*Модел. и анализ информ. систем.* Т. **21**, № **5** (2014) 78–92


УДК 517.926

# Оптимальное управление поведением решений начально-краевой задачи, моделирующей вращение твердого тела с упругим стержнем

Кубышкин Е. П., Тряхов М. С.[1]

*Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова*
*150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14*

*e-mail: m.tryakhov@uniyar.ac.ru, kubysh@uniyar.ac.ru*

*получена 10 августа 2014*

**Ключевые слова:** начально-краевая задача, дискретно-континуальная механическая система, оптимальное управление, задача быстродействия

Рассмотрена начально-краевая задача, моделирующая вращение дискретно-континуальной механической системы, состоящей из твердого тела и жестко связанного с ним упругого стержня. Для начально-краевой задачи определено понятие решения, доказано его существование, единственность и непрерывная зависимость от начальных условий и параметров краевой задачи. Решены следующие задачи оптимального управления: задача перевода решения из начального фазового состояния в конечное в заданный момент времени с минимумом нормы управляющей функции в пространстве $L_\infty(0,T)$ и задача быстродействия при ограничении нормы управляющей функции в указанном пространстве. При этом сформулирован принцип максимума, предложен алгоритм построения оптимального управления. В качестве метода исследования используется проблема моментов.

## 1. Постановка задачи и формулировка результата

Рассматривается начально-краевая задача

$$J\ddot{\theta} + \int_0^1 (x+a) y_{tt}(x,t)dx = M(t), \tag{1}$$

$$y_{tt} + y_{xxxx} = -(x+a)\ddot{\theta}, \tag{2}$$

$$y(0,t) = y_x(0,t) = 0, y_{xx}(1,t) = y_{xxx}(1,t) = 0, \tag{3}$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, \quad y(x,0) = y_0(x), \quad y_t(x,0) = \dot{y}_0(x), \tag{4}$$

[1]Работа выполнена при поддержке проекта № 984 в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ.

для определения функций $\theta(t), y(x,t)$ $(0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1)$. В (1)–(4) $J = J_0 + a^2 + a + 1/3$, где $J_0, a$ – положительные параметры, функция

$$M(t) \in L_\infty(0,T) \quad (||M(t)||_{L_\infty(0,T)} = vrai \sup_{0 \leq t \leq T} |M(t)|),$$

функциональные пространства для начальных условий $y_0(x), \dot{y}_0(x)$ будут определены ниже.

Начально-краевая задача (1)–(4) описывает поворот механической системы, состоящей из твердого тела с упругим стержнем, вокруг оси, которая проходит через центр масс твердого тела перпендикулярно средней линии недеформированного стержня. Упругий стержень моделируется балкой Эйлера–Бернулли в рамках гипотез малого изгиба, имеет постоянное сечение и равномерно распределенную по длине массу. Точка заделки стержня в твердое тело и центр масс твердого тела находятся на одной прямой со средней линией недеформированного стержня. Поворот осуществляется моментом внешних сил, который приложен к оси вращения и определяется функцией $M(t)$. Рассматриваемая система является простейшей дискретно-континуальной механической системой и служит механической моделью руки манипулятора, обладающей упругой податливостью. Вывод уравнений движения рассматриваемой механической системы имеется, например, в [1]. Начально-краевая задачи (1)–(4) приведена в безразмерных переменных. Функции $\theta(t), y(x,t)$ определяют соответственно угол поворота системы относительно инерциального пространства и величину поперечной деформации стержня; параметры $J_0$ и $a$ определяют момент инерции твердого тела относительно осей вращения и расстояние от точки заделки упругого стержня до центра масс твердого тела. Величина $J$ определяет момент инерции всей системы относительно оси вращения.

Ниже для начально-краевой задачи (1)–(4) сформулировано понятие решения, определены функциональные пространства для начальных условий и решения, доказана теорема существования и единственности решения. Показана корректность поставленной начально-краевой задачи и построена аналитическая формула решения.

Для начально-краевой задачи (1)–(4) решены следующие задачи оптимального управления.

**Задача 1.** *Определить функцию $M(t) \in L_\infty(0,T)$, переводящую решение начально-краевой задачи (1)–(4) из начального состояния (4) в конечное*

$$\theta(T) = \theta_T, \quad \dot{\theta}(T) = \dot{\theta}_T, \quad y(x,T) = y_T(x), \quad y_t(x,T) = \dot{y}_T(x) \tag{5}$$

*в заданный момент времени $T$ и минимизирующую функционал*

$$\Phi(M) = \|M(t)\|_{L_\infty(0,T)}. \tag{6}$$

**Задача 2.** *(Задача быстродействия) Определить функцию $M(t) \in L_\infty(0,T)$, $\Phi(M) \leqslant L < \infty$, переводящую решение начально-краевой задачи (1)–(4) из (4) в (5) за минимальное время $T$.*

При решении задачи 1 сформулирован принцип максимума, предложен алгоритм построения оптимального управления. В задаче 2 минимальное время находится как первый положительный корень некоторого нелинейного алгебраического уравнения, при этом оптимальное управление строится аналогично задаче 1.

Отметим, что в работе [2] предложен алгоритм решения задач 1,2 в случае функционала $\Phi(M) = \|M(t)\|_{L_2(0,T)}$. В работах [1, 3] рассмотрена задача построения программного управления поворотом твердого тела с упругим стержнем на заданный угол с полным гашением колебаний. В качестве метода исследования использовались конечномерные аппроксимации начально-краевой задачи, построенные по методу Галеркина с использованием разложения распределенной части по балочным функциям, удовлетворяющим соответствующим краевым условиям. Анализ конечномерных систем проводится известными методами. В работе [3] рассмотрены также вопросы сходимости соответствующих приближений. В настоящей работе используется идеология работы [2].

