*Модел. и анализ информ. систем.* Т. **21**, № **5** (2014) 61–77


УДК 517.9

# Динамика логистического уравнения с запаздыванием и запаздывающим управлением

Кащенко С.А.

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова*
*150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14*

*e-mail: kasch@uniyar.ac.ru*

*получена 11 июня 2014*

**Ключевые слова:** релаксационные колебания, большой параметр, асимптотика, запаздывание, периодическое решение

Асимптотическими методами исследуются динамические свойства логистического уравнения с запаздыванием и с запаздывающим управлением. Показана возможность эффективного управления характеристиками релаксационного цикла. Разработан новый метод исследования динамики при условии, что коэффициент запаздывающего управления является достаточно большим. Установлено, что исходная задача о динамике уравнения с запаздываниями редуцируется к задаче о нелокальной динамике специальных нелинейных краевых задач параболического типа.

## Введение

В настоящей работе исследуется важный класс уравнений с запаздыванием, который играет особую роль во многих прикладных задачах. В этой связи особо отметим как базовые работы [1–8]. Рассматриваются положительные решения уравнения

$$\dot{N} = r\left[1 - N(t-T)\right]N + \gamma\left(N(t-h) - N\right), \tag{1}$$

где все коэффициенты тоже положительны, причем $\gamma$ называют коэффициентом запаздывающего управления [9–12].

При $\gamma = 0$ имеем логистическое уравнение с запаздыванием, которое называют уравнением Хатчинсона. Исследованию решений этого уравнения посвящено много работ (см., например, [13–18]). Укажем здесь, что при $rT \le \frac{37}{24}$ все (положительные) решения (1) стремятся к состоянию равновесия $N_0 \equiv 1$, а при $rT \le \frac{\pi}{2}$ это состояние равновесия асимптотически устойчиво. По-видимому, оно устойчиво глобально. При $rT > \frac{\pi}{2}$ уравнение (1) имеет устойчивое непостоянное периодическое решение [15, 17]. Его асимптотика при $\lambda = rT \gg 1$ исследована в [16, 17]. Отметим, что при больших $\lambda$ амплитуда колебаний устойчивого цикла и его период неограниченно растут и имеют соответственно порядки $e^{\lambda T}$ и $\lambda^{-1}e^{\lambda T}$ [16, 17].

Поставим задачу изучения динамических свойств решений уравнения (1). Работа состоит из двух частей. В первой из них — составляющей содержание §1, предполагается, что параметр $\gamma$ является достаточно малым, а во второй части – в §2 – этот параметр предполагается достаточно большим. Все это открывает путь к использованию различных специальных асимптотических методов для анализа динамики уравнения (1).

## 1. Уравнение с малым коэффициентом запаздывающего управления

Здесь предполагаем, что для параметра $\gamma$ выполнено условие

$$0 < \gamma \ll 1.$$

Рассмотрим отдельно три случая. В первом из них речь пойдет об управлении релаксационными колебаниями, т. е. о динамике (1) при указанном условии на $\gamma$ и при $r \gg 1$. Во втором предполагается, что параметр $r$ принимает „средние“ значения ($r \sim 1$), а в третьем — этот параметр является „достаточно близким“ к $\frac{\pi}{2T}$.

**1.1.** Пусть параметр $\gamma$ фиксирован, а для мальтузианского коэффициента $r$ выполнено соотношение

$$r \gg 1. \tag{2}$$

В [16, 17] показано, что при $\gamma = 0$ функция

$$N_r(t) = e^{rt - e^{r(t-T)}} \tag{3}$$

является „первым“ приближением при $r \to \infty$ для устойчивого релаксационного периодического решения $N_0(t, r)$ уравнения (1) на отрезке $[-\widetilde{T}(r) + 2, 2]$ длины периода $\widetilde{T}(r)$ функции $N_0(t, r)$, причем

$$\widetilde{T}(r) = r^{-1} e^{rT(1+o(1))}.$$

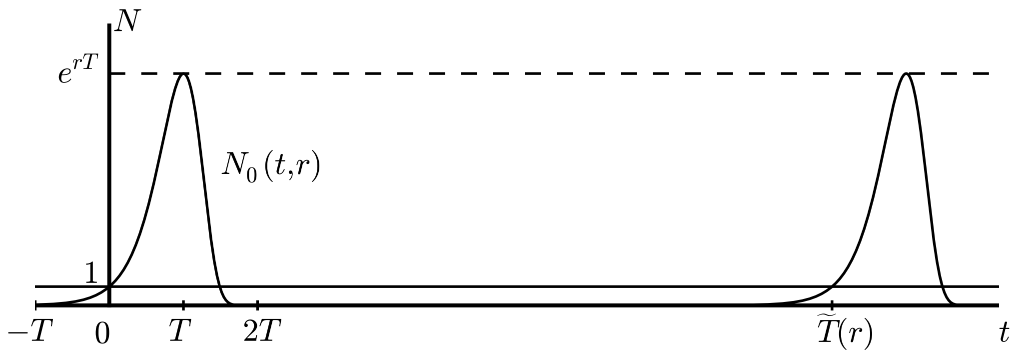


Рис. 1

Сформулируем основные утверждения. Ниже через $\delta$ обозначается произвольная достаточно малая, но фиксированная при $r \to \infty$ постоянная. Относительно параметра $h$ предполагаем, что $h > T$.

**Теорема 1.** *Пусть $h > 2T$. Тогда для каждых фиксированных положительных $\gamma$ и $\delta$ найдется такое $T_0 > 0$, что при $r \geq r_0$ уравнение (1) имеет устойчивое $\widetilde{T}_h(r)$-периодическое решение $N_h(t, r)$, для которого при $r \to \infty$ выполнены асимптотические равенства*

$$\widetilde{T}_h(r) = h + o(1),$$

$$N_h(t,r) = e^{rt - e^{r(t-T)}(1+o(1))}(1+o(1)) \text{ при } t \in [0, T_h(r) - \delta].$$

