

УДК 517.9

Динамика уравнения Курамото с пространственно-распределенным управлением ¹

Кащенко И. С., Кащенко С. А.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: iliyask@uniyar.ac.ru, kasch@uniyar.ac.ru

получена 28 января 2012

Ключевые слова: пространственно-распределенное управление, бегущая волна, квазинормальная форма

Асимптотическими методами изучаются динамические свойства комплексного уравнения с пространственно-распределенными параметрами. Построены семейства специальных параболических уравнений, не содержащих большие и малые параметры, нелокальная динамика которых определяет поведение решений исходного уравнения.

Введение

Исследованию динамических свойств уравнений с пространственно-распределенными параметрами посвящено значительное число работ (см., например, [1, 2, 3, 4, 5]). В работе [4] изучались динамические свойства пространственно-распределенного комплексного уравнения, которое будем называть уравнением Курамото с пространственно-распределенным управлением

$$\dot{u} = (A - B|u|^2)u + \Gamma \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(s)u(t, x + s) ds - u \right)$$

и периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x).$$

Параметры задачи таковы, что

$$\operatorname{Re} A > 0, \quad \operatorname{Re} B > 0, \quad \operatorname{Re} \Gamma > 0$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (государственный контракт № 14.740.11.0873), гранта Президента Российской Федерации (контракт № МК-3867.2011.1) и гранта правительства Российской Федерации 11.G34.31.0053.

и выполнены условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(s) ds = 1.$$

Простые нормирующие замены позволяют перейти к уравнению

$$\dot{u} = [1 + (-1 + ib)|u|^2]u + \gamma(1 + i\alpha) \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(s)u(t, x + s) ds - u \right) \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \quad (2)$$

В силу условия на знаки действительных частей параметров A , B и Γ получаем

$$\gamma > 0.$$

В [4] функция $F(x)$ задана равенством $F(x) = \frac{k}{2} \exp(-k|x|)$. В настоящей работе будем считать, что $F(x)$ гладкая и, возможно, несимметричная относительно нуля. Поэтому ниже предполагаем, что

$$F(s) = \frac{1}{2\mu\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(s+h)^2}{4\mu^2}\right), \quad (\mu > 0). \quad (3)$$

Краевая задача (1), (2) может иметь решения вида бегущих волн $u_k(t, x) = \rho_k \exp(i\omega_k t + ikx)$, где k — целое: $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Для определения ρ_k и ω_k имеют место равенства (для тех целых k , для которых $\rho_k^2 > 0$)

$$\begin{aligned} \rho_k^2 &= 1 + \gamma[(\cos(kh) + \alpha \sin(kh)) \exp(-\mu^2 k^2) - 1], \\ \omega_k &= b\rho_k^2 + \gamma[(\alpha \cos(kh) - \sin(kh)) \exp(-\mu^2 k^2) - \alpha]. \end{aligned}$$

Сформулировать критерий устойчивости бегущих волн в замкнутой форме, а также исследовать динамические свойства краевой задачи (1), (2) при всех рассматриваемых значениях параметров затруднительно. В настоящей работе предпринята попытка асимптотического изучения этих вопросов в предположении, что хотя бы один из параметров γ или μ является либо асимптотически малым, либо асимптотически большим. Отметим, что в [4] асимптотически малым рассматривался параметр γ , а значение параметра, аналогичного μ , в [4] примерно равно 0.2.

В §1 исследуется устойчивость бегущих волн. Сначала предполагается, что параметр μ достаточно большой: $\mu \gg 1$. Этот случай наиболее простой. Следующее утверждение в §1 касается ситуации, когда значение $\mu > 0$ как-то фиксировано, а большим является параметр γ : $\gamma \gg 1$. Наиболее интересные результаты относятся к случаю, когда параметр μ является малым: $0 < \mu \ll 1$. Показано, например, что неустойчивость всех бегущих волн может иметь „взрывной“ характер. Сразу отметим важную в вопросах динамики роль параметров b , α и h .

В условиях §2 показано, что динамические свойства (1), (2) в главном определяются нелокальной динамикой специально построенной краевой задачи параболического типа. Поскольку соответствующие структуры формируются, в основном,

на невысоких модах, они названы медленно осциллирующими. В §3 предполагается, что так называемые диффузионные свойства исходного уравнения малы. В этом случае будет показано, что для краевой задачи (1), (2) характерны быстро осциллирующие, т.е. формирующиеся на асимптотически больших модах, режимы. Для их нахождения будут построены специальные семейства нелинейных параболических краевых задач. В §4 исследуется динамика (1) при условии существенной несимметричности $F(x)$, когда параметр отклонения h не является малым. В заключении будут приведены некоторые выводы.

