устойчивости у системы (23) состояний равновесия $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots)$ с координатами

$$\eta_{n_m} > 0, \quad m = 1, 2, \dots, p; \quad \eta_k = 0 \quad \text{при } k \neq n_m, \quad m = 1, \dots, p. \quad (24)$$

Подставляя соотношения (24) в систему (23), для отыскания компонент η_{n_m} , $m = 1, \dots, p$, получаем линейную неоднородную систему

$$1 - \varkappa \nu_{n_m}^2 - 6 \sum_{l=1}^p \eta_{n_l} + 3\eta_{n_m} = 0, \quad m = 1, \dots, p. \quad (25)$$

Непосредственная проверка показывает, что эта система имеет единственное решение $\hat{\eta} = (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \dots)$, где

$$\hat{\eta}_{n_m} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{2p-1} \left(p - \varkappa \sum_{l=1}^p \nu_{n_l}^2 \right) + \varkappa \nu_{n_m}^2 - 1 \right), \quad \hat{\eta}_k = 0 \quad \text{при } k \neq n_m, \quad m = 1, \dots, p. \quad (26)$$

Заметим, что по смыслу переменных η_k нам интересен случай, когда все $\hat{\eta}_{n_m}$, $m = 1, \dots, p$, положительны. Последнее имеет место в том и только том случае, когда $\varkappa$ удовлетворяет неравенству

$$\varkappa < \frac{1}{2 \sum_{l=1}^p \nu_{n_l}^2 - (2p-1) \min_{1 \leq m \leq p} \nu_{n_m}^2}.$$

Исследуем теперь состояние равновесия (26) на устойчивость. С этой целью обозначим правую часть в (23) через $f(\eta) = (f_1(\eta), \dots, f_k(\eta), \dots)$, где

$$f_k(\eta) \equiv \left(1 - \varkappa \nu_k^2 - 6 \sum_{l=1, l \neq k}^{\infty} \eta_l - 3\eta_k\right) \eta_k.$$

Частные производные функций $f_k(\eta)$, $k = 1, 2, \dots$, с учетом равенства (25) выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial f_k(\hat{\eta})}{\partial \eta_j} = \begin{cases} -6\eta_{n_m}, & k = n_m, m = 1, \dots, p, j \neq k, \\ -3\eta_{n_m}, & k = n_m, m = 1, \dots, p, j = k, \\ 0, & k \neq n_m, m = 1, \dots, p, j \neq k, \\ B_{k, n_1, \dots, n_p}, & k \neq n_m, m = 1, \dots, p, j = k, \end{cases}$$

где $B_{k, n_1, \dots, n_p} = 1 - \varkappa \nu_k^2 - 6 \sum_{l=1}^p \eta_{n_l}$. Тогда система в вариациях на интересующем нас состоянии равновесия имеет вид $\dot{h} = J_{n_1, \dots, n_p} h$, где $J_{n_1, \dots, n_p}$ — матрица Якоби функции $f(\eta)$.

В дальнейшем удобно исследовать состояния равновесия в двух случаях: $p = 1$ и $p \geq 2$. Пусть сначала $p = 1$ и фиксировано натуральное n . Тогда состояние равновесия (26) системы (23) принимает вид

$$\eta_n = \frac{1}{3}(1 - \varkappa \nu_n^2), \quad \eta_k = 0 \text{ при } k \neq n \quad (27)$$

и существует при $\varkappa < \frac{1}{\nu_n^2}$. Оператор J_n имеет собственные значения $\lambda_n = -3\eta_n$, $\lambda_k = B_{k, n} = 2\varkappa \nu_n^2 - \varkappa \nu_k^2 - 1$, $k \neq n$. Требуя, чтобы все собственные значения были отрицательными, получаем условие устойчивости состояния равновесия (27)

