Модел. и анализ информ. систем. Т. **16**, № **3** (2009) 14–21

УДК 515.177

Однородные и четно-однородные супермногообразия с ретрактом $\mathbb{CP}^{1|4}_{kk20}$ при $k \geq 2$

Башкин М.А.[1]

Рыбинская государственная авиационная технологическая академия им. П.А.Соловьева

e-mail: m_ bashkin@list.ru

получена 25 мая 2009

Ключевые слова: комплексное супермногообразие, однородное комплексное супермногообразие, ретракт, касательный пучок

Описываются чётно-однородные нерасщепимые супермногообразия, связанные с комплексной проективной прямой в случае, когда ретракт определяется векторным расслоением с сигнатурой $(k, k, 2, 0)$ при $k \geq 2$. Показано, что однородных нерасщепимых супермногообразий с требуемым ретрактом нет. Необходимые сведения по теории комплексных супермногообразий можно найти в [3] и [5].

Изучение однородных комплексных супермногообразий было начато в 80-х годах Ю.И. Маниным. В 1996 году А.Л. Онищиком была поставлена следующая задача:

классифицировать с точностью до изоморфизма все однородные комплексные супермногообразия вида $(M, \mathcal{O})$, где M — заданное компактное комплексное однородное многообразие.

Пусть $M = \mathbb{CP}^1$. Тогда в расщепимом случае классификация известна: однородные супермногообразия находятся во взаимно однозначном соответствии с невозрастающими наборами n неотрицательных чисел. В нерасщепимом случае классификация значительно сложнее и сводится к некоторым вычислениям с когомологиями расщепимых однородных супермногообразий со значениями в касательном пучке.

В.А. Бунегина и А.Л. Онищик полностью исследовали в [2] случай, когда нечетная размерность супермногообразия $n = 2$ или 3. Оказалось, что при $n = 2$ существует только одно нерасщепимое однородное супермногообразие вида $(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O})$. Это суперквадрика в $\mathbb{CP}^{1|2}$, которая была построена ранее независимо П. Грином (P. Green) и В.П. Паламодовым как один из первых примеров нерасщепимых комплексных супермногообразий. При $n = 3$ существует серия нерасщепимых однородных супермногообразий, параметризованная целым числом $k = 0, 2, 3, \ldots$

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 07-01-00230.

Изучение случая $n = 4$ было начато в [4], где было построено однопараметрическое семейство нерасщепимых однородных супермногообразий, ретрактом которых является комплексная проективная суперпрямая размерности $1|4$. Полный обзор имеющихся результатов в случае $n = 4$ можно найти в [1]. Данная работа является продолжением исследования в этом направлении и содержит новые результаты.

Как известно, любое голоморфное расслоение над $\mathbb{CP}^1$ единственным образом разлагается в прямую сумму расслоений на прямые. Обозначим через $\mathbf{L}_k$ голоморфное расслоение на прямые степени k.

Пусть $\mathbf{E} \to \mathbb{CP}^1$ – голоморфное векторное расслоение ранга 4, представленное в виде $\mathbf{E} = 2\mathbf{L}_{-k} \oplus \mathbf{L}_{-2} \oplus \mathbf{L}_0$, где $k \geq 2$. Обозначим через $\mathbb{CP}^{1|4}_{kk20}$ расщепимое супермногообразие, определяемое расслоением $\mathbf{E}$.

Покроем $\mathbb{CP}^1$ двумя аффинными картами U_0 и U_1 с локальными координатами x и $y = \frac{1}{x}$ соответственно. Тогда функции перехода супермногообразия $\mathbb{CP}^{1|4}_{kk20}$ в $U_0 \cap U_1$ имеют вид

$$\begin{cases} y = x^{-1} \\ \eta_1 = x^{-k}\xi_1 \\ \eta_2 = x^{-k}\xi_2 \\ \eta_3 = x^{-2}\xi_3 \\ \eta_4 = \xi_4 \end{cases},$$

где ξ_i и η_i — базисные сечения расслоения $\mathbf{E}$ над U_0 и U_1 соответственно.