§1. Устойчивость бегущих волн

1. Пусть выполнено условие симметричности $h = 0$. Линеаризуем краевую задачу (1), (2) на бегущей волне $u_k(t, x)$. Для этого подставим $u = u_k(t, x)(1 + v(t, x))$ и в полученной краевой задаче отбросим все слагаемые порядка выше первого:

$$\begin{aligned} \dot{v} = & -i\omega_k v + 2(-1 + ib)\rho_k^2 \operatorname{Re} v + (1 + (-1 + ib)\rho_k^2)v + \\ & + \gamma(1 + i\alpha) \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(s) \exp(iks) v(t, x + s) ds - v \right). \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение этой линейной системы имеет вид :

$$\begin{aligned} \lambda_m^2 + \lambda_m [2\rho_k^2 - \gamma(\Delta_{km} - i\omega_k S_{km})] + \frac{\gamma}{4} [(\Delta_{km} - i\alpha S_{km})^2 + (\alpha\Delta_{km} + iS_{km})^2] - \\ - \gamma\rho_k^2 [(1 - \alpha b)\Delta_{km} - iS_{km}(\alpha + b)] = 0, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{km} &= A_{k+m} + A_{k-m} - 2A_k, & A_n &= \exp(-\mu^2 n^2). \\ S_{km} &= A_{k-m} - A_{k+m}, \end{aligned}$$

1.1. Пусть выполнено условие

$$\mu \gg 1. \quad (5)$$

Утверждение 1. *Существует такое $\mu_0 > 0$, что при всех $\mu \geq \mu_0$ все бегущие волны с номерами $k \neq 0$, если они существуют, неустойчивы, а бегущая волна $u_0(t, x)$ орбитально устойчива (неустойчива), если*

$$\gamma(1 + \alpha^2) + 2(1 - \alpha b) > 0 \quad (< 0).$$

1.2. Пусть параметр $\mu > 0$ фиксирован, а значение γ достаточно велико:

$$\gamma \gg 1.$$

Утверждение 2. *Существует такое $\gamma_0 > 0$, что при всех $\gamma \geq \gamma_0$ существует единственная бегущая волна с номером $k = 0$. Эта волна орбитально устойчива (неустойчива), если*

$$1 - \alpha b > 0 \quad (< 0).$$

1.3. Пусть параметр μ является малым:

$$0 < \mu \ll 1.$$

Утверждение 3. Пусть

$$1 - \alpha b < 0. \quad (6)$$

Тогда найдется такое $\mu_0 > 0$, что при всех $0 < \mu < \mu_0$ все бегущие волны неустойчивы.

Пусть выполнено

$$1 - \alpha b > 0. \quad (7)$$

Тогда при $\mu \rightarrow 0$ количество устойчивых бегущих волн неограниченно возрастает. Для того, чтобы более точно и полно сформулировать соответствующий результат, введем несколько обозначений. Фиксируем произвольное вещественное $z \in (-\infty, \infty)$ и через $\Theta = \Theta(\mu) \in [0, 1)$ обозначим такую величину, что $z\mu^{-1} + \Theta$ является целым. Рассмотрим бегущие волны с асимптотически большими при $\mu \rightarrow 0$ номерами волн $k = z\mu^{-1} + \Theta$:

$$u(t, x, z) = \rho(z) \exp[i\omega(z) + i(z\mu^{-1} + \Theta)x],$$

где

$$\rho^2(z) = 1 + \gamma[\exp(-z^2 - 2z\Theta\mu - \mu^2\Theta^2) - 1],$$

$$\omega(z) = b\rho^2(z) + \gamma\alpha[\exp(-z^2 - 2z\Theta\mu - \mu^2\Theta^2) - 1].$$

Выражение для $\rho^2(z)$ определено при тех z (и достаточно малых μ), для которых

$$1 + \gamma[\exp(-z^2) - 1] > 0.$$

При условии $\gamma < 1$ это неравенство справедливо для всех z , а при $\gamma > 1$ оно имеет место только при $z \in (0, z_0)$, где

$$z_0^2 = \ln \frac{\gamma}{\gamma - 1}.$$

Ниже удобно считать, что при $\gamma < 1$ имеем $z_0^2 = \infty$.