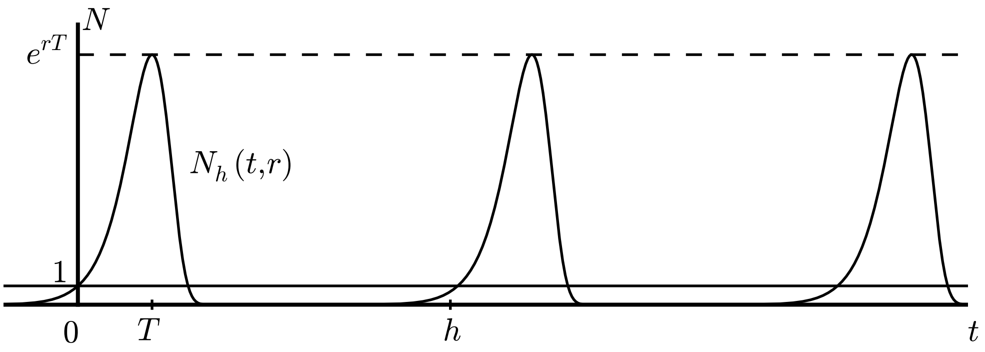


Рис. 2

**Теорема 2.** *Пусть $T < h \leq 2T$. Тогда $\widetilde{T}_h(r) = 2T + o(1)$ (при $r \to \infty$).*

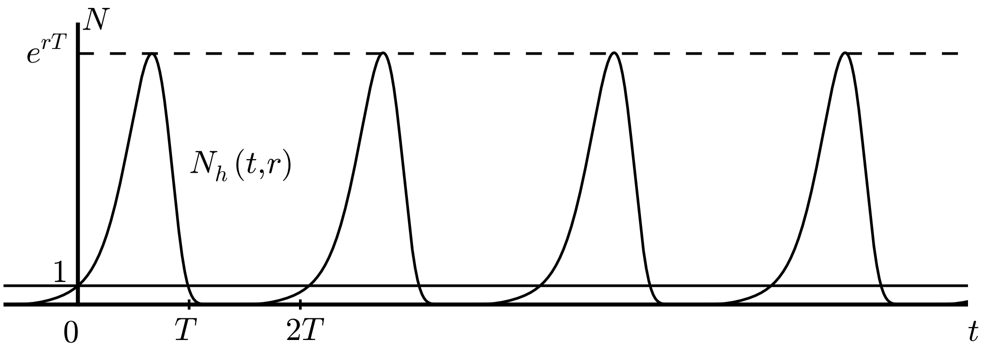


Рис. 3

График $T_h(r)$ изображен на рис. 4

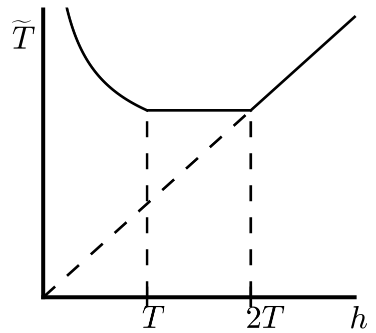


Рис. 4

**О доказательстве теоремы 1.** В работах [16, 17, 19, 22] детально разработан асимптотический метод исследования вопросов о существовании, устойчивости и асимптотике периодических решений сингулярно возмущенных уравнений с запаздыванием. Суть метода применительно к уравнению (1) при $r \gg 1$ такова: в фазовом пространстве $C_{[-h,0]}$ уравнения (1) выделяется некоторое множество $S$. Затем исследуется асимптотика при $r \to \infty$ всех решений с начальными условиями из $S$. В случае, если удается установить, что каждое такое решение через некоторый отрезок времени попадает опять в $S$, то задача сводится к анализу отображения $S \to S$. Из общих свойств такого отображения приходим к выводу о существовании у него неподвижной точки, которой, очевидно, отвечает периодическое решение (1). Асимптотика решений строится «шагами», т.е. они последовательно рассматриваются на отрезках $[0, T]$, $[T, 2T] \dots$ Обоснование устойчивости представляет значительные трудности технического характера. Детально в несколько иных ситуациях устойчивость исследовалась в [16,17]. Здесь на этом вопросе не останавливаемся, тем более, что все решения $N_0(t, r)$ с начальными условиями $\varphi \in S$ через определенное время оказываются асимптотически неразличимы.

Итак, в основе доказательства теорем лежит определение множества $S \subset C_{[-h,0]}$. Ограничимся здесь только соответствующими построениями для теоремы 1, т.е. при $h > 2T$.

Обозначим через $S$ множество таких непрерывных и положительных функций $\varphi(s) \in C_{[-h,0]}$, для которых выполнены условия:

1°. при $s \in [-h, -h+T]$ имеет место неравенство

$$\varphi(s) \leqslant \exp[r(1+\frac{2}{r})(s+h) - \frac{1}{2}\exp(r(s+h-T))];$$

2°. при $s \in [-h+T, -h+2T]$ имеем

$$\varphi(s) \leqslant \exp(-\frac{1}{2}rT);$$

3°. при $s \in [-T, 0]$ выполнены условия $\varphi(0) = 0$ и

$$\varphi(s) = (1+g(s))\exp(rs), \quad |g(s)| \leqslant r^{-1/2}.$$

Через $t_1(\varphi), t_2(\varphi), \dots$ будем обозначать последовательные положительные корни уравнения $N_\varphi(t, r) = 1$.

На отрезке $t \in [0, T]$ тогда получим, что

$$N_\varphi(t, r) = \exp(rt(1+o(1))).$$

При $t \in [T, 2T]$ верны асимптотические формулы

$$N_\varphi(t, r) = \exp[rt(1+o(1)) - \exp(r(t-T)(1+o(1)))]$$

и $t_1(\varphi) = T + o(1)$. Тем самым для каждого $\delta > 0$ на отрезке $[T+\delta, 2T]$ имеем равенство

$$N_\varphi(t, r) = o(\exp(-rt)).$$

Для величины $t_2(\varphi)$ тогда приходим к соотношению

$$t_2(\varphi) = h + o(1).$$

Главный вывод заключается в том, что при $s \in [-h, 0]$ выполнено включение $N_\varphi(t_2(\varphi)+s, r) \in S$. Обозначим через $\Pi$ оператор последования $\Pi(\varphi(s)) = N_\varphi(t_2(\varphi)+s, r)$. Из полученных формул следует, что $\Pi(\varphi(s)) \in S$ и $\Pi S \subset S$. Отсюда и из известных утверждений [23] о существовании неподвижной точки таких операторов приходим к выводу, что у оператора $\Pi$ в $S$ существует неподвижная точка $\varphi_0(s)$: $\Pi(\varphi_0(s)) = \varphi_0(s)$. Тем самым функция $N_{\varphi_0}(t, r)$ является периодической с периодом $\widetilde{T}(r) = t_2(\varphi_0(s)) = h + o(1)$.