## 2. Построение решения начально-краевой задачи (1)–(4)

Выразим $\theta_{tt}(t)$ из (1) и подставим в уравнение (2). В результате имеем для определения $y(x,t)$ следующую начально-краевую задачу:

$$y_{tt} - J^{-1}(x+a)\int_0^1 (x_1+a)y_{tt}(x_1,t)dx_1 + y_{xxxx} = -J^{-1}(x+a)M(t), \tag{7}$$

$$y(0,t) = y_x(0,t) = 0, y_{xx}(1,t) = y_{xxx}(1,t) = 0, \tag{8}$$

$$y(x,0) = y_0(x), \quad y_t(x,0) = \dot{y_0}(x). \tag{9}$$

Положим сначала $M(t) \equiv 0$. Определяя решение $y(x,t)$ в виде $y(x,t) = v(x)s(t)$, подставим его в краевую задачу (7)–(8). В результате получим для определения $v(x)$ спектральную краевую задачу

$$v^{\mathrm{IV}}(x) = \lambda\left(v(x) - J^{-1}(x+a)\int_0^1 (x_1+a)v(x_1)dx_1\right), \tag{10}$$

$$v(0) = v'(0) = 0, v''(1) = v'''(1) = 0, \tag{11}$$

а для $s(t)$ – следующее уравнение

$$\ddot{s}(t) + \lambda s(t) = 0.$$

Изучим спектральную краевую задачу (10)–(11). Интегральный оператор

$$Av(x) \equiv v(x) - J^{-1}(x+a)\int_0^1 (x_1+a)v(x_1)dx_1 \equiv v(x) - J^{-1}(x+a)(x+a, v(x))_{L_2},$$

действующий в $L_2(0,1)$, является ограниченным, симметричным и положительно определенным

$$||Av||^2_{L_2} = ||v||^2_{L_2} - (J_0+J)J^{-2}(x+a,v)^2_{L_2} \le ||v||^2_{L_2},$$

$$(Av,u)_{L_2} = (v,u)_{L_2} - J^{-1}(x+a,v)_{L_2}(x+a,u)_{L_2} = (v,Au)_{L_2},$$

$$(Av,v)_{L_2} = (v,v)_{L_2} - J^{-1}(x+a,v)^2_{L_2} \geq (v,v)_{L_2} - J^{-1}(x+a,x+a)^2_{L_2}(v,v)^2_{L_2} = J_0 J^{-1}(v,v)_{L_2}.$$

При этом $A^{-1}v(x) \equiv v(x) + J_0^{-1}(x+a)(x_1+a,v(x))_{L_2}$. Оператор $Bv(x) \equiv v^{\mathrm{IV}}(x)$, действующий в $L_2(0,1)$ с областью определения $D(B) = \{v(x) \in W_2^4(0,1), v(0) = v'(0) = v''(1) = v'''(1) = 0\}$ является симметричным и положительно определенным. Расширим его до самосопряженного в энергетическом пространстве $H_B \subset W_2^2(0,1)$, при этом $B^{-1}$ – вполне непрерывный оператор. Запишем спектральную краевую задачу (10)–(11) в операторной форме

$$Bv = \lambda Av. \tag{12}$$

Выполнив в (12) замену $B^{1/2}v = u \in L_2(0,1)$, где $B^{1/2}$ – положительный корень из оператора $B$ ($v = B^{-1/2}u$), получим спектральную задачу

$$\mu u = B^{-1/2}AB^{-1/2}u \quad (\mu = \lambda^{-1}) \tag{13}$$

для вполне непрерывного самосопряженного и положительно определенного оператора $B^{-1/2}AB^{-1/2}$. Такая спектральная задача имеет (см., например, [4]) счетное число вещественных положительных конечнократных точек спектра $\mu_j \to 0$ при $j \to \infty$, которым соответствуют линейно независимые, ортогональные в $L_2(0,1)$ собственные функции $u_j = u_j(x)$. Ниже будет показано, что точки спектра однократны. Для $v_j = B^{-1/2}u_j$ согласно (12) имеем

$$(u_j,u_k)_{L_2} = (B^{1/2}v_j, B^{1/2}v_k)_{L_2} = \lambda_j(Av_j,v_k)_{L_2} = \lambda_j\langle v_j,v_k\rangle = \lambda_j\delta_{kj}, \tag{14}$$

где скалярное произведение

$$\langle v,u\rangle = (v,u)_{L_2} - J^{-1}(x+a,v)_{L_2}(x+a,u)_{L_2}, \tag{15}$$

$\delta_{kj}$ – символ Кронекера. Отметим, что $v_j(x)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(0,1)$ и ортогональный в $H_B$.

Для построения функций $v_j(x)$ применим к обеим частям уравнения (10) оператор $A^{-1}$. В результате получим эквивалентное (10) уравнение

$$v^{\mathrm{IV}}(x) - J_0^{-1}(x+a)(av'''(0) - v''(0)) = \lambda v(x). \tag{16}$$

Покажем, что собственные значения $\lambda_j$ однократны. Предположим, что для некоторого $\lambda_k$ имеется две линейно независимых собственных функции $v_{k1}(x)$ и $v_{k2}(x)$. Возьмем их линейную комбинацию $\tilde{v}_k(x) = (av'''_{k2}(0) - v''_{k2}(0))v_{k1}(x) - (av'''_{k1}(0) - v''_{k1}(0))v_{k2}(x)$ и подставим ее в уравнение (16). В результате получим, что $\tilde{v}_k^{\mathrm{IV}}(x) = \lambda_k\tilde{v}_k(x)$. Таким образом, $\tilde{v}_k(x)$ является балочной функцией, удовлетворяющей краевым условиям (11), т.е.

$$\tilde{v}_k(x) = w_k(x)/\langle w_k(x), w_k(x)\rangle^{1/2}, \tag{17}$$

$$w_k(x) = (\mathrm{sh}(\beta_k) + \sin(\beta_k))(\mathrm{ch}(\beta_k x) - \cos(\beta_k x)) - (\mathrm{ch}(\beta_k) + \cos(\beta_k))(\mathrm{sh}(\beta_k x) - \sin(\beta_k x)),$$

а $\beta_k > 0$ корень уравнения $\mathrm{ch}(\beta)\cos(\beta)+1=0$ [5]. Для любого $\beta_k$ $aw_k'''(0)-w_k''(0) = -2(a\beta_k^3(\mathrm{ch}(\beta_k)+\cos(\beta_k))+\beta_k^2(\mathrm{sh}(\beta_k)+\sin(\beta_k)))<0$. Получили противоречие.