Утверждение 4. Фиксируем произвольно $z \in (-\infty, \infty)$, и пусть $z^2 < \min\left(\frac{1}{2}, z_0^2\right)$ ($\frac{1}{2} < z^2 < z_0^2$). Тогда найдутся такие $\gamma_0 > 0$ и $\mu_0 > 0$, что при всех $\gamma \in (0, \gamma_0)$ и $\mu \in (0, \mu_0)$ решение $u(t, x, z)$ асимптотически орбитально устойчиво (неустойчиво).

1.4. Предположим теперь, что параметр γ является достаточно малым:

$$0 < \gamma \ll 1.$$

В этом случае существует бесконечно много бегущих волн с номерами $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Положим $\Delta_k = \max_{m \neq 0} \operatorname{Re} \Delta_{km}$.

Утверждение 5. Пусть выполнено условие (6). Тогда существует такое $\gamma_0 > 0$, что при всех $0 < \gamma < \gamma_0$ все бегущие волны неустойчивы.

Если же $1 - \alpha b > 0$, то при всех достаточно малых γ бегущая волна $u_k(t, x)$ устойчива (неустойчива), если $\Delta_k > 0$ (< 0).

2. В случае

$$0 < \gamma \ll 1, \quad h = 0, \quad 1 - \alpha b > 0$$

построим уравнения, с помощью которых в главном описывается поведение решений (1), (2) в окрестности $u_k(t, x)$. Для этого представим решения (из окрестности $u_k(t, x)$) в форме

$$u(t, x) = \rho_k \exp[i\omega_k t + ikx + i\varphi_k(\tau, x)](1 + \gamma V(t, \tau, x) + \dots),$$

где $\tau = \gamma t$ – медленное время, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а функция $\varphi_k(\tau, x) - 2\pi$ -периодична по x . Для определения $\varphi_k(\tau, x)$ тогда приходим к уравнению

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial \tau} = \Omega + g \int_{-\infty}^{\infty} F(s) [\sin(ks + \varphi_k(\tau, x + s) - \varphi_k(\tau, x) + q)] ds, \quad (8)$$

в котором

$$\Omega = -g \sin q, \quad g = [(1 + \alpha^2(1 + b^2))^{1/2}], \quad q = \arctg \alpha - \arctg b.$$

Отметим, что решению $u_k(t, x)$ уравнения (1) отвечает постоянное решение (8) той же устойчивости.

В [4] на основе численного анализа показано, что динамика (8) при $\alpha b > 1$ может быть достаточно сложной. Из утверждения 5 вытекает, что при условии (6) все простейшие решения – бегущие волны – неустойчивы. Отметим еще, что эта неустойчивость при малых μ – „взрывная“, т.е. асимптотически много корней соответствующих характеристических уравнений находятся в правой комплексной полуплоскости.

При достаточно малых значениях параметра μ (в [4] приведено характерное значение $\mu \approx \frac{1}{4}$) уравнение (8) можно упростить. Заметим, что для произвольной фиксированной дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(s)$ выполнено соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(s) f(s) ds = f(0) + \mu^2 f''(0) + o(\mu^2).$$

Положим $\varphi_k(r, x) = -(\alpha + b)^{-1}(1 - \alpha b) \ln y_k(r, x)$, где $r = \mu^2 \tau$. Тогда из (8) получаем (с точностью до $o(1)$ при $\mu \rightarrow 0$) линейную краевую задачу

$$\frac{\partial y_k}{\partial r} = (1 - \alpha b) \frac{\partial^2 y_k}{\partial x^2} - 2(\alpha + b)k \frac{\partial y_k}{\partial x} + k^2(1 - \alpha b)^{-1}(\alpha + b)y_k, \quad (9)$$

$$y_k(r, x + 2\pi) \equiv y_k(r, x). \quad (10)$$

Условие (7) говорит о том, что эта краевая задача является параболической. При некоторых условиях невырожденности каждое решение (9), (10) при больших временах r близко к функции вида $\text{const} \cdot \exp(k^2(1 - \alpha)^{-1}(\alpha + b)^2 r)$, поэтому главная часть $\varphi_k(\tau, x)$ близка к $-\mu^2 k^2(\alpha + b)$. Тем самым решения из малой окрестности $u_k(t, x)$ при $t \rightarrow \infty$ стремятся к $u_k(t + \text{const}, x)$. Отметим еще, что при условии (6) имеет место „взрывная“ неустойчивость решения $u_k(t, x)$.