Обозначим через $\mathcal{T}_{\mathrm{gr}} = \bigoplus\limits_{p=-1}^{4} (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_p$ градуированный касательный пучок супермногообразия $\mathbb{CP}^{1|4}_{kk20}$ и через $\mathfrak{v}(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$ супералгебру Ли векторных полей на нем. Имеется естественное действие этой супералгебры Ли на рассматриваемом супермногообразии. Если ограничение этого действия на четную компоненту сюръективно, то супермногообразие называется *четно-однородным.*

Рассмотрим сначала следующую задачу: *описать чётно-однородные нерасщепимые супермногообразия с ретрактом* $\mathbb{CP}^{1|4}_{kk20}$, $k \geq 2$.

Опишем когомологии касательного пучка с помощью коциклов Чеха в покрытии $\mathfrak{U} = \{U_0, U_1\}$.

Из теоремы 14, доказанной в [1], вытекает

Лемма 1. *Базис пространств* $H^1(\mathbb{CP}^1, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_q)$, $q = 1, 2, 4$, *может быть представлен следующими коциклами:*

1) $q = 1$

при $k = 2$

$$x^{-1}\xi_1\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2},\quad x^{-1}\xi_1\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_4},\quad x^{-1}\xi_2\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1},\quad x^{-1}\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_4},\quad x^{-1}\xi_3\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1},\quad x^{-1}\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_4},$$
$$x^{-1}\xi_1\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_3},\quad x^{-1}\xi_1\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_2},\quad x^{-1}\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_1},\quad x^{-r}\xi_1\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_4}\ (r = 1, 2, 3),$$
$$x^{-r}\xi_1\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_4}\ (r = 1, 2, 3),\qquad x^{-r}\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_4}\ (r = 1, 2, 3);$$

при $k=3$

$$x^{-1}\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_4},\ \ x^{-1}\xi_3\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1},\ \ x^{-1}\xi_1\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_2},\ \ x^{-r}\xi_1\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_4}\ (r=1,2,3,4),\ \ x^{-1}\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_1},$$
$$x^{-r}\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_4}\ (r=1,2,3,4),\ x^{-r}\xi_1\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_3}\ (r=1,2,3),\ x^{-r}\xi_1\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_4}\ (r=1,2,3,4,5),$$
$$x^{-r}\xi_1\xi_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}\ (j=2,3,4,\ r=1,2),\ x^{-r}\xi_2\xi_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}\ (j=1,3,4,\ r=1,2);$$

при $k\ge 4$

$$x^{-1}\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_4},\ \ x^{-1}\xi_3\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1},\qquad x^{-1}\xi_1\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_2},\ \ x^{-r}\xi_1\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_4}\ (r=1,\ldots,k+1),$$
$$x^{-r}\xi_1\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_3}\ (r=1,\ldots,2k-3),\ \ x^{-1}\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_1},\ \ x^{-r}\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_4}\ (r=1,\ldots,k+1),$$
$$x^{-r}\xi_1\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_4}\ (r=1,\ldots,2k-1),\ x^{-r}\xi_i\frac{\partial}{\partial x}\ (i=1,2,\ j=1,\ldots,k-3),$$
$$x^{-r}\xi_1\xi_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}\ (j=2,3,4,\ r=1,\ldots,k-1),\ x^{-r}\xi_j\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_3}\ (j=1,2,\ r=1,\ldots,k-3),$$
$$x^{-r}\xi_2\xi_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}\ (j=1,3,4,\ r=1,\ldots,k-1);$$