Положим в $\lambda=\beta^4$ и заметим, что общее решение уравнения (16) имеет вид

$$v(\beta x)=A\,\mathrm{ch}(\beta x)+B\,\mathrm{sh}(\beta x)+C\cos(\beta x)+D\sin(\beta x)-\frac{1}{J_0\beta^2}(x+a)(a\beta(B-D)-A+C). \tag{18}$$

Подставив (18) в краевые условия (11), получим для определения $A,B,C,D$ линейную однородную алгебраическую систему. Равенство нулю определителя матрицы этой системы дает характеристическое уравнение

$$\mathrm{ch}(\beta)\cos(\beta)+1+J_0^{-1}\{2a\beta^{-2}\,\mathrm{sh}(\beta)\sin(\beta)+$$
$$+\beta^{-3}[(a^2\beta^2+1)\,\mathrm{ch}(\beta)\sin(\beta)+(a^2\beta^2-1)\,\mathrm{sh}(\beta)\cos(\beta)]\}=0, \tag{19}$$

положительные корни которого определяют точки спектра $0<\lambda_1<\lambda_2<...<\lambda_n<...$ $(\lambda_n=\beta_n^4)$ спектральной краевой задачи (10)–(11). Ненулевые решения линейной алгебраической системы при соответствующем $\beta_n$ имеют вид

$$\begin{gathered}A_n=\mathrm{sh}(\beta_n)+[1-2a(J_0\beta_n^2)^{-1}]\sin(\beta_n)-2a^2(J_0\beta_n)^{-1}\cos(\beta_n),\\ B_n=-\,\mathrm{ch}(\beta_n)-[1+2a(J_0\beta_n^2)^{-1}]\cos(\beta_n)-2(J_0\beta_n^3)^{-1}\sin(\beta_n),\\ C_n=-\sin(\beta_n)-[1+2a(J_0\beta_n^2)^{-1}]\,\mathrm{sh}(\beta_n)-2a^2(J_0\beta_n)^{-1}\,\mathrm{ch}(\beta_n),\\ D_n=\cos(\beta_n)+[1-2a(J_0\beta_n^2)^{-1}]\,\mathrm{ch}(\beta_n)-2(J_0\beta_n^3)^{-1}\,\mathrm{sh}(\beta_n)\end{gathered} \tag{20}$$

и, будучи подставленными в (18), определяют собственные функции

$$v_n(x)=v(\beta_n x)/\langle v(\beta_n x),v(\beta_n x)\rangle^{1/2} \tag{21}$$

спектральной краевой задачи (10)–(11).

Перейдем к построению решения начально-краевой задачи (7)–(9). Для его определения введем некоторые функциональные пространства. В дальнейшем $Q_T=\{(x,t),\ 0<x<1,\ 0<t<T\}$. Обозначим через $H(0,1)$ пространство функций $u(x)\in L_2(0,1)$, снабженное скалярным произведением (15) и нормой $||u(x)||_H=\langle u(x),u(x)\rangle^{1/2}$. Через $H_j(0,1)$ $(j=1,2,3)$ обозначим пространства функций вида

$$u(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\quad u_nv_n(x), u_n=\langle u(x),v_n(x)\rangle,\ \ \|u(x)\|_{H_j}=\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^ju_n^2\Big)^{1/2}<\infty,\ \omega_n=\beta_n^2.$$

Отметим, что эти пространства являются соответственно замкнутыми подпространствами $W_2^j(0,1)$.

Через $H(Q_T)$ обозначим пространство $L_2(Q_T)$ функций $y(x,t)$, снабженное скалярным произведением и нормой

$$(u(x,t),v(x,t))_{H(Q_T)}=\int_0^T\langle u(x,t),v(x,t)\rangle dt,\ \|y(x,t)\|_{H(Q_T)}=(y(x,t),y(x,t))_{H(Q_T)}^{1/2}.$$

Через $H_2(Q_T)$ обозначим гильбертово пространство функций $y(x,t)$, полученное замыканием множества функций $y(x,t) \in C^{3,1}(\overline{Q}_T)$, $y(0,t) = y_x(0,t) = 0, y_{xx}(1,t) = y_{xxx}(1,t) = 0$ в норме

$$\|y(x,t)\|_{H_2(Q_T)} = (y(x,t), y(x,t))^{1/2}_{H_2(Q_T)},$$

$$(u(x,t), v(x,t))_{H_2(Q_T)} = (u_{xx}(x,t), v_{xx}(x,t))_{L_2(Q_T)} + (u_t(x,t), v_t(x,t))_{H(Q_T)}.$$

Умножим обе части уравнения (7) на функцию

$$v(x,t) \in H_2(Q_T), \quad v(x,T) \equiv 0 \tag{22}$$

и проинтегрируем по $(x,t) \in Q_T$. В результате, вычисляя интегралы по частям при учете краевых и начальных условий (8)–(9), условия (22), а также учтя соотношение $J_0(x+a, v(x,t))_{L_2} = J\langle x+a, v(x,t)\rangle$, получим интегральное равенство

$$\int\limits_0^T \big(\langle y_t(x,t), v_t(x,t)\rangle - (y_{xx}(x,t), v_{xx}(x,t))_{L_2} - J_0^{-1}\langle x+a, v(x,t)\rangle M(t)\big)\, dt+$$

$$+\langle y_1(x), v(x,0)\rangle = 0. \tag{23}$$

Пусть

$$y_0(x) \in H_2(0,1), \quad y_1(x) \in H(0,1). \tag{24}$$

Под решением начально-краевой задачи (7)–(9), определенным в области $Q(T)$, с начальными условиями (24) будем понимать функцию $y(x,t) \in H_2(Q_T)$ $\quad (y(x,0) = y_0(x))$, удовлетворяющую интегральному соотношению (23) для любой функции $v(x,t)$ вида (22).