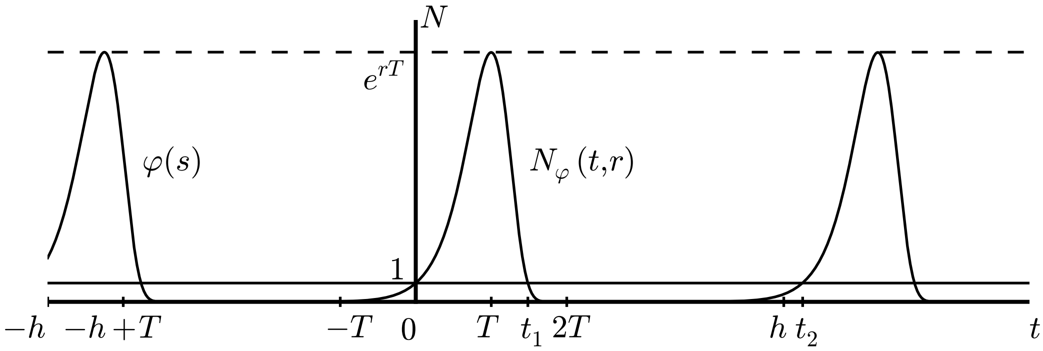


Рис. 5

В теореме 2 параметр $\gamma$ уже не фигурирует. Отсюда делаем вывод о том, что даже с помощью относительно малого коэффициента запаздывающего управления можно эффективно управлять периодом устойчивого релаксационного цикла. На вопрос о том, насколько малым может быть параметр $\gamma$, чтобы оказывать такое воздействие на цикл, ответ дает следующее утверждение.

**Теорема 3.** *Пусть для некоторых положительных $\gamma_0$ и $c$ имеем $\gamma = \gamma_0 e^{-rc}$ и пусть $h > 2T$. Тогда при $r \to \infty$ выполнено асимптотическое равенство*

$$\widetilde{T}_h(r) = h + c + o(1).$$

**1.2. Сосуществование близких циклов.** Здесь предполагаем, что параметры $r$ и $T$ в (1) фиксированы и $rT > \frac{\pi}{2}$, т. е. в (1) при $\gamma = 0$ имеется экспоненциально орбитально устойчивый цикл $N_0(t)$ периода $\widetilde{T}_0$.

При условии малости параметра $\gamma$ приходим к стандартной задаче о малом возмущении грубого цикла. Введем несколько обозначений.

Сначала отметим, что функция $\dot{N}_0(t)$ является решением линеаризованного на $N_0(t)$ уравнения (1)

$$\dot{v} = r(1 - N_0(t-T))v - rN_0(t)v(t-T). \tag{4}$$

Формально сопряженным к этому уравнению является уравнение

$$\dot{y} = -r(1 - N_0(t-T))y + rN_0(t+T)v(t+T). \tag{5}$$

Хейловское скалярное произведение определяется формулой

$$< v(s), y(s) >= v(0)y(0) - r\int\limits_{-T}^{0} N_0(s+1)v(s)y(s+1)ds$$

($v(s) \in C_{[-T,0]}$, $y(s) \in C_{[0,T]}$). Отметим, что для любых двух решений (4) и (5), определенных при всех $t \in R$, справедливо тождество

$$< v(s+t), y(s+t) >\equiv< v(s), y(s) > .$$

Уравнение (5) имеет единственное (с точностью до множителя) периодическое решение $y_0(t)$ ($\not\equiv 0$). Положим

$$\sigma =< N_0(t-h) - N_0(t), y_0(t) > .$$

Следующее простое утверждение является обобщением хорошо известного для обыкновенных дифференциальных уравнений результата о возмущении грубого цикла.

**Теорема 4.** *При всех достаточно малых $\gamma$ уравнение (1) имеет орбитально устойчивый цикл $N_0(t,\gamma)$, для которого*

$$N_0(t,\gamma) = N_0\left((1+\sigma\gamma + o(\gamma))t\right) + O(\gamma).$$

Более интересна ситуация, когда вместе с условием $0 < \gamma \ll 1$ выполнено условие

$$h \gg 1.$$

Результаты о бифуркациях в окрестности цикла при малых возмущениях с большим запаздыванием получены в работе [24]. Применим их к уравнению (1).

Пусть в (1) для некоторого $h_0 > 0$ имеем $h = h_0\gamma^{-1}$. Введем в рассмотрение формальные ряды

$$N(t,\varepsilon) = N_0(\tau) + \gamma N_1(\tau, s) + \ldots,$$

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + \gamma\varphi(s) + \ldots,$$

где $V_j(t)$ – $\widetilde{T}_0$-периодичны по $\tau$, $\varphi(s)$ – скалярная почти периодическая функция, $s$ – „медленное“ время: $s = \varepsilon t$. Подставим эти ряды в (1). Тогда, собирая коэффициенты при одинаковых степенях $\gamma$, приходим к уравнению

$$\frac{dN_1}{d\tau} = r(1 - N_0(\tau - T))N_1 - rN_0N_1(\tau - T) + \gamma R(\tau, s),$$

где $R(\tau, s) = N_0(\tau(t - \frac{h}{\varepsilon})) - N_0(\tau)$. Условие разрешимости для этого уравнения в указанном классе функций состоит в выполнении равенства $< R(\tau, s), y_0(\tau) >= 0$.

Обозначим через $g(z)$ функцию

$$g(z) =< (N_0(\tau(t-z)) - N_0(\tau)), y_0(\tau) > . \tag{6}$$

Учитывая, что $\tau(t-h) = \tau(t) - h_0\gamma^{-1} - \int\limits_{s-h}^{s} (\varphi(s_1) + \ldots)ds_1$, из (6) приходим к уравнению для определения $\varphi(s)$:

$$\varphi(s) = g(\Theta + \int\limits_{-h_0}^{0} \varphi(s+p)dp), \tag{7}$$

где $\Theta = \Theta(\gamma) = \{\gamma^{-1}h_0\} \mod \widetilde{T}_0$. После того, как решение $\varphi(s)$ этого уравнения найдено, алгоритм последовательного нахождения фигурирующих выше формальных рядов можно неограниченно продолжать.

Рассмотрим вопрос о состояниях равновесия уравнения (7). Для их нахождения получаем уравнение

$$\varphi = g(\Theta + h_0\varphi).$$

Вопрос об устойчивости некоторого состояния равновесия $\varphi_0$ при $\Theta = \Theta_0$ этого уравнения решается стандартным образом.

**Теорема 5.** *Пусть при некотором $\Theta = \Theta_0$ уравнение (7) имеет состояние равновесия $\varphi_0$ и пусть выполнено неравенство*

$$h_0 g'(\Theta_0 + h_0\varphi_0) \neq 1.$$

*Тогда существует такая последовательность $\gamma_n \to 0$, определяемая из условия $\Theta(\gamma) = \Theta_0$, что при $\gamma = \gamma_n$ и при достаточно больших $n$ уравнение (1) имеет периодическое решение $N_0(t,\gamma)$ вида*

$$N_0(t,\gamma) = N_0(\tau) + \gamma N_1(\tau, s) + o(\gamma),$$

*где $\tau = (1 + \gamma\varphi_0 + O(\gamma^2))$. Это решение устойчиво (неустойчиво) при*

$$h_0 g'(\Theta_0 + h_0\varphi_0) < 1 \ (> 1).$$

Таким образом, уравнение (7) может иметь любое число (в зависимости от $h_0$) устойчивых состояний равновесия, а уравнение (1) соответственно такое же число устойчивых периодических решений. Кроме этого, для (7) и (1) характерен неограниченный процесс прямых и обратных бифуркаций при $\gamma \to 0$, поскольку $\Theta = \Theta(\gamma)$ бесконечно много раз меняется от 0 до $\widetilde{T}_0$ при $\gamma \to 0$.