Важно подчеркнуть, что переход к краевой задаче (9), (10) справедлив при малых μ для каждого номера k , но является неравномерным. Покажем это. Пусть $z \neq 0$ произвольно фиксировано, и положим в (8) $k = (\mu^{-1}z + \Theta) + m$, ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Тогда получаем, что роль краевой задачи (9), (10) играет краевая задача

$$\frac{\partial y_m}{\partial r} = (1 - 2z^2) \exp(-z^2) \left[(1 - \alpha b) \frac{\partial^2 y_m}{\partial x^2} - 2(\alpha + b)m \frac{\partial y_m}{\partial x} + m^2(1 - \alpha b)^{-1}(\alpha + b)y_m \right], \quad y_m(r, x + 2\pi) \equiv y_m(r, x).$$

Отсюда вытекает, что для бегущих волн с указанными номерами k при $z^2 < \frac{1}{2}$ имеет место устойчивость, а при $z^2 > \frac{1}{2}$ — неустойчивость.

3. По-видимому, представляет интерес рассмотрение несимметричной функции $F(s)$:

$$F(s) = \frac{1}{2\mu\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(s+h)^2}{4\mu^2}\right), \quad h \neq 0. \quad (11)$$

Для того, чтобы проиллюстрировать новые моменты, которые возникают из-за отклонения h , остановимся кратко на „предельном“ случае при $\mu \rightarrow 0$. Рассмотрим уравнение

$$\dot{u} = [1 + (-1 + ib)|u|^2]u + \gamma(1 + i\alpha)[u(t, x - h) - u(t, x)]. \quad (12)$$

Это уравнение имеет счетное множество бегущих волн $u_k(t, x) = \rho_k \exp(i\omega_k t + ikx)$, где

$$\rho_k^2 = 1 + \gamma(\cos kh + \alpha \sin kh - 1), \\ \omega_k = b + \gamma[(b + \alpha) \cos kh + (\alpha b - 1) \sin kh - (b + \alpha)].$$

Для исследования устойчивости $u_k(t, x)$ линеаризуем (12) на этом решении и перейдем к рассмотрению соответствующего характеристического уравнения. Как оказывается, знак вещественных частей всех корней этого уравнения определяется (при малых γ и с точностью до $O(\gamma^2)$) знаком выражений $\text{Re } \Delta$, где

$$\Delta = \gamma \rho_k^2 ((-1 + ib)(1 - i\alpha)e^{ikh} + (-1 - ib)(1 + i\alpha)e^{-ikh})[e^{-ihm} - 1] = (1 - e^{-ihm})R(z).$$

Здесь $z = hk$, $R(z) = (1 - \alpha b) \cos z + (b + \alpha) \sin z$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. При малых значениях отклонения h , а, по-видимому, этот случай наиболее интересен, вся числовая ось разбивается на зоны, в зависимости от знака функции $R(z)$. В зонах, где $R(z) < 0$ бегущие волны с номерами $k = z\mu^{-1} + \Theta$ неустойчивы, а там, где $R(z) > 0$ — устойчивы. Правда, в последнем случае могут возникнуть дополнительные сложности из-за необходимости анализировать поведение корней характеристического уравнения при тех номерах m , для которых $1 - \cos hm = 0$.

§2. Динамика уравнения Курамото с большим коэффициентом пространственно-распределенного управления. Медленно осциллирующие структуры

Здесь и ниже предполагаем, что имеет место формула (11) и коэффициент γ является достаточно большим, а значение μ — малым. Обозначим

$$\gamma(1 + i\alpha) = \varepsilon^{-1} e^{i\varphi}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}. \quad (13)$$

Параметры ε и μ естественно считать однопорядковыми, т.е. для некоторого фиксированного $c > 0$ имеем

$$\mu = c\varepsilon. \quad (14)$$

Удобно в (1) домножить левую и правую часть на ε и произвести замену времени

$$t = \varepsilon\tau.$$

В результате получим краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \varepsilon[A - B|u|^2]u + e^{i\varphi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(s)u(\tau, x+s)ds - u \right], \\ u(\tau, x+2\pi) &\equiv u(\tau, x). \end{aligned} \quad (15)$$