Представим

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^{-1} a_{0n} v_n(x), \quad a_{0n} = \omega_n \langle y_0(x), v_n(x)\rangle, \quad \|y_0(x)\|^2_{H_2} = \sum_{n=1}^{\infty} a^2_{0n},$$

$$\dot{y_0}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{0n} v_n(x), \quad b_{0n} = \langle \dot{y_0}(x), v_n(x)\rangle, \quad \|\dot{y_0}(x)\|^2_{H} = \sum_{n=1}^{\infty} b^2_{0n}, \tag{25}$$

$$x+a = \sum_{n=1}^{\infty} d_n v_n(x), \quad d_n = \langle x+a, v_n(x)\rangle, \quad \|x+a\|^2_{H} = \sum_{n=1}^{\infty} d^2_{n}.$$

**Утверждение 1.** *Решение $y(x,t) \in H_2(Q_T)$ начально-краевой задачи (7)–(9) с начальными условиями (24) существует, единственно и представимо в виде*

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)\omega_n^{-1}\big(a_{0n}\cos(\omega_n t) + b_{0n}\sin(\omega_n t) - J_0^{-1} d_n \int\limits_0^t \sin(\omega_n(t-\tau))M(\tau)d\tau\big), \tag{26}$$

*где $a_{0n}, b_{0n}, d_n$ определены в (25). При этом справедлива оценка*

$$\|y(x,t)\|_{H_2(Q_T)} \le C\Big(\, \|y_0(x)\|^2_{H_2} + \|\dot{y_0}(x)\|^2_{H} + \|x+a\|^2_{H}\, \|M(t)\|^2_{L_\infty(0,T)}\Big)^{1/2}, \tag{27}$$

*где $C > 0$ – некоторая постоянная.*

*Доказательство.* Докажем сначала единственность решения. Предположив существование двух решений $y_1(x,t)$ и $y_2(x,t)$, для их разности $y(x,t)$ получим интегральное соотношение

$$\int\limits_0^T (\langle y_t(x,t), v_t(x,t)\rangle - (y_{xx}(x,t), v_{xx}(x,t))_{L_2})\, dt = 0. \tag{28}$$

Выберем в качестве $v(x,t)$ функцию

$$v(x,t) = \begin{cases} \int_t^\tau y(x,\xi)d\xi, & 0 < t < \tau, \\ 0, & \tau \le t < T, \end{cases}$$

зависящую от параметра $0 < \tau < T$, и подставим ее в (28). В результате имеем

$$\int\limits_0^T \langle y_t(x,t), v_t(x,t)\rangle = -\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau \frac{d}{dt}\langle y(x,t), y(x,t)\rangle dt = -\frac{1}{2}\langle y(x,\tau), y(x,\tau)\rangle,$$

$$\int\limits_0^T (y_{xx}(x,t), v_{xx}(x,t))_{L_2} dt = \int\limits_0^1 \Bigg(\int\limits_0^\tau y_{xx}(x,t)dt \int\limits_t^\tau y_{xx}(x,\xi)d\xi\Bigg)dx =$$
$$= \int\limits_0^1 \Bigg(\int\limits_0^\tau y_{xx}(x,\xi)d\xi \int\limits_0^\xi y_{xx}(x,t)dt\Bigg)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \Bigg(\int\limits_0^\tau y_{xx}(x,t)dt\Bigg)^2 dx.$$

В итоге равенство (28) примет вид

$$\frac{1}{2}\langle y(x,\tau), y(x,\tau)\rangle + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \Bigg(\int\limits_0^\tau y_{xx}(x,t)dt\Bigg)^2 dx = 0,$$

из которого в силу произвольности $\tau$ следует, что $y(x,t) \equiv 0$. Единственность решения доказана.

Перейдем к доказательству существования решения начально-краевой задачи (7)–(9). Выберем в качестве $y_0(x) = a_{0n}v_n(x)\omega_n^{-1}$, $\dot{y}_0(x) = b_{0n}v_n(x)$, и пусть в правой части уравнения (7) вместо функции $x + a$ стоит функция $d_n v_n(x)$, где $a_{0n}, b_{0n}, d_n$ – некоторые постоянные. Тогда функция

$$y_n(x,t) = v_n(x)\omega_n^{-1}\big(a_{0n}\cos(\omega_n t) + b_{0n}\sin(\omega_n t) - J_0^{-1}d_n \int\limits_0^t \sin(\omega_n(t-\tau))M(\tau)d\tau\big) \tag{29}$$

является решением начально-краевой задачи (7)–(9), удовлетворяющим выбранным начальным условиям. Это проверяется непосредственной подстановкой (29) в (23) с использованием разложения

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^{-1}f_n(t)v_n(x),\ \ f_n(t)=\omega_n\langle v(x,t),v_n(x)\rangle,\ \ f_n(t)\in W_2^1(0,T),\ \ f_n(T)=0.$$

Аналогичное утверждение справедливо, если $y_0(x)=\sum_{n=1}^{N}\omega_n^{-1}a_{0n}v_n(x)$, $y_1(x)=\sum_{n=1}^{N}b_{0n}v_n(x)$ и в правой части уравнения (7) вместо функции $x+a$ стоит ряд $\sum_{n=1}^{N}d_nv_n(x)$. В этом случае решение начально-краевой задачи (7)–(9) будет иметь вид $y_N(x,t)=\sum_{n=1}^{N}y_n(x,t)$.