**1.3. Локальный анализ уравнения (1) при малых $\gamma$.** Пусть в (1) параметры $r$ и $T$ таковы, что $r = r_0 + \varepsilon r_1$, $T = T_0 + \varepsilon T_1$, где $\varepsilon$ – малый положительный параметр: $0 < \varepsilon \ll 1$, и для $r_0$ и $T_0$ выполнено условие $r_0 T_0 = \frac{\pi}{2}$. Удобно считать, что $\gamma = \varepsilon\gamma_1$.

Характеристический квазиполином

$$\lambda = -r_0 e^{-\lambda T_0}$$

линеаризованного на $N_0 \equiv 1$ при $\varepsilon = 0$ уравнения (1) имеет пару чисто мнимых корней $\pm i(\frac{\pi}{2T_0})$, а все остальные его корни имеют отрицательные вещественные части. Тем самым в задаче о локальной динамике (1) в окрестности $N_0$ реализуется критический случай пары чисто мнимых корней. Тогда при малых $\varepsilon$ в окрестности состояния равновесия $N_0$ уравнения (1) имеется двумерное устойчивое локальное инвариантное интегральное многообразие, на котором это уравнение с точностью до $o(1)$ (при $\varepsilon \to 0$) можно представить в виде [1, 25, 26]

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \alpha_0\xi + \gamma_1\alpha_1(e^{-i\frac{\pi h}{2T_0}} - 1)\xi + d_0|\xi|^2\xi, \tag{8}$$

где $\tau = \varepsilon t$, $\alpha_0 = \left[\left(\frac{\pi}{2} + i\right) r_1 + r_0^2 T_1 \left(1 - i\frac{\pi}{2}\right)\right] (1 + \frac{\pi^2}{4})^{-1}$,
$d_0 = -r_0[3\pi - 2 + i(\pi + 6)](10(1 + \frac{4}{\pi^2}))^{-1}$,
$\alpha_1 = \left(\frac{\pi}{2} + i\right)\left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right)^{-1}$, напомним, что $Re\, d_0 > 0$.

Связь между решениями $N(t, \varepsilon)$ уравнения (1) и $\xi(\tau)$ уравнения (8) устанавливает соотношение

$$N(t, \varepsilon) = 1 + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\left[\xi(\tau)e^{i\frac{\pi}{2T_0}t} + \overline{\xi}(\tau)e^{-i\frac{\pi}{2T_0}t}\right] + O(\varepsilon).$$

Вклад запаздывающего управления в динамику (1) определяется слагаемым $\gamma_1\alpha_1(e^{-i\pi h(2T_0)^{-1}} - 1)$. Например, с помощью $\gamma_1$ можно управлять знаком выражения $\rho = Re\,(\alpha_0 + \gamma_1\alpha_1(e^{-i\pi h(2T_0)^{-1}} - 1))$. При условии $\rho < 0$ в (1) и (6) (при малых $\varepsilon$) устойчиво состояние равновесия, а в случае $\rho > 0$ в (1) и (8) имеется устойчивый цикл.

Более интересна ситуация, когда $r_0 T_0 = \frac{\pi}{2}$ и вместе с условием $0 < \gamma \ll 1$ выполнено условие $h \gg 1$. Пусть $\gamma = \varepsilon\gamma_1$ и $h = \varepsilon^{-1}h_1$. В этом случае бесконечно много корней характеристического квазиполинома

$$\lambda = -(r_0 + \varepsilon r_1)e^{-\lambda(T_0 + \varepsilon T_1)} + \varepsilon\gamma_1(e^{-\varepsilon^{-1}h_1\lambda} - 1)$$

стремятся к мнимой оси при $\varepsilon \to 0$. Тем самым реализуется критический случай бесконечной размерности. Результатами о существовании инвариантного интегрального многообразия в этой ситуации воспользоваться нельзя. Тем не менее удается, применяя формализм метода нормальных форм [27–30], получить аналог — квазинормальную форму. Таким аналогом служит скалярное комплексное уравнение с запаздыванием

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \alpha_0\xi + \alpha_1\gamma_1(e^{iH}\xi(\tau - h_1) - 1) + d_0|\xi|^2\xi. \tag{9}$$

Здесь $H = H(\varepsilon) = -\pi(2T_0\varepsilon)^{-1}h_1$.

**Теорема 6.** *Пусть при некотором $H = H_0$ уравнение (9) имеет ограниченное при $\tau \to \infty$ решение $\xi_0(\tau)$. Тогда на последовательности $\varepsilon_n \to \infty$, выделяемой условием $H(\varepsilon) = H_0 \pmod{2\pi}$, уравнение (1) имеет асимптотическое по невязке решение*

$$N(t, \varepsilon) = 1 + \varepsilon_n^{\frac{1}{2}}\left[\xi_0(\varepsilon_n t)e^{i\frac{\pi}{2T_0}t} + \overline{\xi}_0(\varepsilon_n t)e^{-i\frac{\pi}{2T_0}t}\right] + O(\varepsilon_n). \tag{10}$$

Отметим, что при некоторых условиях типа невырожденности решениям (9) вида $\xi_0 e^{i\varphi\tau}$ отвечает периодическое решение (1) той же устойчивости; периодическому (грубому) решению (9) ($\neq const \cdot e^{i\varphi\tau}$) соответствует двумерный тор в (1) и т. д.

**Замечание 1.** При достаточно больших значениях $\gamma_1$, в ограниченной (при $\varepsilon \to 0$) области фазового пространства $C_{[-h,0]}$ не может существовать аттрактора уравнения (1) [31].

## 2. Уравнение с большим коэффициентом запаздывающего управления

Основное предположение здесь состоит в том, что $\gamma$ достаточно велико, т.е.

$$\gamma \gg 1. \tag{11}$$

При этом условии исследуем вопрос о динамических свойствах решений уравнения (1).

