Модел. и анализ информ. систем. Т. **16**, № **3** (2009) 5–13

УДК 517.9

Работы Ю.С. Колесова по дифференциальным уравнениям

Бурд В.Ш.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: burd1@gmail.com

получена 22 июля 2009

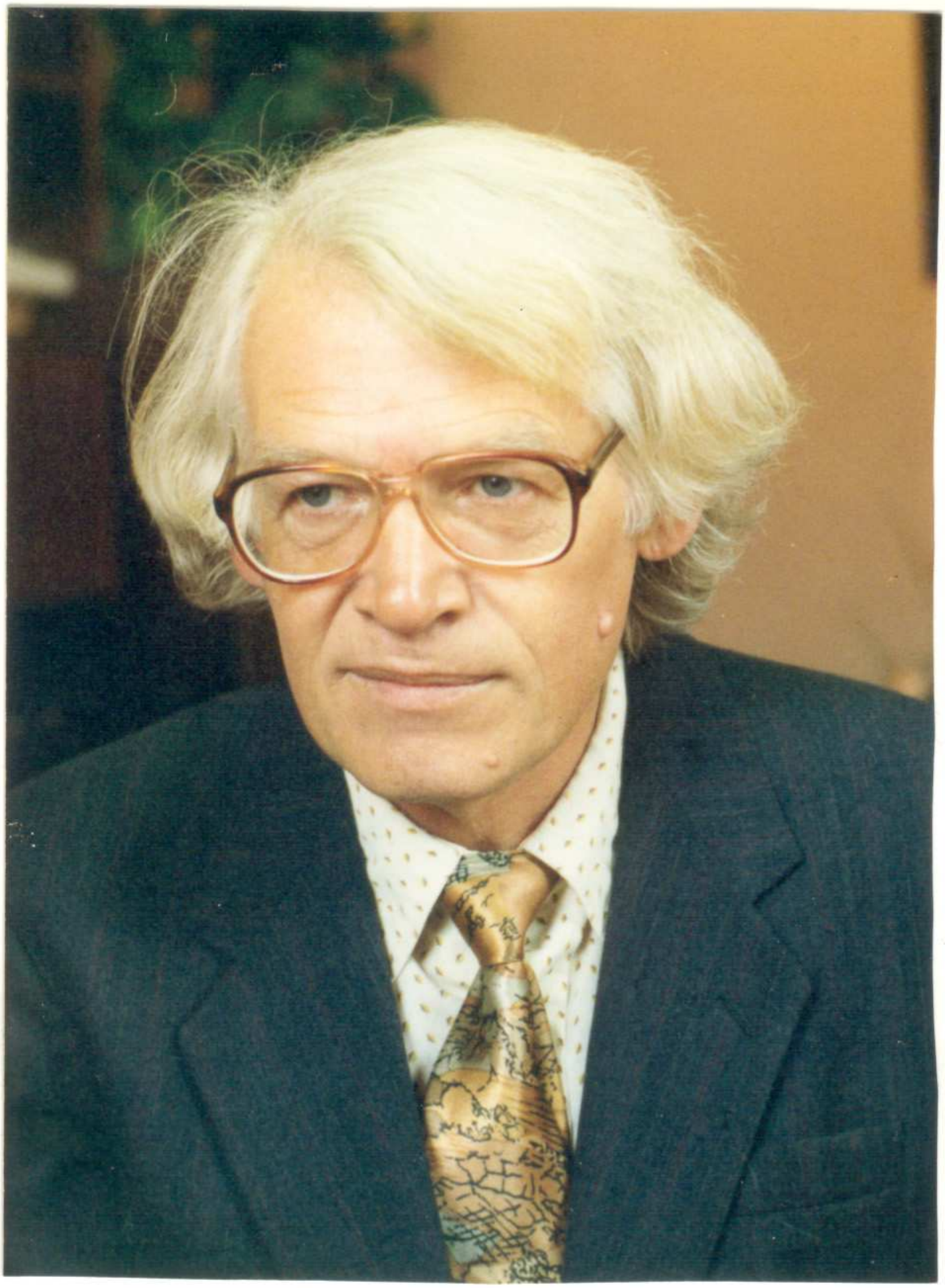
Ключевые слова: устойчивость, производная Фреше, спектр, диффузия, бифуркация

Описываются наиболее интересные, по мнению автора, результаты Ю.С. Колесова, посвященные дифференциальным уравнениям (обыкновенным, функционально-дифференциальным, с частными производными) и их приложениям к математической экологии, радиофизике, автоматическому регулированию, механике.