$$\varkappa < \frac{1}{2\nu_n^2 - \nu_1^2}. \quad (28)$$

Теперь пусть $p \geq 2$. Рассмотрим конечномерный оператор

$$\hat{J}_{n_1, \dots, n_p} = \begin{pmatrix} -3\eta_{n_1} & -6\eta_{n_1} & \dots & -6\eta_{n_1} \\ -6\eta_{n_2} & -3\eta_{n_2} & \dots & -6\eta_{n_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -6\eta_{n_p} & -6\eta_{n_p} & \dots & -3\eta_{n_p} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что собственные значения этого оператора являются собственными значениями оператора $J_{n_1, \dots, n_p}$. Характеристический многочлен оператора $\hat{J}_{n_1, \dots, n_p}$ имеет вид

$$P(\lambda) = \left(1 - \sum_{m=1}^p \frac{6\eta_{n_m}}{3\eta_{n_m} - \lambda}\right) \prod_{l=1}^p (3\eta_{n_l} - \lambda).$$

Поскольку $3\eta_{n_l}$ не является собственным значением матрицы $\hat{J}_p$, уравнение $P(\lambda) = 0$ эквивалентно уравнению

$$1 - \sum_{m=1}^p \frac{6\eta_{n_m}}{3\eta_{n_m} - \lambda} = 0.$$

Это уравнение при $p \geq 2$ имеет хотя бы один положительный корень. Связано это с положительностью чисел η_{n_m} , $m = 1, \dots, p$, и с тем, что на каждом интервале $(\eta_{n_m}, \eta_{n_{m+1}})$, $m = 1, \dots, p - 1$, сумма $\sum_{m=1}^p \frac{6\eta_{n_m}}{3\eta_{n_m} - \lambda}$ пробегает все множество значений от $-\infty$ до $+\infty$.

Отсюда следует, что состояние равновесия (26) системы (23) с количеством ненулевых координат $p \geq 2$ неустойчиво. Таким образом, для системы (23) устойчивы лишь состояния равновесия (27) с одной ненулевой координатой при значениях параметра $\varkappa$, удовлетворяющих (28). Отсюда следует, что система (22) обладает устойчивыми циклами при соответствующих $\varkappa$, а ее торы размерности два и выше неустойчивы. Добавим, что из (28) вытекает, что количество устойчивых циклов неограниченно растет при уменьшении параметра $\varkappa$.

В [1] получен следующий результат.

Теорема 2. Любому состоянию равновесия амплитудной системы (23) с количеством ненулевых положительных координат равным p для задачи (17) соответствует инвариантный тор размерности p с теми же свойствами устойчивости.

Из приведенных выше исследований и теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. По каждому натуральному n можно указать такое достаточно малое $\varepsilon_n > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_n$ и при параметре $\varkappa$, удовлетворяющем условию (28), у задачи (17) существует устойчивая бегущая волна, задающаяся равенством

$$\xi = \sqrt{\varepsilon} \xi_0(y) + O(\varepsilon^{3/2}),$$

где $y = (2n - 1)\pi x + \nu_n(\varepsilon)t$, $\nu_n(\varepsilon) = (2n - 1)^3 \pi^3 + O(\varepsilon)$. Торы размерности два и выше системы (17) неустойчивы.

Отметим, что из условия (28) следует, что число $K(\varkappa)$ устойчивых циклов краевой задачи (17) удовлетворяет неравенству

$$K(\varkappa) \geq \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1}{\pi^2 \varkappa} + 1} + 1 \right) \right]. \quad (29)$$

(Здесь $[\cdot]$ означает целую часть.) Как уже было сказано выше, $K(\varkappa)$ неограниченно растет с уменьшением параметра $\varkappa$.

5. Заключение

Итак, мы доказали, что в амплитудной системе (23) с уменьшением значения параметра $\varkappa$ количество устойчивых состояний равновесия неограниченно растет. В свою очередь, каждому такому состоянию равновесия в квазинормальной форме (22) соответствует одномерный инвариантный тор (цикл). Как показано в книге [10], каждому этому циклу отвечает устойчивый цикл краевой задачи (17) вида бегущей волны. Из нашего анализа, в частности из оценки (29), следует, что количество таких циклов неограниченно растет при $\varkappa \rightarrow 0$, причем при $\varkappa = 0$ их количество счетно. При этом каждой бегущей волне (15) соответствует устойчивый цикл в уравнении (1), асимптотика которого описана в теореме 1. А это означает, что в рамках исходного уравнения (1) реализуется явление буферности.