### 2.1. Управление динамикой (1) с помощью малых значений $h$

Здесь предполагаем, что вместе с (11) выполнено условие $h \ll 1$. Более точно – для некоторого $\sigma > 0$ выполнено равенство

$$h = \sigma\gamma^{-1}. \tag{12}$$

При этом условии учтем в (1) асимптотическое равенство $N(t-h) = N(t) - h\dot{N}(t) + O(h^2)$. Тогда уравнение (1) в главном, т. е. без учета слагаемых порядка $O(h)$, имеет вид

$$\dot{N} = r(1+\sigma)^{-1}\left[1 - N(t-T)\right] N. \tag{13}$$

Тем самым получили уравнение Хатчинсона, у которого мальтузианский коэффициент равен $r(1+\sigma)^{-1} < r$. Параметр $\sigma$ можно выбрать так, чтобы, например, $rT < (1+\sigma)\frac{37}{24}$. Тогда все решения (13) будут стремиться к состоянию равновесия $N_0$ при $t \to \infty$. Устойчивое периодическое решение (13) обозначим через $N_\sigma(t)$. Имеет место следующее простое утверждение:

**Теорема 7.** *Существует такое $\gamma_0 > 0$, что при $\gamma \geq \gamma_0$ уравнение (1) имеет устойчивое периодическое решение*

$$N_0(t,\gamma) = N_\sigma\big((1 + O(\gamma^{-1}))t\big) + O(\gamma^{-1}).$$

**2.2. Основная конструкция.** Уравнения с большим коэффициентом запаздывающего управления исследовались в [31]. Применим методику из [31] для уравнения (1) при условии (11). Поделим левую и правую части (1) на $\gamma$ и рассмотрим „главную" составляющую — линейное уравнение

$$\gamma^{-1}\dot{N} = N(t-h) - N. \tag{14}$$

Характеристический квазиполином этого уравнения имеет вид

$$\varepsilon\lambda = e^{-\lambda h} - 1, \ \ (\varepsilon = \gamma^{-1} \ll 1). \tag{15}$$

При $\varepsilon \to 0$ вещественные части бесконечного множества его корней стремятся к нулю, поэтому логично говорить о том, что критический в задаче об устойчивости нулевого решения (14) случай имеет бесконечную размерность. Выпишем асимптотику интересующей нас совокупности корней уравнения (15). Для этого введем несколько обозначений. Фиксируем произвольно $z \in R$ и через $\Theta = \Theta(z,\varepsilon) \in (0,1]$ обозначим такую величину, для которой выражение $z\varepsilon^{-\frac{1}{2}} + \Theta$ является целым. Уравнение (15) имеет корни

$$\lambda_k = \lambda_k(\varepsilon, z) = i\tfrac{2\pi k}{h}(z\varepsilon^{-\frac{1}{2}} + \Theta)\left(1 - \varepsilon\tfrac{1}{h}\right) + \varepsilon\lambda_{k2}(\varepsilon, z) + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}),$$

где $\lambda_{k2} = \frac{a}{h} - \frac{2\pi^2}{h^3}z^2k^2$.

Введем в рассмотрение формальный ряд

$$u(t, \varepsilon) = \xi(\tau, x) + \varepsilon u_3(\tau, x) + \dots, \tag{16}$$

в котором $\tau = \varepsilon t, x = 2\pi h^{-1}(z\varepsilon^{-\frac{1}{2}}+\Theta)(1-\varepsilon h^{-1})t$, а функции $\xi(\tau, x), u_3(\tau, x), \dots$ являются $T$-периодическими по переменной $x$. Подставим (16) в (14) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon$. Приравнивая в получившемся формальном тождестве коэффициенты при $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$(считая $\Theta$ не зависящим от $\varepsilon$ параметром), из условия разрешимости уравнения относительно $u_3(\tau, x)$ приходим к параболическому при $z \neq 0$ уравнению относительно $\xi(\tau, x)$

$$h\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \frac{2\pi^2}{h^2}z^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + r\xi\left[1 - \xi(\tau, x) - 2\pi h^{-1}\right](z\varepsilon^{-\frac{1}{2}} + \Theta)(1 - \varepsilon h^{-1})t \tag{17}$$

с периодическими краевыми условиями

$$\xi(\tau, x + h) \equiv \xi(\tau, x). \tag{18}$$

Основной результат состоит в том, что при достаточно малых $\varepsilon$ краевая задача (17), (18) играет роль нормальной формы для уравнения (14), т. е. ее нелокальная динамика определяет с помощью формулы (16) поведение решений (14). Сформулируем результат более точно.

**Теорема 8.** *Пусть краевая задача (17), (18) имеет ограниченное при* $\tau \in [\tau_0, \infty]$ *решение* $\xi_0(\tau, x)$. *Тогда уравнение (14) имеет асимптотическое по невязке решение* $N_0(t, \varepsilon)$, *для которого*

$$N_0(t, \gamma) = 1 + r\xi\left[1 - \xi(\tau, x - R(\varepsilon))\right],$$

*где* $R(\varepsilon) = 2\pi Th^{-1}(1 + \varepsilon h^{-1})(z\varepsilon^{-\frac{1}{2}} + \Theta(\varepsilon))$.

При определенных условиях можно формулировать утверждения о существовании и устойчивости решения (1), главные части асимптотики которых определяются из (17), (18). На этом здесь не будем останавливаться.

На основе результатов из [31, 32] и приведенных здесь построений можно получать и другие, более сложные краевые задачи, обобщающие (17), (18). Покажем это. Пусть натуральное $n$ и величины $z_1, z_2, \dots, z_n \in R$ произвольно фиксированы. Некоторую совокупность корней уравнения (15) можно представить в виде

$$\lambda_{k_1,k_2,\dots,k_n} = i\frac{2\pi}{h}((\varepsilon^{-\frac{1}{2}}z_1 + \Theta_1)k_1 + \dots + (\varepsilon^{-\frac{1}{2}}z_n + \Theta_n)k_n)\left(1 - \varepsilon\frac{1}{h}\right) + \\ + \varepsilon\left(\frac{a}{h} - \frac{2\pi^2}{h^3}(z_1k_1 + \dots + z_nk_n)^2\right) + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}),$$

где $\Theta_j = \Theta(\varepsilon, z_j)$, а $k_1, k_2, \dots, k_n$ – произвольные целые.

Положим в (1)

$$u = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\xi(\tau, x_1, x_2, \dots, x_n) + \varepsilon^{\frac{3}{2}}u_2(\tau, x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots,$$

где $\tau = \varepsilon t$, $x_j = 2\pi h^{-1}(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}z_j + \Theta_j)(1 - \varepsilon h^{-1})t$, $j = 1, 2, \dots, n$, и зависимость от $x_j$ – $h$-периодическая. Производя стандартные действия, приходим к краевой задаче для определения $h$-периодической по каждому из аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$ функции $\xi(\tau, x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$h\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{2\pi^2}{h^2}\left(z_1\frac{\partial}{\partial x_1} + z_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + z_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 \xi + a\xi.$$

С помощью этого вырожденного параболического уравнения определяются, как и для (17), (18), асимптотические по невязке решения уравнения (1).

Важно отметить, что неустойчивость состояния равновесия $N_0$ хотя бы для одного значения $z \neq 0$ влечет за собой неустойчивость $N_0$ в рамках уравнения (1) при всех достаточно больших $\gamma$.