Творческая деятельность Ю.С. Колесова посвящена дифференциальным уравнениям (обыкновенным, функционально-дифференциальным, с частными производными) и их приложениям к математической экологии, радиофизике, автоматическому регулированию, механике. Общая объединяющая идея всех его исследований – развитие методов нелинейной теории колебаний, т.е. методов исследования колебательных режимов в различных системах. Ю.С. Колесов является автором или соавтором восьми книг, три из которых переведены на английский язык и изданы в США. Кроме того, он написал значительное число больших статей. Поэтому я не буду писать о всех аспектах творчества Колесова, а остановлюсь только на нескольких результатах, полученных им, и на статьях, оказавших влияние на некоторые исследования в области теории колебаний.

Начало творческой деятельности Ю.С. Колесова (1962 – 1966 гг.) посвящено применению теории полуупорядоченных пространств (теории конусов М.Г. Крейна) к исследованию вопросов существования и устойчивости периодических решений в системах обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнениях с частными производными параболического типа (см., например, [1, 2]).

Во втором цикле исследований (1967 – 1970 гг.) развивается метод интегральных уравнений для изучения почти периодических решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Конструируются и исследуются функции Грина для дифференциальных операторов с почти периодическими коэффициентами. Описываются классы операторов со знакопостоянной функцией Грина. Доказываются нелокальные теоремы существования почти периодических решений



Колесов Юрий Серафимович
02.01.1939 — 17.05.2009

нелинейных дифференциальных уравнений, даются оценки их числа, развиваются методы исследования их устойчивости, анализируется процесс рождения почти периодических решений из состояния равновесия при изменении параметров системы. Указываются приложения к системам автоматического регулирования, колебаниям различных маятников.

Результаты этих исследований были подытожены в монографии [3]. Перевод на английский язык этой книги был издан в США в 1973 году [21]. Остановимся подробнее на двух работах Ю.С. Колесова. В этих работах прослеживается стиль подхода автора к уравнениям с частными производными – сочетание абстрактных методов и изучение конкретных свойств уравнений. Под абстрактными методами подразумевается использование методов функционального анализа для исследования свойств соответствующих операторов, действующих в подходящих банаховых пространствах.

Работа [4] начинается с изучения вполне непрерывного оператора A, действующего в вещественном банаховом пространстве E. Предполагается, что $A\theta = \theta$ (θ – нулевой элемент банахова пространства) и у производной Фреше B оператора A число 1 является простым собственным значением. Остальной спектр оператора B лежит внутри единичного круга. Далее, предполагается, что оператор A представим в виде

$$A = B + C,$$

где оператор C удовлетворяет условию

$$||Cu_1 - Cu_2|| \leq q(r)||u_1 - u_2||, \quad (||u_1||, ||u_2|| \leq r)$$

и

$$\lim_{r \to 0} q(r) = 0.$$

Рассмотрим вполне непрерывное векторное поле

$$\Psi u = u - Au. \tag{1}$$

Точка u называется неподвижной точкой векторного поля, если $\Psi u = u$. Очевидно, θ – неподвижная точка векторного поля (1). Точка θ называется устойчивой, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из неравенства $||u|| \leq \delta$ вытекает неравенство $||A^n u|| \leq \varepsilon$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Точка θ называется асимптотически устойчивой, если она устойчива и

$$\lim_{n \to \infty} ||A^n u|| = 0.$$

Теперь можно сформулировать теорему, доказанную Ю.С. Колесовым, которая стала классической.

Теорема 1. *Точка θ асимптотически устойчива в том и только том случае, если она является изолированной неподвижной точкой векторного поля (1) и если ее топологический индекс равен 1.*

На эту теорему ссылаются во многих работах. Приведем только одну ссылку [6]. Отметим еще, что при доказательстве теоремы 1 существенно используются свойства полуупорядоченности соответствующего банахова пространства. В работе [4] теорема 1 применяется для исследования устойчивости нулевого решения квазилинейного параболического уравнения.

В работе [5] рассматриваются параболические уравнения с гистерезисными нелинейностями. Устанавливаются теоремы существования и устойчивости периодических режимов с двумя переключениями. Доказательство соответствующих теорем потребовало преодоления больших трудностей. Задействован большой арсенал технических средств: аналитические полугруппы и дробные степени операторов, сильный принцип максимума Ниренберга, оценки Жиро – Олейник и многое другое. Решены также некоторые специальные задачи линейной алгебры, относящиеся к теории матриц с неотрицательными элементами. Работа представляет собой образец математического исследования, имеющего широкие приложения к физическим и техническим задачам.