Покажем теперь, что ряд (26), где $a_{0n},b_{0n},d_n$ определены в (25), дает решение начально-краевой задачи (7)–(9), принадлежащее $H_2(Q_T)$ и удовлетворяющее начальным условиям (24). Согласно сказанному выше, ряд (26) является формальным решением начально-краевой задачи (7)–(9). Докажем сходимость ряда(26) в норме пространства $H_2(Q_T)$. Формально дифференцируя ряд (26) дважды по $x$, оценим отрезок полученного ряда

$$\Big\|\sum_{n=N}^{N+m}v_n''(x)\omega_n^{-1}\Big(a_{0n}\cos(\omega_nt)+b_{0n}\sin(\omega_nt)-J_0^{-1}d_n\int\limits_0^t\sin(\omega_n(t-\tau))M(\tau)d\tau\Big)\Big\|^2_{L_2(Q_T)}=$$

$$=\sum_{n=N}^{N+m}\int\limits_0^T\Big(a_{0n}\cos(\omega_nt)+b_{0n}\sin(\omega_nt)-J_0^{-1}d_n\int\limits_0^t\sin(\omega_n(t-\tau))M(\tau)d\tau\Big)^2dt\le$$

$$\le 3\sum_{n=N}^{N+m}\int\limits_0^T\Big(a_{0n}^2\cos^2(\omega_nt)+b_{0n}^2\sin^2(\omega_nt)+\Big(J_0^{-1}d_n\Big)^2\big(\int\limits_0^t\sin(\omega_n(t-\tau))M(\tau)d\tau\big)^2\Big)dt\le$$

$$\le 3T\sum_{n=N}^{N+m}\Big(a_{0n}^2+b_{0n}^2+\Big(J_0^{-1}d_n\Big)^2\|M(t)\|^2_{L_2(0,T)}\Big).\tag{30}$$

В (30) использовано равенство $(v_n''(x),v_m''(x))_{L_2}=\omega_n^2\delta_{nm}$ и неравенство $2ab\le a^2+b^2$. Согласно (25) величина (30) может быть сделана за счет выбора $N$ и $m>0$ меньше любого заданного $\varepsilon>0$. Аналогично, формально дифференцируя ряд (26) по $t$, оценим отрезок полученного ряда

$$\Big\|\sum_{n=N}^{N+m}v_n(x)\Big(-a_{0n}\sin(\omega_nt)+b_{0n}\cos(\omega_nt)-\frac{1}{J_1}d_n\int\limits_0^t\cos(\omega_n(t-\tau))M(\tau)d\tau\Big)\Big\|^2_{H(Q_T)}=$$

$$=\sum_{n=N}^{N+m}\int\limits_0^T\Big(-a_{0n}\sin(\omega_nt)+b_{0n}\cos(\omega_nt)-\frac{1}{J_1}d_n\int\limits_0^t\cos(\omega_n(t-\tau))M(\tau)d\tau\Big)^2dt\le$$

$$\leq 3\sum_{n=N}^{N+m}\int_0^T\Big(a_{0n}^2\sin^2(\omega_n t)+b_{0n}^2\cos^2(\omega_n t)+\Big(\frac{1}{J_1}d_n\Big)^2\big(\int_0^t\cos(\omega_n(t-\tau))M(\tau)d\tau\big)^2\Big)dt\leq$$

$$\leq 3T\sum_{n=N}^{N+m}\Big(a_{0n}^2+b_{0n}^2+\Big(\frac{1}{J_1}d_n\Big)^2\|M(t)\|^2_{L_2(0,T)}\Big). \tag{31}$$

Величина (31) также за счет выбора $N$ и $m$ может быть сделана меньше любого заданного $\varepsilon > 0$. Это означает, что последовательность частичных сумм ряда (26) фундаментальна в пространстве $H_2(Q_T)$. В силу полноты этого пространства ряд (26) сходится к функции $y(x,t)\in H_2(Q_T)$. Существование решения начально-краевой задачи (7)–(9) доказано.

Из (25), (30), (31) и неравенства $\|M(t)\|_{L_2(0,T)}\leq T^{1/2}\|M(t)\|_{L_\infty(0,T)}$ для решения (26) вытекает оценка (27), обеспечивающая корректность поставленной задачи. *Утверждение доказано.*

Построим теперь решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (4). Пусть функция

$$p(t)\in W_2^1(0,T),\quad p(T)=0. \tag{32}$$

Умножим уравнение (1) на $p(t)$ и проинтегрируем по $t\in[0,T]$. Вычисляя интегралы, входящие в полученное равенство по частям, будем иметь

$$-J\int_0^T\dot\theta(t)\dot p(t)dt-J\theta_1 p(0)-p(0)\int_0^1(x+a)y_1(x)dx-\int_0^T\dot p(t)\int_0^1(x+a)y_t(x,t)dxdt=$$

$$=\int_0^T M(t)p(t)dt,$$

что эквивалентно равенству

$$\int_0^T\big(J\dot\theta(t)\dot p(t)+JJ_0^{-1}\langle x+a_1,y_t(x,t)\rangle\dot p(t)+(J\dot\theta_1+JJ_0^{-1}\langle x+a,y_1(x)\rangle)p(0)+M(t)p(t)\big)dt=0. \tag{33}$$

Под решением уравнения (1) будем понимать функцию $\theta(t)\in W_2^1(0,T)$ $\theta(0)=\theta_0$, удовлетворяющую интегральному равенству (33) для любой функции $p(t)$ вида (32).