Характеристическое уравнение для соответствующей линейной части (15) имеет вид

$$\lambda_m = \varepsilon a - e^{i\varphi} [\exp[-ihm - \kappa \varepsilon m^2] - 1] \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (16)$$

При условиях $h \neq 0$, $\varphi \neq 0$ и при условиях общности положения для достаточно малых ε уравнение (16) имеет асимптотически большое количество корней, вещественные части которых положительны и отделены от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тем самым в ограниченной области фазового пространства $C_{[0,2\pi]}$ краевая задача (15) не может иметь устойчивых установившихся режимов. В связи с этим ниже предполагаем, что для некоторых фиксированных h_1 и φ_1 имеем

$$h = \varepsilon^{1/2}h_1, \quad \varphi = \varepsilon^{1/2}\varphi_1. \quad (17)$$

При условиях (17) уравнение (16) имеет совокупность корней $\lambda_m = \lambda_m(\varepsilon)$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), для каждого из которых справедлива асимптотика

$$\lambda_m = i\varepsilon^{1/2}h_1m + \varepsilon[a + i\varphi_1h_1m - (\kappa + h_1^2/2)m^2] + O(\varepsilon^{3/2}).$$

Тем самым вещественные части бесконечно многих корней характеристического уравнения стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это означает, что в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия в (15) реализуется критический случай бесконечной размерности. Методика исследования для таких случаев разработана в [9]. Применим её для изучения уравнения (15). Согласно этой методике, введем в рассмотрение формальный ряд

$$u = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi_m(t) \exp[imy] + \varepsilon u_1(t, y) + \dots, \quad (18)$$

где $t = \varepsilon\tau$, $y = x + (\varepsilon^{1/2}h_1 + \varepsilon\varphi_1h_1)t$. Подставляя (18) в (15) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения величины $\xi_m(t)$. Как оказывается, эту систему можно записать в виде одного комплексного параболического уравнения типа Гинзбурга – Ландау относительно $\xi(t, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi_m(t) \exp(imy)$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = (\kappa + h_1^2/2) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + [a - b|\xi|^2]\xi \quad (19)$$

с периодическими краевыми условиями

$$\xi(t, y + 2\pi) \equiv \xi(t, y). \quad (20)$$

Теорема 1. Пусть $\xi_0(t, y)$ — ограниченное при $t \geq t_0$, $y \in [0, 2\pi]$ решение краевой задачи (19), (20). Тогда краевая задача (15) имеет асимптотическое по невязке решение

$$u_0(\tau, x, \varepsilon) = \xi_0(t, x + (\varepsilon^{1/2}h_1 + \varepsilon\varphi_1h_1)t) + O(\varepsilon^{1/2}).$$

Теорема 2. Пусть $\xi_0(t, y)$ периодическое решение (19), (20), и только два его множителя равны 1. Тогда при всех достаточно малых ε краевая задача (15) имеет периодическое решение $u_0(\tau, x, \varepsilon)$ той же, что и $\xi_0(t, y)$, устойчивости и

$$u_0(\tau, x, \varepsilon) = \xi_0((1 + O(\varepsilon^{1/2}))t, x + (\varepsilon^{1/2}h_1 + \varepsilon\varphi_1h_1 + O(\varepsilon^{3/2}))t) + O(\varepsilon^{1/2}).$$

Заметим, что результаты остаются справедливыми и при $h_1 = 0$. Важно отметить, что в случае $h_1 = 0$ параметр φ может принимать любые значения.

§3. Быстро осциллирующие структуры

В этом разделе будет показано, что уменьшение коэффициентов диффузии может приводить к появлению семейств быстро осциллирующих по пространственной переменной структур. Эти структуры условно можно разбить на два типа. Первый из них появляется при пропорциональном уменьшении коэффициентов c, h_1^2 , играющих роль диффузии. Образование структур происходит в окрестностях асимптотически больших мод. Однако произведение коэффициентов диффузии на величину (асимптотически большую) соответствующих мод является асимптотически малой величиной. Или, другими словами, квадраты соответствующих мод по порядку совпадают с величиной, обратной отклонению пространственной переменной. Второй тип структур возникает при уменьшении только диффузионного коэффициента c . Здесь тоже быстро осциллирующие структуры формируются за счет взаимодействия большого числа далеко расположенных друг от друга мод. Главное отличие от структур первого типа состоит в том, что здесь не квадраты значений мод, а сами значения этих мод по порядку совпадают с величиной, обратной отклонению пространственной переменной. Рассмотрим эти два случая отдельно.