2) $q=2$

при $k=2$

$$x^{-1}\xi_1\xi_2\frac{\partial}{\partial x},\ \ x^{-r}\xi_1\xi_2\xi_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}\ (j=3,4,\ r=1,2,3),\ \ x^{-1}\xi_1\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2},\ \ x^{-1}\xi_2\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1},$$
$$x^{-1}\xi_1\xi_3\frac{\partial}{\partial x},\ \ x^{-r}\xi_1\xi_3\xi_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}\ (j=2,4,\ r=1,2,3),\ \ x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1},\ \ x^{-1}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_1},$$
$$x^{-1}\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial x},\ \ x^{-r}\xi_2\xi_3\xi_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}\ (j=1,4,\ r=1,2,3),\ \ x^{-1}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_2},\ \ x^{-1}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_3},$$
$$x^{-r}\xi_1\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_4}\ (r=1,2,3,4,5);$$

при $k=3$

$$x^{-r}\xi_1\xi_2\frac{\partial}{\partial x}\ (r=1,2,3),\ \ x^{-r}\xi_1\xi_2\xi_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}\ (j=3,4,\ r=1,2,3,4,5),\ \ x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1},$$
$$x^{-r}\xi_1\xi_3\frac{\partial}{\partial x}\ (r=1,2),\qquad x^{-r}\xi_1\xi_3\xi_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}\ (j=2,4,\ r=1,2,3,4),\qquad x^{-1}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_1},$$
$$x^{-r}\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial x}\ (r=1,2),\qquad x^{-r}\xi_2\xi_3\xi_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}\ (j=1,4,\ r=1,2,3,4),\qquad x^{-1}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_2},$$
$$x^{-r}\xi_1\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_4}\ (r=1,\ldots,7),\qquad x^{-r}\xi_1\xi_4\xi_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}\ (j=2,3,\ r=1,2),$$
$$x^{-r}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_3}\ (r=1,2,3),\qquad x^{-r}\xi_2\xi_4\xi_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}\ (j=1,3,\ r=1,2);$$

при $k \geq 4$

$$x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1},\qquad x^{-1}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_1},\qquad x^{-1}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_2},$$
$$x^{-r}\xi_1\xi_2\frac{\partial}{\partial x}\ (r=1,\ldots,2k-3),\qquad x^{-r}\xi_1\xi_2\xi_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}\ (j=3,4,\ r=1,\ldots,2k-1),$$
$$x^{-r}\xi_1\xi_3\frac{\partial}{\partial x}\ (r=1,\ldots,k-1),\qquad x^{-r}\xi_1\xi_3\xi_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}\ (j=2,4,\ r=1,\ldots,k+1),$$
$$x^{-r}\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial x}\ (r=1,\ldots,k-1),\qquad x^{-r}\xi_2\xi_3\xi_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}\ (j=1,4,\ r=1,\ldots,k+1),$$
$$x^{-r}\xi_1\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_4}\ (r=1,\ldots,2k+1),\qquad x^{-r}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_3}\ (r=1,\ldots,2k-3),$$
$$x^{-r}\xi_1\xi_4\frac{\partial}{\partial x}\ (r=1,\ldots,k-3),\qquad x^{-r}\xi_1\xi_4\xi_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}\ (j=2,3,\ r=1,\ldots,k-1),$$
$$x^{-r}\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial x}\ (r=1,\ldots,k-3),\qquad x^{-r}\xi_2\xi_4\xi_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}\ (j=1,3,\ r=1,\ldots,k-1);$$

3) $q=4$

$$x^{-r}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial x}\ (r=1,\ldots,2k-1).$$

Рассмотрим подпучок $\mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\rm gr} = \exp((\mathcal{T}_{\rm gr})_2 \oplus (\mathcal{T}_{\rm gr})_4)$ пучка $\mathcal{A}ut\,\mathcal{O}_{\rm gr}$. Согласно теореме Грина, множество супермногообразий с заданным ретрактом $(M,\mathcal{O}_{\rm gr})$ изоморфно множеству орбит группы $\operatorname{Aut}\mathbf{E}$ на множестве $H^1(M,\mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\rm gr})$. Справедливо