Легко видеть, что искомым решением уравнения (1) будет функция

$$\theta(t)=\theta_0+\dot\theta_0 t+J_0^{-1}\big(\langle x+a,y_1(x)\rangle t-\int_0^t\langle x+a,y_{t_1}(x,t_1)\rangle dt_1\big)+J^{-1}\int_0^t(t-t_1)M(t_1)dt_1=$$

$$=\theta_0+\theta_1 t+J_0^{-1}\big(\langle x+a,y_1(x)\rangle t-\langle x+a,y(x,t)\rangle+\langle x+a,y_0(x)\rangle\big)+J^{-1}\int_0^t(t-t_1)M(t_1)dt_1. \tag{34}$$

# 3. Построение оптимального управления

Выберем
$$y_0(x), y_T(x) \in H_3(0,1), \quad \dot{y}_0(x), \dot{y}_T(x) \in H_1(0,1) \tag{35}$$
и переформулируем с учетом (26),(34) задачу 1 следующим образом: найти минимум функционала (6) при ограничениях

$$\dot{\theta}_T = \dot{\theta}_0 + J_0^{-1}\big(\langle x+a, \dot{y}_0(x)\rangle - \langle x+a, \dot{y}_T(x)\rangle\big) + J^{-1}\int\limits_0^T M(\tau)d\tau,$$

$$\theta_T = \theta_0 + \dot{\theta}_0 T + J_0^{-1}\big(\langle x+a, \dot{y}_0(x)\rangle T + \langle x+a, y_0(x)\rangle - \langle x+a, y_T(x)\rangle\big) + J^{-1}\int\limits_0^T (T-\tau)M(\tau)d\tau,$$

$$a_{Tn} = a_{0n}\cos(\omega_n T) + b_{0n}\sin(\omega_n T) - J_0^{-1}d_n\int\limits_0^T \sin(\omega_n(T-\tau))M(\tau)d\tau, \tag{36}$$

$$b_{Tn} = -a_{0n}\sin(\omega_n T) + b_{0n}\cos(\omega_n T) - J_0^{-1}d_n\int\limits_0^T \cos(\omega_n(T-\tau))M(\tau)d\tau,$$

$$a_{Tn} = \omega_n\langle y_T(x), v_n(x)\rangle, \quad b_{Tn} = \langle \dot{y}_T(x), v_n(x)\rangle \quad (n = 1, 2, ...).$$

**Утверждение 2.** *Величины*
$$d_n \neq 0 \ \ (n = 1, 2, ...), \ \ d_n = O(n^{-1}) \ \text{ при } \ n \to \infty. \tag{37}$$

*Доказательство.* Воспользуемся равенством
$$\omega_n^2 d_n = -(a v_n'''(0) - v_n''(0)), \tag{38}$$
которое получается, если в уравнение (16) подставить $v(x) = v_n(x)$, $\lambda = \omega_n^2$, полученное равенство умножить на $x + a$ и проинтегрировать по отрезку $[0, 1]$ с учетом краевых условий (11). Предположим, что для некоторого $n$ $d_n = 0$. Из (38) следует, что $a v_n'''(0) - v_n''(0) = 0$. Это равенство совместно с первой частью краевых условий (11) влечет выполнение следующих равенств:
$$A_n + C_n = 0, \ B_n + D_n = 0, \tag{39}$$
для коэффициентов, фигурирующих в определении $v_n(x)$ в соответствии с (19), (21). Подставим в (39) выражения для $A_n$ и $C_n$, определяемые согласно (20). В результате получим выражение
$$-2a(J_0\beta_n)^{-1}[\beta_n^{-1}(\sin(\beta_n) + \mathrm{sh}(\beta_n)) + a(\cos(\beta_n) + \mathrm{ch}(\beta_n))] < 0.$$

Получили противоречие. Для получения второго соотношения (37) заметим, что при $\beta \to \infty$ характеристическое уравнение (19) имеет вид $\cos(\beta) + O(\beta^{-1}) = 0$. В соответствии с этим $\beta_n \sim \pi/2(2n+1)$ при $n \to \infty$, а соответствующие собственные функции $v_n(x)$ близки к балочным функциям (17), в которых $\langle w_k(x), w_k(x)\rangle^{1/2} = \exp(\beta_n)/2(1+O(\beta_n^{-1}))$ при $n \to \infty$. С учетом этого вида функций (17) и равенства (38) имеем второе соотношение (37). *Утверждение доказано.*

Отметим, что первое условие (36) является необходимым условием управляемости поведением решений начально-краевой задачи (1)–(4).

Преобразуем равенства (36) с учетом (25) к следующему виду:

$$\int\limits_0^T M(t)dt = \alpha_1(T) = J(\dot\theta_T - \dot\theta_0) + JJ_0^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} d_n(b_{Tn} - b_{0n}),$$

$$\int\limits_0^T tM(t)dt = \alpha_2(T) = J(\theta_0 - \theta_T - \dot\theta_T T) + JJ_0^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} d_n(a_{0n}\omega_n^{-1} - a_{Tn} - b_{Tn}T),$$

$$\int\limits_0^T \sin(\omega_n t)M(t)dt = \alpha_{2n+1}(T) = J_0 d_n^{-1}(a_{Tn}\cos(\omega_n T) - b_{Tn}\sin(\omega_n T) - a_{0n}), \qquad (40)$$

$$\int\limits_0^T \cos(\omega_n t)M(t)dt = \alpha_{2n+2}(T) = J_0 d_n^{-1}(-a_{Tn}\sin(\omega_n T) - b_{Tn}\cos(\omega_n T) + b_{0n})$$

(n=1,2,...).