С 1970 года Ю.С. Колесов начал исследование задач теории функционально-дифференциальных уравнений. Первые работы в этом направлении [7, 8, 10] относятся к теории функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа с почти периодическими коэффициентами и бифуркации автоколебаний (бифуркации Андронова – Хопфа) в автономных уравнениях с запаздыванием. Сначала остановимся на работе [8] об автоколебаниях. Явление бифуркации Андронова – Хопфа хорошо изучено для обыкновенных дифференциальных уравнений. Для автономного уравнения второго порядка, коэффициенты которого зависят от параметра, Андронов в 30-х годах исследовал ситуацию, когда при изменении параметра устойчивое состояние равновесия становится неустойчивым и рождается устойчивый предельный цикл. Соответствующие результаты для систем обыкновенных дифференциальных уравнений были получены Хопфом в 1942 году. В 60-е годы усилился интерес к задачам такого типа. В работе Колесова рассматривается дифференциальное уравнение n-го порядка с последействием, зависящее от числового параметра ε и векторного параметра μ. Предполагается, что спектр линеаризованной задачи имеет простые корни

$$\lambda(\varepsilon) = \tau(\varepsilon) + \sigma(\varepsilon), \quad \overline{\lambda}(\varepsilon) = \tau(\varepsilon) - \sigma(\varepsilon)$$

и

$$\sigma(0) > 0, \quad \tau(0) = 0, \quad \frac{d\tau(\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \neq 0.$$

Остальной спектр лежит внутри левой полуплоскости комплексной плоскости. Ставится задача исследования поведения решений соответствующего уравнения с последействием с начальными условиями из некоторого фиксированного шара при неограниченном возрастании времени и изменении параметров системы. Поставленная задача решена с исчерпывающей полнотой. Приведены полные доказательства теорем существования и единственности периодических решений, алгоритм вычисления периодических решений. Позже результаты из [8] были распространены на уравнения с запаздыванием, зависящим от искомой функции, и уравнения нейтрального типа. В этой работе участвовали Д.И. Швитра и А.Н. Куликов – ученики Ю.С. Колесова. Монография Ю.С. Колесова и Д.И. Швитры [11] суммирует полученные результаты, а также описывает приложения теоретических построений к задачам радиофизики, процессу горения в камере жидкостного ракетного двигателя, задачам математической экологии.

Перейдем к работам [7],[9]. Эти работы выполнены Колесовым совместно с его учеником В. В. Майоровым.

И.З. Штокало, используя идеи Н.Н. Боголюбова, разработал алгоритм исследования устойчивости решений систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами, близкими к постоянным. Этот эффективный алгоритм обладает одним недостатком. Предварительно необходимо постоянную часть системы преобразовать к специальной форме, что затруднительно для систем большой размерности. Из-за этого обстоятельства алгоритм Штокало обобщается на системы с распределенными параметрами только при весьма ограничительных условиях.

Колесов и Майоров [9] разработали алгоритм исследования устойчивости систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами, близкими к постоянным, который свободен от недостатка алгоритма Штокало. В отличие от алгоритма Штокало строится не асимптотика решений системы, а асимптотика спектра системы. Это позволило построить [7] эффективный алгоритм исследования устойчивости для уравнений с последействием с почти периодическими коэффициентами, близкими к постоянным, и для некоторых классов параболических уравнений [10].

В середине 70-х годов Ю.С. Колесов стал интересоваться задачами математической экологии как естественной областью приложения теории дифференциальных уравнений с последействием.

В работе [12] предложен новый подход к составлению математических моделей экологии. В [13] этот подход был развит в двух направлениях. В полном объеме учитывается взаимодействие видов, входящих в экосистему, причем всем параметрам придается однозначный биологический смысл. Далее, предлагается общий подход к исследованию соответствующих систем с последействием. Метод состоит в развитии специального варианта метода нормальных форм, объединенного с методом интегральных многообразий. Оказалось, что приближенные уравнения, которые получаются даже в классической задаче хищник-жертва, обладают большим запасом динамических свойств. Поэтому исследование математических моделей экологии является трудной задачей. Ю.С. Колесов привлек своих учеников – С.А. Кащенко, Е.П. Кубышкина, В.В. Майорова, С.Д. Глызина, А.А. Захарова, А.Н. Спокойнова к исследованию математических моделей экологических систем.