**2.3. Бифуркационное значение параметра запаздывания $T$**

Ниже считаем, что параметр $r$ фиксирован. Отметим, что в уравнении Хатчинсона (при $\gamma = 0$) бифуркационное значение $T = T_{bif}$ определяется соотношением $T_{bif} = (2r)^{-1}\pi$. При $T > T_{bif}$ из состояния равновесия $N_0$ в (1) рождается устойчивый цикл. При условиях (11) и (12) имеем $T_{bif} = (2r)^{-1}\pi(1 + \sigma)$.

Здесь определим при условии (11) наименьшее значение $T$, при котором в (1) могут происходить бифуркации из состояния равновесия $\xi \equiv 1$. Положим в (17), (18)

$$T = \gamma^{-\frac{1}{2}}h(2\pi)^{-1}T_1 \tag{19}$$

и рассмотрим "главную" часть уравнения (17)

$$h\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = 2\left(\frac{\pi}{h}\right)^2 z^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + r\xi[1 - \xi(\tau, x - T_1 z)]. \tag{20}$$

Линеаризуем (20), (18) на состояние равновесия $N_0 \equiv 1$. Тогда характеристическое уравнение для нахождения корней $\mu_k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) получающейся краевой задачи имеет вид

$$\mu_k = -2\left(\frac{\pi}{h}\right)^2 z^2 k^2 - re^{-ikzT_1}. \tag{21}$$

Рассмотрим функцию

$$f(v) = -2\left(\frac{\pi}{h}\right)^2 v^2 - r\cos(vT_1).$$

Через $T_{10}$ обозначим наименьшее положительное значение параметра $T_1$, при котором функция $f(v)$ имеет нулевой корень $v_0$ : $f(v_0) = 0$. Очевидно, что при этом и $f'(v_0) = 0$. Из этих равенств $T_{10}$ и $v_0$ определяются:

$$T_{10} = x_0(-r\cos x_0)^{-\frac{1}{2}}, \quad v_0 = (-r\cos x_0)^{\frac{1}{2}},$$

а $x_0 > 0$ – первый положительный корень уравнения

$$2\,\mathrm{tg}\, x = x.$$

**Теорема 9.** *Пусть в (20) $T_1 < T_{10}$. Тогда при всех $z \neq 0$ состояние равновесия $N_0$ устойчиво. Если же $T_1 > T_{10}$, то найдутся такие значения $z$, при которых это состояние равновесия неустойчиво.*

### 2.4. Критический случай. Построение квазинормальных форм

Рассмотрим наиболее интересную ситуацию, когда параметр $z$ в (17) является достаточно малым:

$$0 < z \ll 1. \tag{22}$$

Критический случай выделяется соотношением $T_1 \approx T_{10}$. Пусть

$$T_1 = T_{10} + z^2 T_{11}. \tag{23}$$

При этом условии бесконечно много корней (21) стремятся к мнимой оси при $z \to 0$, поэтому можно говорить о том, что этот критический случай имеет бесконечную размерность. Методика исследования локальной динамики таких систем разработана в [27, 28, 31, 33]. Применим её в задаче о динамике (17), (18).

Сначала выделим все те моды с номерами $k_m$, на которых $Re\mu_{k_m} = o(1)$. Они имеют вид

$$k_m = v_0 z^{-1} + m + \Theta(z), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

а $\Theta(z) \in (0, 1]$ и дополняет $v_0 z^{-1}$ до целого. При этом

$$\mu_{k_m} = i\triangle + i\triangle_1 z(m + \Theta) - dz^2(m + \Theta)^2 + O(z^3).$$

Здесь $\triangle = ir\sin x_0$, $\triangle_1 = irT_{1_0}\cos x_0$, $d = 2\left(\frac{\pi}{h}\right)^2 - rT_{1_0}\cos x_0 + irT_{1_0}\sin x_0$. Отметим, что $Red > 0$.

Введем в рассмотрение формальный ряд

$$\begin{aligned}\xi(t, x) = 1 &+ ze^{i[\triangle + z\triangle_1\Theta]t + i(v_0 z^{-1} + \Theta(z)x)}\eta(\tau, y) + ze^{-i[\triangle + z\triangle_1\Theta]t - i(v_0 z^{-1} + \Theta(z))x}\overline{\eta}(\tau, y) + \\ &+ z^2\left(w_{20} + w_{21}e^{2i[\triangle + z\triangle_1\Theta]t + 2i(v_0 z^{-1} + \Theta(z))x} + \overline{w}_{21}e^{-2i[\triangle + z\triangle_1\Theta]t - 2i(v_0 z^{-1} + \Theta(z))x}\right) + \\ &+ z^3 w_{31}e^{i[\triangle + z\triangle_1\Theta]t + i(v_0 z^{-1} + \Theta(z))x} + \ldots\end{aligned} \tag{24}$$

Здесь $\tau_1 = z^2\tau$, $y = x + z\triangle_1 t$, неизвестная и подлежащая определению функция $\eta(\tau_1, y) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty}\eta_m(\tau_1)e^{imy}$, а выражения $w_{js}(\tau_1, y)$ периодичны по $y$.

Подставляя (23) и (24) в (20) и производя стандартные действия, последовательно определяем элементы ряда (24). Так, на втором шаге находим, что

$$w_{20} = -\cos x_0,$$

$$w_{21} = -r\left[2i\triangle - 8\left(\frac{\pi}{h}\right)^2 v_0^2 + re^{-2ix_0}\right]^{-1} e^{-ix_0}.$$

После этого на третьем шаге из условия разрешимости уравнения относительно $w_{31}$ приходим к краевой задаче для определения $\eta(\tau, y)$:

$$\frac{\partial\eta}{\partial\tau_1} = d\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} + 2id\Theta\frac{\partial\eta}{\partial y} + \left(rv_0T_{11}e^{-ix_0} - d\Theta^2\right)\eta + \varkappa|\eta|^2\eta, \quad \eta(\tau, y + 2\pi) \equiv \eta(\tau, y). \tag{25}$$

Здесь $d = 2\left(\frac{\pi}{h}\right)^2 + \frac{1}{2} r T_{10}^2 e^{-ix_0}$, $\varkappa = -r\left[(1+e^{-ix_0})w_{20} + \left(e^{ix_0} + e^{-2ix_0}\right) w_{21}\right]$.

Краевая задача (25) является квазинормальной формой для краевой задачи (17), (18). Ее нелокальная динамика определяет поведение решений (17), (18) в некоторой достаточно малой окрестности состояния равновесия $\xi_0 \equiv 1$. Сформулируем более точно соответствующий результат.