Отметим, что согласно (35), (38) справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2(T) < \infty. \qquad (41)$$

Линейный непрерывный функционал в $L_1(0,T)$ имеет вид

$$F(u) = \int\limits_0^T u(t)M(t)dt, \quad M(t) \in L_\infty(0,T), \quad \|F\| = \|M(t)\|_{L_\infty}. \qquad (42)$$

Обозначим

$$\varphi_1(t) = 1, \varphi_2(t) = t, \varphi_{2n+1}(t) = \sin(\omega_n t), \varphi_{2n+2}(t) = \cos(\omega_n t) \ (n = 1, 2...). \qquad (43)$$

С учетом (40), (42)–(43) задача 1 может быть сформулирована как следующая проблема моментов в $L_1(0,T)$.

*Найти функционал вида (42), удовлетворяющий условиям*

$$F(\varphi_j(t)) = \alpha_j(T) \ (j = 1, 2, ...) \qquad (44)$$

*и имеющий минимальную норму* $\|F\|_{min} = m(t)$ .

Отметим, что указанная проблема моментов при конечном числе ограничений (44) рассмотрена в [6]. Некоторые результаты [6] могут быть распространены на рассматриваемый случай.

Обозначим через $Q_2(0,T)$ подпространство $L_2(0,T)$, являющееся замкнутой в норме этого пространства линейной оболочкой функций (43).

**Утверждение 3**. *Функции (43) образуют базис Рисса в пространстве $Q_2(0,T)$.*
*Доказательство.* Покажем сначала, что для некоторого $n$ функции

$$\varphi_{2(n+j)+1}(t), \varphi_{2(n+j)+2}(t), (j = 1, 2, \cdots) \tag{45}$$

образуют базис Рисса в подпространстве $Q_2^n(0,T)$, являющемся замкнутой линейной оболочкой функций (45). Согласно [4, с. 56] для этого необходимо и достаточно, чтобы собственные значения матриц Грамма $G_m^n = \{g_{p\ q}\}, g_{p\ q} = (\varphi_p(t), \varphi_q(t))_{L_2(0,T)}, (p\, q = 2(n+j)+1, 2(n+j)+2, j = 1, 2, \cdots, m)$ были в совокупности отделены от нуля и бесконечности. Из вида функции (43) имеем

$$g_{2(n+j)+1\ 2(n+j)+1}, g_{2(n+j)+2\ 2(n+j)+2} = T/2+O((n+j)^{-2}), g_{2(n+j)+1\ 2(n+j)+2} = O((n+j)^{-2})$$

при $(n+j) \to \infty$, и

$$g_{2(n+j)+1\ 2(n+k)+1}, g_{2(n+j)+1\ 2(n+k)+2} = O([n(j-k)]^{-1})$$

при $i \neq k$, $|n(j-k)| \to \infty$.

В связи с этим характеристическое уравнение матрицы $G_m^n$ порядка $2m$ будет иметь вид $(T/2-\lambda)^{2m} + O(n^{-1})$. Отсюда следует совокупная отделенность от нуля и бесконечности собственных значений матриц $G_m^n$. Таким образом, функции (45) образуют базис Рисса в $Q_2^n(0,T)$. Добавление к функциям (45) конечного числа линейно независимых функций не меняет свойства базиса. Следовательно, функции (43) образуют базис Рисса в $Q_2(0,T)$. Это означает, что собственные значения $\lambda_j > 0$ бесконечной матрицы Грамма $G$, построенной по системе функций (43), в совокупности отделены от нуля и бесконечности, т.е. существуют постоянные $m_g, M_g > 0$, для которых $m_g < \lambda_j < M_g$ $(j = 1, 2, \cdots)$. Отсюда следует справедливость неравенства

$$m_j \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 < \sum_{j\ k=1}^{\infty} g_{j\ k}\xi_j\xi_k < M_j \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 \tag{46}$$

для любого $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l_2$, $\quad ||\xi||^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 < \infty$. *Утверждение доказано.*

Обозначим через $Q_1(0,T)$ подпространство $L_1(0,T)$, полученное замыканием в норме пространства $L_1(0,T)$ множества функций вида $u_N(t) = \sum_{j=1}^{N} \xi_j\varphi_j(t), \xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l_2$. В силу соотношения $||u_N(t)||_{L_1(0,T)} \leq T^{1/2}||u_N(t)||_{L_2(0,T)}$ и неравенства (46) $Q_1(0,T)$ является замкнутым линейным подпространством $L_1(0,T)$.

Введем двойственную к проблеме моментов задачу.

*Найти*

$$\min_{\xi\in l_2} \Big\| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j\varphi_j(t)\Big\|_{L_1(0,T)} = \Big\| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^*\varphi_j(t)\Big\|_{L_1(0,T)} = ||u^*(t)||_{L_1(0,T)} = l^{-1}(T),$$

*при условии* $\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\alpha_j(T)=1$.

**Утверждение 4**. $m(T)=l(T)$.

*Доказательство.* Для любых $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l_2$ и $N>0$ согласно (44)

$$\big|\sum_{j=1}^{N}\xi_j\alpha_j(T)\big|=\big|F\big(\sum_{j=1}^{N}\xi_j\varphi_j\big)\big|\le||F||\big\|\sum_{j=1}^{N}\xi_j\varphi_j\big\|_{L_1(0,T)}\le||F||\big\|\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\varphi_j\big\|_{L_1(0,T)}.$$

Отсюда

$$||F||^{-1}\le\min_{\xi\in l_2}\big\|\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\varphi_j(t)\big\|_{L_1(0,T)}/\big|\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\alpha_j(T)\big|=\min_{\xi\in l_2,\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\alpha_j(T)=1}\big\|\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\varphi_j(t)\big\|_{L_1(0,T)}.$$

Таким образом, $||F||\ge l(T)$ и $m(T)\ge l(T)$.