Отметим, что научный энтузиазм Колесова, его умение четко поставить задачу помогли ему создать большую научную школу.

Я не буду описывать подробно исследования Ю.С. Колесова и его учеников, относящиеся к параболическим уравнениям с малой диффузией, явлению диффузионного хаоса, автоволновым процессам. Ряд работ выполнен им совместно с известными учеными А.Б. Васильевой, Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розовым.

Остановлюсь на работе [14]. В этой работе рассматривалась задача о бифуркации периодических автоколебаний системы Ван-дер-Поля с малой диффузией при граничных условиях Дирихле. Периодические решения краевой задачи ищутся в виде формального ряда по степеням малого параметра. Дается обоснование формализма и исследуется вопрос о количестве и устойчивости периодических решений. Используется следующая схема. Формальный ряд подставляется в уравнение. Чтобы уравнения для амплитуд первых гармоник разрешались, должны выполняться условия ортогональности. Тогда приходим к краевой задаче, которая в последующих публикациях была названа квазинормальной формой исходной краевой задачи. При некоторых дополнительных условиях оказывается, что стационарным решениям квазинормальной формы отвечают стационарные решения исходной задачи. Эта схема использовалась во многих публикациях для исследования стационарных режимов различных задач, описываемых уравнениями с частными производными.

В серии совместных работ Ю.С. Колесова с А.Ю. Колесовым, Е.Ф. Мищенко и Н.Х. Розовым по сингулярно возмущенным системам сыграл важную роль опыт Ю.С. Колесова в исследовании релейных систем. Доказанная в этих работах теорема о C^1-близости решений релаксационной и релейных систем позволила решить проблему единственности и устойчивости многомерного релаксационного цикла. Подробное изложение этих результатов содержится в монографии [15]. Существует английский перевод этой книги [22].

Многие работы Ю.С. Колесова посвящены исследованию колебательных процессов в уравнениях волнового типа в плоской области, сингулярно возмущенных волновых уравнений, системе телеграфных уравнений и релаксационным колебаниям в моделях экологии (см. [16]). В работе [17] рассматривалась система параболических уравнений типа реакция-диффузия. Численными методами было обнаружено существование достаточно большого числа устойчивых стационарных режимов. Это явление получило название явления буферности. Работа [17] инициировала большой поток работ А.Ю. Колесова, Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розова, посвященных объяснению природы буферности и обнаружению явления буферности в различных системах с распределенными параметрами.

Остановимся еще только на одной из последних работ Ю.С. Колесова, где решена задача, над которой он думал 30 лет. Эта задача относится к теории матриц с неотрицательными элементами. Первые результаты о структуре спектра матриц с неотрицательными элементами были получены Перроном и Фробениусом в начале 20-го века. Стохастической матрицей называется матрица с неотрицательными элементами, у которой сумма элементов каждой строки равна 1. Собственные значения стохастической матрицы лежат в круге $|\lambda| \leq 1$ комплексной λ-плоскости. А.Н. Колмогоров в связи с теорией цепей Маркова в 1938 году поставил задачу определения структуры области M_n, состоящей из точек единичного круга, являющихся собственными значениями какой-либо стохастической матрицы порядка n. Эта задача была полностью решена Ф.И. Карпелевичем. Оказалось, что граница области M_n состоит из конечного числа точек на окружности $|\lambda| = 1$ и определенных криволинейных дуг, соединяющих в круговом порядке эти точки. Ф.И. Карпелевич решил более общую задачу. Он описал область распределения собственных значений матриц с неотрицательными элементами и фиксированным максимумом модуля собственных значений. К этому кругу вопросов относится и следующая задача –

выяснить структуру характеристических многочленов матриц с неотрицательными элементами. Некоторые шаги в направлении решения этой задачи были сделаны в статьях [5] и [18] (см. также [19]). Полностью задача была решена в работе [20]. В [20] получены необходимые и достаточные условия (так называемые условия ослабленной положительности характеристического многочлена) того, что данный многочлен является характеристическим многочленом матрицы с неотрицательными элементами.

Некоторые работы Ю.С. Колесова не достаточно востребованы (например, [5]). Время этих работ еще придет.

Безусловно, вклад Юрия Серафимовича Колесова в теорию обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными, математическую экологию, теорию колебаний является существенным.