**Теорема 10.** *Пусть краевая задача (25) имеет ограниченное при* $\tau \to \infty$ *решение* $\eta_0(\tau_1, y)$. *Тогда при всех достаточно малых* $z$ *краевая задача (17), (18) имеет асимптотическое по невязке решение* $\xi(\tau, x)$, *для которого*

$$\xi(\tau,x) = 1 + z^{\frac{1}{2}}\Big[\eta_0(z^2\tau, x + \triangle_1 z^2\tau) e^{i\left[(\triangle + z\triangle_1\Theta)\tau + (v_0 z^{-1} + \Theta)x\right]} + \\ + \overline{\eta}_0(z^2\tau, x + \triangle_1 z^2\tau) e^{-i\left[(\triangle + z\triangle_1\Theta)\tau + (v_0 z^{-1} + \Theta)x\right]}\Big] + O(z).$$

### 2.5. Динамика при малом мальтузианском коэффициенте и большом запаздывании в управляющем воздействии

Близкая к рассмотренной выше ситуация может возникать и без предположения о достаточно больших значениях $\gamma$. Предположим здесь, что достаточно большими являются значения параметра $h : \varepsilon = h^{-1} \ll 1$. Кроме этого, предположим, что коэффициент $r$ является достаточно малым: для некоторых положительных $\alpha$ и $r_\alpha$ имеем $r = r_\alpha \varepsilon^\alpha$.

После замены времени $t \to ht$ приходим к уравнению

$$\varepsilon \dot{v} = -r_\alpha \varepsilon^\alpha v(t - \varepsilon T)(1 + v) + \gamma(v(t-1) - v).$$

Как и для (1) при условии (11), применим к этому уравнению изложенную выше методику работы [31, 32].

В результате приходим к построению квазинормальной формы — параболической краевой задачи, аналогичной (17), (18) —

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = 2\pi^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - r_\alpha \xi(\tau, x - \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}} z T(1 + o(1)))(1 + \xi), \quad \xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x).$$

Для фиксированного (при $\varepsilon \to 0$) значения $T$ отклонением пространственной переменной в полученном уравнении можно пренебречь. Если же параметр $T$ тоже является достаточно большим, причем согласованно с $\varepsilon : T = T_\alpha \varepsilon^{-\frac{\alpha}{2}}$, то приходим к уравнению вида (20). Отметим, что в рассматриваемом случае для произведения $rT$ имеем $rT = r_\alpha T_\alpha \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}} \ll 1$. Таким образом, бифуркационные явления, как и выше, могут возникать при достаточно малых значениях этого произведения.

**Замечание 2.** Случай, когда вместе с (23) имеем соотношение $T_1 = T_{10} + zT_{11}$ существенно сложнее. Соответствующая (25) квазинормальная форма отличается, во-первых, отсутствием слагаемых с производной первого порядка по пространственным переменным; во-вторых, количество пространственных переменных (с периодическими краевыми условиями по каждой из них) становится произвольно фиксированным параметром; в-третьих, пространственным переменным соответствуют быстро осциллирующие по времени компоненты решений исходного уравнения. Подробное описание методики в рассматриваемой ситуации приведено в [31].

**Замечание 3.** Можно получать более полные асимптотические разложения решений.

### Выводы

Сформулируем сначала три вывода, относящиеся к случаям, когда коэффициент запаздывающего управления является достаточно малым.

1. Показано, что с помощью асимптотически малого коэффициента запаздывающего управления можно эффективно управлять периодом релаксационных колебаний в логистическом уравнении с запаздыванием.

2. При малых $\gamma$ и больших значениях параметра $h$ исследован вопрос о сосуществовании множества асимптотически близких циклов. Приведены соответствующие асимптотические формулы и сделаны выводы об устойчивости.

3. В задаче о локальной динамике в окрестности состояния равновесия $N_0 \equiv 1$ (при $\gamma \ll 1$ и $h \gg 1$) возникает критический случай бесконечной размерности. Построена квазинормальная форма — специальное нелинейное уравнение с запаздыванием, не содержащее малых параметров. Его нелокальная динамика, а она может быть достаточно сложной, определяет поведение решений исходного уравнения (1) в достаточно малой окрестности состояния равновесия $N_0$.

Следующие выводы относятся к случаю, когда параметр $\gamma$ достаточно велик.

4. Описан механизм стабилизации колебаний при малых значениях $h$. Показана возможность эффективного управления амплитудой устойчивого цикла.

5. Разработан новый подход к исследованию динамики уравнения (1) при $\gamma \gg 1$. Он базируется на применении метода квазинормальных форм — на построении специальных нелинейных эволюционных уравнений, нелокальная динамика которых определяет поведение решений исходного уравнения. Построены асимптотические формулы, позволяющие по решениям квазинормальных форм определять главные члены асимптотических разложений решений (1). Проиллюстрировано явление гипермультистабильности, когда происходит резкое увеличение количества установившихся режимов.

6. Важно отметить, что запаздывание $T$ в логистическом уравнении переходит в отклонение пространственной переменной в квазинормальной форме. Показано, что уже при асимптотически малых значениях $T$ могут происходить сложные бифуркационные явления. Для их описания построены новые квазинормальные формы — специальные уравнения параболического типа.

## Список литературы


1. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. (Hale G. Theory of functional differential equations. New York: Springer-Verlag, 1977.)

2. Diekmann O., van Gils S.A., Verduyn Lunel S.M., Walther H.-O. Delay Equations: Functional-, Complex-, and Nonlinear Analysis. New York: Springer-Verlag, 1995.

3. Wu J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1996.

4. Haken H. Brain Dinamics; Synchronization and Activity Patterns in Pulse-Coupled Neural Nets with Delays and Noise. Springer, 2002.

5. May R.M. Stability and Complexity in Model Ecosystems. 2nd ed. Princeton: Princeton University Press, 1974.

6. Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. Springer, 1984.

7. Kuang Y. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. New York: Academic Press, 1993.

8. Huang W. Global dynamics for a reaction-diffusion equation with time delay // J. Differential Equations. 1998. Vol. 143. P. 293–326.

9. Pyragas K. Continious control of chaos by self-controlling feedback // Phys. Lett. A. 1992. Vol. 170. P. 42.

10. Nakajima H., Ueda Y. Limitation of generalized delayed feedback control of chaos // Physica D. 1998. Vol. 111. P. 143.

11. Hovel P., Scholl E. Control of unstable steady states by time-delayed feedback methods // Physical Review E. 2005. Vol. 75. P. 046203.

12. Fiedler B., Flunkert V., Georgi M., Hovel P., Scholl E. Refuting the odd number limitation of time-delayed feedback control // Phys. Rev. Lett. 2007. Vol. 98. P. 114101.