3.1. Структуры первого типа. Положим

$$c = \varepsilon c_1, \quad h_1 = \varepsilon^{1/2}h_2. \quad (21)$$

Фиксируем произвольно вещественное z , а через $\Theta = \Theta(\varepsilon, z)$ обозначим величину из полуинтервала $(0, 1]$, дополняющую выражение $z\varepsilon^{-1/2}$ до целого. Рассмотрим множество целых чисел вида $(z\varepsilon^{-1/2} + \Theta)t + n$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Для этих чисел характеристическое уравнение (16) имеет совокупность корней

$$\lambda_{m,n} = i\varepsilon^{1/2}h_2z + \varepsilon \left[a + h_2(\Theta m + n)i + i\varphi_1h_2zm - (\kappa_1 + d_1 + \frac{1}{2}h_2^2)z^2m^2 \right] + O(\varepsilon^{3/2}).$$

Роль краевой задачи (19), (20) в рассматриваемом случае играет зависящее от параметра z семейство краевых задач

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = z^2 \left(\kappa_1 + \frac{1}{2} h_2^2 \right) \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} + (A - B|\xi|^2) \xi + i h_2 \frac{\partial \xi}{\partial w}, \quad (22)$$

$$\xi(t, v + 2\pi, w) \equiv \xi(t, v, w + 2\pi) \equiv \xi(t, v, w). \quad (23)$$

Связь между решениями (22), (23) и (15) устанавливает формула

$$u(\tau, x, \varepsilon) = \xi \left(t, (z\varepsilon^{-1/2} + \Theta)x + (\varepsilon^{1/2} h_2 z + \varepsilon h_2 \Theta + \varepsilon \varphi_1 h_2 z) t, x \right) + O(\varepsilon^{1/2}).$$

Теорема 3. Пусть при некотором $z = z_0$ краевая задача (22), (23) имеет ограниченное при $t \geq t_0$, $v, w \in [0, 2\pi]$ решение $\xi_0(t, v, w)$. Тогда краевая задача (15) имеет асимптотическое по невязке решение

$$u_0(\tau, x) = \xi_0 \left(t, (z_0 \varepsilon^{-1/2} + \Theta)x + (\varepsilon^{1/2} h_2 z_0 + \varepsilon h_2 \Theta + \varepsilon \varphi_1 h_2 z_0 + O(\varepsilon^{3/2})) t, x \right) + O(\varepsilon^{1/2}).$$

3.2. Структуры второго типа. Пусть, в отличие от (21), только коэффициент c предполагается асимптотически малым:

$$c = \varepsilon c_1.$$

Рассмотрим множество целых чисел $(2\pi h_1^{-1} \varepsilon^{-1/2} + \Theta)m + n$ (здесь $\Theta \in [0, 1]$ такое, что выражение в скобках целое: $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Характеристическое уравнение (16) имеет совокупность корней, вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\lambda_{m,n} = i h_1 (\Theta m + n) (\varepsilon^{1/2} + \varepsilon \varphi_1) + \varepsilon \left[a - \frac{4\pi^2}{h_1^2} (\kappa_1 + d_1) m^2 - \frac{1}{2} h_1^2 (\Theta m + n)^2 \right] + O(\varepsilon^{3/2}).$$

Отсюда заключаем, что динамика (15) определяется краевой задачей

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = 4\pi^2 h_1^{-2} c_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} + \frac{h_1^2}{2} \left(\Theta \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial w} \right)^2 \xi + (A - B|\xi|^2) \xi, \quad (24)$$

$$\xi(t, v + 2\pi, w) \equiv \xi(t, v, w + 2\pi) \equiv \xi(t, v, w). \quad (25)$$

Теорема 4. Пусть при некотором $\Theta = \Theta_0$ краевая задача (24), (25) имеет ограниченное при $t \geq t_0$, $v, w \in [0, 2\pi]$ решение $\xi_0(t, v, w)$. Тогда краевая задача (15) имеет асимптотическое по невязке решение

$$u_0(\tau, x) = \xi_0 \left(t, (2\pi h_1^{-1} \varepsilon_k^{-1/2} + \Theta_0)x + h_1 \Theta_0 (\varepsilon_k^{1/2} + \varepsilon_k \varphi_1) t, x + h_1 (\varepsilon_k^{1/2} + \varepsilon_k \varphi_1) t \right) + O(\varepsilon_k^{1/2}),$$

где последовательность $\varepsilon_k \rightarrow 0$ определяется из уравнения $\Theta(\varepsilon) = \Theta_0$.