Определим в $Q_1(0,T)$ функционал $\Phi(u)=\Phi(\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\varphi_j)=\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\alpha_j(T)\quad(\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l_2)$. Норма $\Phi(u)$ в $Q_1(0,T)$ равна

$$||\Phi||=\sup_{u\in Q_1(0,T)}|\Phi(u)|/||u||_{L_1(0,T)}=\sup_{\xi\in l_2}\big|\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\alpha_j(T)\big|/\big\|\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\varphi_j(t)\big\|_{L_1(0,T)}=l(T). \tag{48}$$

Продолжим функционал $\Phi(u)$ на все пространство $L_1(0,T)$ с сохранением нормы (теорема Хана–Банаха, см. [7], стр. 244). Этот функционал обозначим $F(u)$. Соответственно имеем $F(u_j)=\alpha_j(T)\quad(j=1,2,\cdots)$. Следовательно, $m(T)=l(T)$. *Утверждение доказано.*

Отсюда и на основании (42), (47) имеем следующее утверждение.

**Утверждение 5**. *Решение задачи (1) дается формулой*

$$M^*(t)=l(T)sign(u^*(t)). \tag{49}$$

Отметим, что на основании (48)

$$|F(u^*)|=l(T)||u^*(t)||_{L_1(0,T)}=1. \tag{50}$$

Очевидно, что справедливо и обратное. Если для некоторого элемента $u^*(t)\in Q_1(0,T)$ выполнено (50), то для $u^*(t)$ выполнено (48) и $u^*(t)$ является решением двойственной задачи.

Пространство $L_1(0,T)$ не является строго нормированным. Поэтому равенство (50) и соответственно решение двойственной задачи (47) справедливо не для единственного элемента.

Пусть $u^*(t)$ и $v^*(t)$ – решения задачи (47). Тогда для функционала $F(u)$ вида (42), дающего решение проблемы моментов (44), в котором $M^*(t)$ определяется согласно (49), справедливы на основании (48), (50) равенства $|F(u^*)|=|F(v^*)|=1$. Но тогда на основании (42) почти всюду $l(T)sign(u^*(t))=l(T)sign(v^*(t))$. Таким образом, решение задачи 1 единственно.

Обозначим через $S(l(T))$ множество функционалов вида (42), имеющих норму $l(T)$. Элемент $u_0(t)=u^*(t)/||u^*(t)||_{L_1(0,T)}$, где $u^*(t)$ – решение задачи (47), назовем экстремальным.

На основании (50) справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 6 (Принцип максимума)**. *Оптимальный функционал* $F_*(u)$ *вида (42), определяемый функцией* $M^*(t)$, *выделяется из всех функционалов вида (42), имеющих ту же норму* $l(T)$, *следующим свойством максимума на любом экстремальном элементе:*

$$F_*(u_0) = \max_{M(t) \in S(l(T))} F(u).$$

Отметим, что согласно (47) $\lim_{t\to 0} l(T) = \infty, \lim_{T\to\infty} l(T) = 0$.

Обозначим через $T^*$ первый положительный корень уравнения $l(T) = L$.

**Утверждение 7**. *Решение задачи 2 дает пара* $(T^*, M^*(t))$, *где* $M^*(t)$ *определяется формулой(49), в которой* $T = T^*$.

# Список литературы


1. *Бербюк В.Е.* Динамика и оптимизация робототехнических систем. Киев: Наукова думка, 1989. 192 с. [Beryuk V.E. Dinamika i optimizatsiya robototekhnicheskikh sistem. Kiev: Naukova Dumka, 1989 (in Russian)].

2. *Кубышкин Е. П.* Оптимальное управление поворотом твердого тела с гибким стержнем // Прикладная математика и механика. 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 240–249 (English transl.: Kubyshkin Ye. P. Optimal control of the rotation of a solid with a flexible rod // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1992. V. 56, №2. P. 205–214).

3. *Krabs W., Chi-Long N.* On the Controllability of a Robot Arm // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 1998. V. 21. P. 25–42.

4. *Ахиезер Н.И., Глазман И.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966. 544 с. (English transl.: Akhiezer N.I., Glazman I.M. Theory of linear operators in Hilbert space. 2 ed. Dover, 1993. 377 p.).

5. Вибрации в технике: Справочник. М.: Машиностроение, 1978. 362 с. [Vibratsii v tekhnike: Spravochnik. M., 1978. 362 s. (in Russian)].

6. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973. С. 554 (English transl.: Krein M.G., Nudelman A.A. The Markov moment problem and extremal problems. Ideas and problems of P. L. Chebyshev and A. A. Markov and their further development // Translations of Mathematical Monographs. Vol. 50. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977. 417 p.).

7. *Вулих Б. З.* Введение в функциональный анализ. М.: Наука, 1967. 414 с. (English transl.: Vulikh B. Z. / Introduction to Functional Analysis for Scientists and Technologists // Elsevier Science and Technology, 1963. 404 p.).

# Optimal Behavior Control of an Initial-Boundary Problem Solution Modelling Rotation of a Solid Body with the Flexible Rod

Kubyshkin E. P., Tryakhov M. S.

*P.G. Demidov Yaroslavl State University,*
*Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia*

**Keywords:** initial-boundary task, discrete-continuum mechanical system, optimal control, time control problem

An initial-boundary problem modelling the rotation of discrete-continuum mechanical system, which consists from a solid and the rigidly connected flexible rod. To solve the problem we determine a solution notion, prove its existence, uniqueness, and continuous dependence from start conditions and parameters of the boundary task. Are resolved tasks of solution rotation from the start phase state to the finish one at a specified time moment and with the controller function norm minimum in the $L_\infty(0, T)$ space and time control problem with a limited norm of controller function in the specified space. Maximum principe was formulated, and an algorithm of optimal control modelling is proposed. The moments problem is used as an investigation method.

**Сведения об авторах:**
**Кубышкин Евгений Павлович**,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
д-р. физ.-мат. наук, профессор кафедры математического моделирования,
**Тряхов Михаил Сергеевич**,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
аспирант кафедры математического моделирования