13. Wright E. M. A non-linear differential equation // J. Reine Angew. Math. 1955. Vol. 194, №. 1—4. P. 66—87.

14. Kakutani S., Markus L. On the non-linear difference-differential equation $y'(t) = (a - by(t-\tau))\,y(t)$ contributions to the theory of non-linear oscillations // Ann. Math. Stud. Princeton University Press. 1958. Vol. IV. P. 1—18.

15. Jones G. S. The existence of periodic solutions of $f'(x) = -\alpha f(x-1)[1+f(x)]$ // T. Math. Anal. and Appl. 1962. Vol. 5. P. 435—450.

16. Кащенко С. А. Асимптотика периодического решения обобщённого уравнения Хатчинсона // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: ЯрГУ, 1981. С. 64–85. [Kashchenko S. A. Asymptotics of periodical solution of Hutchinson generalized equation // Issledovaniya po ustoichivosti i teorii kolebanii (Studies of Stability and Theory of Oscillations). Yaroslavl: YarGU, 1981. P. 64–85 (in Russian)].

17. Кащенко С. А. Асимптотика решений обобщенного уравнения Хатчинсона // Моделирование и анализ информационных систем. 2012. Т. 19, № 3. С. 32–62. (Kashchenko S.A. Asymptotics of Solutions of the Generalized Hutchinson's Equation // Model. and Anal. Inform. Sist. 2012. Vol. 19, №3. P. 32–62 [in Russian]).

18. Григорьева Е. В., Кащенко С. А. Релаксационные колебания в лазерах. М.: УРСС, 2013. (Grigorieva E. V., Kashchenko S. A. Relaxation oscillations in lasers. Moscow: URSS, 2013 [in Russian]).

19. Кащенко С. А. Релаксационные колебания в системе с запаздываниями, моделирующей задачу „хищник-жертва“ // Моделирование и анализ информационных систем. 2013. Т. 20, № 1. С. 52–98. (Kashchenko S. A. Relaxation Oscillations in a System with Delays Modeling the Predator-Prey Problem // Model. and Anal. Inform. Sist. 2013. Vol. 20, №1. P. 52–98 [in Russian]).

20. Кащенко С. А. Исследование методами большого параметра системы нелинейных дифференциально-разностных уравнений, моделирующих задачу хищник-жертва // ДАН СССР. 1982. Т. 266, N 4. С. 792–795. (English transl.: Kashchenko S. A. Study by large parameter method of system of nonlinear differential-difference equations modeling 'predator-sacrifice' problem // Dokl. Akad. Nauk USSR. 1982. Vol. 266. P. 792–795.)

21. Кащенко С.А. Исследование стационарных режимов дифференциально-разностного уравнения динамики популяции насекомых // Моделирование и анализ информационных систем. 2012. Т. 19, № 5. С. 18–34. (Kashchenko S.A. Stationary States of a Delay Differentional Equation of Insect Population's Dynamics // Model. and Anal. Inform. Sist. 2012. Vol. 19, №5. P. 18–34 [in Russian]).

22. Кащенко С.А. Стационарные режимы уравнения, описывающего численности насекомых // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 2. С. 328–330. (Kashchenko S.A. Stationary regimes of equation describing numbers of insects // Reports Academy of Sciences of the USSR. 1983. Vol. 273. P. 328–330 [in Russian]).

23. Эдварс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969. (Edwards R.E. Functional Analysis: Theory and Applications. New York: Dover Pub, 1965.)

24. Кащенко С.А. Бифуркации в окрестности цикла при малых возмущениях с большим запаздыванием // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40, № 4. С. 693–702. (Kashchenko S. A. Bifurcations in the neighborhood of a cycle under small perturbations with a large delay // Zh. vychisl. mat. i mat. fiz. 2000. Vol. 40, №5. P. 693–702 [in Russian]).

25. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. (Marsden J., McCracken M. The Hopf Bifurcation and Its Applications. New York: Springer-Verlag, 1976.)

26. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. (Hartman P. Ordinary Differential Equations. Wiley, 1964.)

27. Кащенко С.А. Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 8. С. 1448–1451. (Kashchenko S.A. Application of method of normalization for studying of differential-difference equations with small multiplier for derivative // Differential Equations. 1989. Vol. 25, №8. P. 1448–1451 [in Russian]).

28. Kaschenko S.A. Normalization in the systems with small diffusion // International Journal of Bifurcations and chaos. 1996. Vol. 6, №7. P. 1093–1109.

29. Кащенко С.А. О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией // ДАН СССР. 1988. Т. 299, N 5. С. 1049–1053. (Kashchenko S.A. On the quasi-normal forms for parabolic equations with small diffusion // Reports Academy of Sciences of the USSR. 1988. Vol. 299. P. 1049–1053 [in Russian]).

30. Кащенко С.А. Локальная динамика нелинейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием //Дифф. уравнения. 1999. Т. 35(10). С. 1343–1355. (Kashchenko S. A. Local Dynamics of non-linear singular perturbation systems with delay // Diff. Equations. 1999. Vol. 35. №10. P. 1343–1355 [in Russian]).

31. Кащенко И.С. Динамика уравнения с большим коэффициентом запаздывающего управления // Доклады Академии наук. 2011. Т. 437. № 6. С. 743–747. (English transl.: Kashchenko I.S. Dynamics of an Equation with a Large Coefficient of Delay Control // Doklady Mathematics. 2011. Vol. 83, No. 2. P. 258–261.)

32. Кащенко И.С. Асимптотическое исследование корпоративной динамики систем уравнений, связанных через запаздывающее управление // Доклады Академии наук. 2012. Т. 443. № 1. С. 9–13. (English transl.: Kashchenko I.S. Asymptotic Study of the Corporate Dynamics of Systems of Equations Coupled by Delay Control // Doklady Mathematics. 2012. Vol. 85, No. 2. P. 163–166.)

33. Кащенко С.А. Уравнения Гинзбурга–Ландау – нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием // Журнал выч. мат. и мат. физ. 1998. Т. 38, №3. С. 457–465. (Kashchenko S.A. The Ginzburg–Landau equation as a normal form for a second-order difference-differential equation with a large delay // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 1998. Vol. 38, №3. P. 457–465 [in Russian]).

## The Dynamics of the Logistic Equation with Delay and Delayed Control

Kaschenko S.A.

*P.G. Demidov Yaroslavl State University,*
*Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia*

**Keywords:** relaxation oscillations, large parameter, asymptotic behavior, delay, periodic solution

Dynamical properties of a logistic equation with delay and delay control are studied by asymptotic methods. It is shown that effective control of characteristics of relaxation cycle is possible. A new method for studying the dynamics in the case of suffitiently large delay control coeffitient is worked out. It is found that the original problem of the dynamics of equations with delays is reduced to the problem of non-local dynamics of special nonlinear boundary value problems of parabolic type.

**Сведения об авторе:**
**Кащенко Сергей Александрович,**
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического моделирования