§4. Случай существенно несимметричной $F(x)$

Здесь предполагаем, что параметр h не является малым, а близок к некоторому рационально соизмеримому с π числу. Это означает, что для некоторых целых, взаимно простых m_1 и m_2 имеем

$$h = \frac{\pi m_1}{m_2} - \varepsilon^{1/2} h_1. \quad (26)$$

В характеристическом уравнении (16) положим $m = Nn$, где $N = m_2$, если m_1 четно, и $N = 2m_2$, если m_1 нечетно, а $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Повторяя построения §2, получаем аналогичную (19), (20) краевую задачу

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = N^2 \left(c + \frac{1}{2} h_1^2 \right) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + [A - B|\xi|^2] \xi, \quad (27)$$

$$\xi(t, y + 2\pi) \equiv \xi(t, y), \quad (28)$$

а связь между решениями (15) и (27), (28) устанавливает формула

$$u(\tau, x, \varepsilon) = \xi(t, N(x - (\varepsilon^{1/2} h_1 + \varepsilon \varphi_1 h_1)t)) + O(\varepsilon^{1/2}). \quad (29)$$

Соответственно в случае (21) приходим к краевой задаче

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = z^2 N^2 \left(c_1 + \frac{1}{2} h_1^2 \right) \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} + [A - B|\xi|^2] \xi + i h_2 N \frac{\partial \xi}{\partial w},$$

$$\xi(t, v + 2\pi, w) \equiv \xi(t, v, w + 2\pi) \equiv \xi(t, v, w),$$

а аналогом соотношения (29) служит формула

$$u(\tau, x, \varepsilon) = \xi(t, N(z\varepsilon^{-1/2} + \Theta)x + N(\varepsilon^{1/2} h_2 z + \varepsilon h_2 \Theta + \varepsilon \varphi_1 h_2 z)t, Nx) + O(\varepsilon^{1/2}).$$

Более интересна ситуация, когда выполнено только условие $c = \varepsilon c_1$. Обозначим через $\Theta = \Theta(\varepsilon) \in (0, N]$ такую величину, которая дополняет выражение $\pi m_1 (m_2 h_1 \varepsilon^{1/2})^{-1}$ до целого кратного N . Рассмотрим совокупность целых чисел $M = \{(\pi m_1 (m_2 h_1 \varepsilon^{1/2})^{-1} + \Theta)p\}$, $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Тогда вещественные части корней $\lambda_{m,n}$ с номерами m из M и $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\lambda_{m,n} = i h_1 (\Theta p + n) (\varepsilon^{1/2} + \varepsilon \varphi_1) + \varepsilon \left[a - \frac{\pi^2 m_1^2}{m_2^2 h_1^2} (\kappa_1 + d_1) p^2 - \frac{1}{2} h_1^2 (\Theta p + n)^2 \right] + O(\varepsilon^{3/2}).$$

Аналогом (24), (25) здесь является краевая задача

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \left[\frac{\pi^2 m_1^2}{m_2^2 h_1^2} c_1 \right] \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} + \frac{1}{2} h_1^2 \left(\Theta \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial w} \right)^2 \xi + [A - B|\xi|^2] \xi,$$

$$\xi(t, v + 2\pi, w) \equiv \xi(t, v, w + 2\pi) \equiv \xi(t, v, w).$$

Здесь $u(\tau, x, \varepsilon) = \xi(t, (\pi m_1 (m_2 h_1 \varepsilon^{1/2})^{-1} + \Theta)x + h_1 \Theta (\varepsilon^{1/2} + \varepsilon \varphi_1)t, x + h_1 (\varepsilon^{1/2} + \varepsilon \varphi_1)t) + O(\varepsilon^{1/2})$.

Конечно, и в рассматриваемых ситуациях имеют место результаты о связи решений построенных краевых задач и асимптотических по невязке решений краевой задачи (15).