Список литературы

1. Колесов Ю.С., Красносельский М.А. Устойчивость по Ляпунову и уравнения с вогнутыми операторами // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145, N6. С. 1217 – 1220.

2. Колесов Ю.С. О некоторых признаках существования устойчивых периодических решений у квазилинейных параболических уравнений // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157, N6. С. 1288 – 1290.

3. Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С. Нелинейные почти периодические колебания. М.: Наука, 1970. 352 с.

4. Колесов Ю.С. Исследование устойчивости решений параболических уравнений второго порядка в критическом случае // Известия АН СССР. Серия математическая. 1969. Т. 33, N6. С. 1356 – 1372.

5. Колесов Ю.С. Периодические решения релейных систем с распределенными параметрами // Математический сборник. 1970. Т.83(125), N3(11). С. 349 – 371.

6. Mawhin J., Mucoz C. Application du degré topologique a l'estimation du nombre des solutions périodiques d'équations différentielles. I. Solutions périodiques quelconques //Annali di Matematica. 1973. V. 96, N1. P. 1 – 19.

7. Колесов Ю.С., Майоров В.В. Обоснование алгоритма исследования устойчивости решений линейных почти периодический уравнений с последействием, коэффициенты которых близки к постоянным // Вестник Ярославского ун-та. Ярославль: ЯрГУ, 1974. Вып. 10. С. 70 – 105.

8. Колесов Ю.С. Гармонические автоколебания дифференциальных уравнений n-го порядка с последействием // Вестник Ярославского ун-та. Ярославль: ЯрГУ, 1974. Вып. 7. С. 3 – 88.

9. Колесов Ю.С., Майоров В.В. Новый метод исследования устойчивости решений линейных почти периодических уравнений, коэффициенты которых близки к постоянным // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. 10, N10. С. 1778 – 1788.

10. Колесов Ю.С. Об устойчивости линейных дифференциальных уравнений параболического типа с почти периодическими коэффициентами // Труды Московского математического общества. 1978. Т. 36. С. 2 – 27.

11. Колесов Ю.С., Швитра Д.И. Автоколебания в системах с запаздыванием. Вильнюс: Мокслас. 1979. 146 с.

12. Колесов Ю.С. Резонансы в экологии // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: ЯрГУ, 1978. С. 26 – 42.

13. Колесов Ю.С. Математические модели экологии // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: Яргу, 1979. С. 3 – 40.

14. Васильева А.Б., Кащенко С.А., Колесов Ю.С., Розов Н.Х. Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией // Математический сборник. 1986. Т. 130(172), N4(8). С. 488 – 499.

15. Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Наука, 1995. 336 с.

16. Колесов А.Ю., Колесов Ю.С. Релаксационные колебания в математических моделях экологии // Труды МИАН. 1993. Т. 198.

17. Захаров А.А., Колесов Ю.С. Пространственно неоднородные режимы в задаче хищник – жертва // Нелинейные колебания и экология. Ярославль: ЯрГУ, 1984. С. 3 – 15.

18. Колесов Ю.С. Построение матрицы с неотрицательными элементами по ее заданному спектру // Математические заметки. 1993. Т. 53, N1. С. 143 – 145.

19. Колесов Ю.С. Свойства характеристических многочленов матриц с неотрицательными элементами // Успехи математических наук. 1971. Т. 26(159), N3. С. 205 – 206.

20. Колесов Ю.С. Структура характеристических многочленов матриц с неотрицательными элементами // Известия РАН. Серия матем. 2007. Т. 71, N1. С. 5 – 16.

21. Krasnosel'skij M.A., Burd V.Sh., Kolesov Yu.S. Nonlinear almost periodic oscillations. New York etc.: John Wiley & Sons, 1973. 326 p.

22. Mishchenko E.F., Kolesov Yu.S., Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh. Asymptotic methods in singularly perturbed systems: Monographs in Contemporary Mathematics. New York, 1994. 281 p.

About the works by Yu.S. Kolesov on differential equations

Burd V.Sh.

Keywords: stability, Frechet derivative, spectrum, diffusion, bifurcation

The article describes the most interesting, in the author's opinion, results obtained by Yu.S. Kolesov, devoted to differential equations (common, functional-differential, with partial derivatives) and their applications to the mathematical ecology, radiophysics, automatic regulation, mechanics.

Сведения об авторе:

Бурд Владимир Шепселевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
кандидат физико-математических наук, профессор