Список литературы

1. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Моделирование эффекта взрыва в нейронных системах // Матем. заметки. 2013. Т. 93, № 5. С. 684–701. (English transl.: *S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov* Modeling the Bursting Effect in Neuron Systems // *Mathematical Notes*. 2013. 93:5. P. 676–690.)
2. Глызин С. Д., Овсянникова Е. О. Двухчастотные колебания обобщенного уравнения импульсного нейрона с двумя запаздываниями // Моделирование и анализ информационных систем. 2011. Т. 18, № 1. С. 86–105. (*Glyzin S. D., Ovsyannikova E. O.* Quasi-periodic oscillations of a neuron equation with two delays // *Modeling and Analysis of Information Systems*. 2011. V. 18, № 1. P. 86 – 105 [in Russian].)
3. Кащенко С. А., Майоров В. В. Модели волновой памяти. М.: Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2009. (*Kashchenko S. A., Maiorov V. V.* Modeli volnovoy pamyati. M.: Knizhnyy dom LIBROKOM, 2009 [in Russian].)
4. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Явление буферности в нейродинамике // Доклады академии наук. 2012. Т. 443, № 2. С. 1–5. (English transl.: *Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* Buffer phenomenon in neurodynamics // *Doklady Mathematics*. 2012. V. 85. No. 2. P. 297–300.)
5. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Дискретные автоволны в нейронных системах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52, № 5. С. 840–858. (English transl.: *Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* Discrete autowaves in neural systems // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2012. 52:5. P. 702–719.)
6. Глызин С. Д. Учет возрастных групп в уравнении Хатчинсона // Моделирование и анализ информационных систем. 2007. Т. 14, № 3. С. 29 – 42. (*Glyzin S. D.* A registration of age groups for the Hutchinson's equation // *Modeling and Analysis of Information Systems*. 2007. V. 14, № 3. P. 29 – 42 [in Russian].)
7. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Экстремальная динамика обобщенного уравнения Хатчинсона // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49, № 1. С. 76–89. (English transl.: *Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* Extremal dynamics of the generalized Hutchinson equation // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2009. 49:1. P. 71–83.)
8. Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений // Тр. МИАН. 1998. Т. 222. С. 3–191. (English transl.: *Kolesov A. Yu., Mishchenko E. F., Rozov N. Kh.* Asymptotic Methods of Investigation of Periodic Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations // *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 1998. 222. P. 1–189).
9. Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Новые методы доказательства существования и устойчивости периодических решений в сингулярно возмущенных системах с запаздыванием // Тр. МИАН. 2007. Т. 259. С. 106–133. (English transl.: *Kolesov A. Yu., Mishchenko E. F., Rozov N. Kh.* New Methods for Proving the Existence and Stability of Periodic Solutions in Singularly Perturbed Delay Systems // *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2007. 259. P. 101–127.)
10. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 408 с. (*Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* Invariantnye tory nelineynykh volnovykh uravneniy. M.: FIZMATLIT, 2004. 408 s. [in Russian].)

Application of the Method of Quasi-Normal Forms to the Mathematical Model of a Single Neuron

Preobrazhenskaia M. M.

*P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia*

Keywords: buffering, differential-difference equation, asymptotic form, stability, Korteweg – de Vries equation, quasi-normal forms

We consider a scalar nonlinear differential-difference equation with two delays, which models the behavior of a single neuron. Under some additional suppositions for this equation it is applied a well-known method of quasi-normal forms. Its essence lies in the formal normalization of the Poincare – Dulac, the production of a quasi-normal form and the subsequent application of the conformity theorems. In this case, the result of the application of quasi-normal forms is a countable system of differential-difference equations, which manages to turn into a boundary value problem of the Korteweg – de Vries equation. The investigation of this boundary value problem allows to make the conclusion about the behavior of the original equation. Namely, for a suitable choice of parameters in the framework of this equation it is implemented the buffer phenomenon consisting in the presence of the bifurcation mechanism for the birth of an arbitrarily large number of stable cycles.

Сведения об авторе:

Преображенская Маргарита Михайловна,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
аспирант