Выводы

Исследован вопрос об устойчивости бегущих волн в уравнении Курамото с малым коэффициентом пространственно-распределенного управления. Показано, например, что неустойчивость носит, как правило, „взрывной“ характер. Особый интерес представляют результаты об устойчивости бегущих волн с асимптотически большими модами.

Рассмотрена динамика уравнения Курамото с большим коэффициентом пространственно-распределенного управления. Для нахождения главных частей асимптотических представлений решений исходной краевой задачи построены специальные нелинейные семейства эволюционных, как правило, параболических уравнений (не содержащих малые и большие параметры). Известно, что уравнения такого типа обладают богатой и сложной динамикой (см., например, [10]). Присутствие континуального параметра z в таких семействах позволяет сделать вывод о мультистабильности как о характерном явлении в системах уравнении Курамото при большом коэффициенте пространственно распределенного управления. Присутствие в построенных уравнениях параметра Θ говорит о возможности реализации бесконечного процесса прямых и обратных бифуркаций при увеличении параметра K (уменьшении параметра ε).

Построение главных членов асимптотических разложений решений (1) открывает путь к нахождению решений с любой наперед заданной степенью точности по параметру ε . В ряде случаев, на основе разработанных в [11] оценок норм некоторых линейных операторов, удастся обосновать существование точных решений (с построенной асимптотикой) и ответить на вопрос об их устойчивости.

Полученные результаты допускают распространение и на другие более общие системы уравнений. Интересны, например, новые явления, возникающие в случае двумерной области изменения пространственной переменной (см., [12]). Отметим еще, что для уравнений с запаздыванием получаем эволюционные уравнения с отклонением пространственной переменной, т.е. запаздывание по времени переходит в отклонение по пространственной переменной.

Список литературы

1. *Haken H.* Synergetics; An Introduction, 3rd Revised and Enlarged Edition. Springer. 1983.
2. *Haken H.* Brain Dynamics; Synchronization and Activity Patterns in Pulse-Coupled Neural Nets with Delays and Noise. Springer. 2002.
3. *Kuramoto Y.* Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. Springer. 1984.
4. *Kuramoto Y., Battogtokh D.* Coexisting of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2002. V. 5, №. 4. P. 380–385.

5. *Grigorieva E.V., Haken H., Kaschenko S.A. et al.* Travelling wave dynamics in a nonlinear interferometer with spatial field transformer in feedback // *Physica D.* V. 125/1-2. 1999. P. 123–141.
6. *Кащенко И.С., Кащенко С.А.* Быстро осциллирующие пространственно-неоднородные структуры в когерентных нелинейно-оптических системах // *ДАН.* 2010. Т. 435. № 1. С. 14–17.
7. *Кащенко С.А.* Асимптотика пространственно-неоднородных структур в когерентных нелинейно-оптических системах // *Журнал вычисл. матем. и матем. физ.* 1990. Т.29, 2. С. 467–473.
8. *Kaschenko S.A.* Normalization in the systems with small diffusion // *Int. J. of Bifurcations and chaos.* 1996. V. 6, №. 7. P. 1093–1109.
9. *Кащенко И.С., Кащенко С.А.* Динамика уравнения с большим пространственно-распределенным управлением // *Доклады Академии Наук.* 2011. Т. 438, № 1. С. 30–34.
10. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука, 1992.
11. *Кащенко С.А.* Исследование устойчивости решений линейных параболических уравнений с близкими к постоянным коэффициентами и малой диффузией // *Тр. семинара им. И. Г. Петровского.* 1991. Вып. 15.
12. *Кащенко С.А.* Пространственные особенности высокомодовых бифуркаций двухкомпонентных систем с малой диффузией // *Дифференциальные уравнения.* 1989. Т. 25. № 2. С. 262–270.

The Dynamics of Kuramoto Equation with Spatially-Distributed Control

Kashchenko I. S., Kashchenko S. A.

Keywords: spatially-distributed control, travelling wave, quasinormal form

We study dynamical properties of a complex equation with spatially-distributed parameters. Families of special parabolic equations that define the behavior of initial problem solutions were built.

Сведения об авторах:

Кащенко Илья Сергеевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
канд.-физ. мат. наук, доцент;
Кащенко Сергей Александрович,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
д-р физ.-мат. наук, профессор;
заведующий кафедрой математического моделирования