Предложение 1 (см. [1]). *Пусть заданы такие подпространства* $Q_{2p}\subset Z^1(\mathfrak{U},(\mathcal{T}_{\rm gr})_{2p})$ $(p=1,2)$, *что каждый класс когомологий из* $H^1(M,(\mathcal{T}_{\rm gr})_{2p})$ *содержит ровно по одному коциклу из* Q_{2p} $(p=1,2)$. *Тогда любой класс когомологий из* $H^1(M,\mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\rm gr})$ *представляется единственным коциклом вида* $z=\exp(u^2+u^4)$, *где* $u^2\in Q_2$, $u^4\in Q_4$.

Мы будем говорить далее о задании супермногообразия $(M,\mathcal{O})$ коциклом u^2+u^4, подразумевая, что $(M,\mathcal{O})$ соответствует коциклу $z=\exp(u^2+u^4)$.

Рассмотрим точную последовательность (см. [2])

$$0\to\operatorname{End}\mathbf{E}\to\mathfrak{v}(\mathbb{CP}^1,\mathcal{O}_{\rm gr})_0\xrightarrow{\beta}\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})\to 0. \tag{1}$$

Подалгебра $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{v}(\mathbb{CP}^1,\mathcal{O}_{\rm gr})_0$ расщепляет последовательность (1), если β изоморфно отображает ее на $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ или, что равносильно, имеем разложение в полупрямую сумму $\mathfrak{v}(\mathbb{CP}^1,\mathcal{O}_{\rm gr})_0=\operatorname{End}\mathbf{E}\oplus\mathfrak{a}$. В работе [2] показано, что супермногообразие с ретрактом $(\mathbb{CP}^1,\mathcal{O}_{\rm gr})$ четно-однородно тогда и только тогда, когда на него поднимается некоторая подалгебра $\mathfrak{a}$, расщепляющая (1). В этой ситуации мы будем говорить, что *супермногообразие* $(\mathbb{CP}^1,\mathcal{O})$ *является четно-однородным относительно* $\mathfrak{a}$. В рассматриваемом случае с точностью до изоморфизма из $\operatorname{Aut}\mathbf{E}$ существуют лишь следующие расщепляющие подалгебры $\mathfrak{a}_i\simeq\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ (см. [2], ниже приводятся базисы этих подалгебр):

при $k=2$

$\mathfrak{a}_1:\ \mathbf{e}=\dfrac{\partial}{\partial x},\qquad \mathbf{h}=-2x\dfrac{\partial}{\partial x}-2\left(\xi_1\dfrac{\partial}{\partial\xi_1}+\xi_2\dfrac{\partial}{\partial\xi_2}+\xi_3\dfrac{\partial}{\partial\xi_3}\right),$

$$\mathbf{f} = -x^2\frac{\partial}{\partial x} - 2x\left(\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2} + \xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3}\right);$$

$$\mathfrak{a}_2:\ \mathbf{e} = \xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbf{h} = -2x\frac{\partial}{\partial x} - 3\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1} - \xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2} - 2\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3},$$

$$\mathbf{f} = \xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_2} - x^2\frac{\partial}{\partial x} - 2x\left(\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2} + \xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3}\right);$$

$$\mathfrak{a}_3:\ \mathbf{e} = \xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_2} + \xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbf{h} = -2x\frac{\partial}{\partial x} - 4\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1} - 2\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2},$$

$$\mathbf{f} = 2\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_3} + 2\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_2} - x^2\frac{\partial}{\partial x} - 2x\left(\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2} + \xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3}\right);$$

при $k \geq 3$

$$\mathfrak{a}_1:\ \mathbf{e} = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbf{h} = -2x\frac{\partial}{\partial x} - \nabla, \qquad \mathbf{f} = -x^2\frac{\partial}{\partial x} - x\nabla;$$

$$\mathfrak{a}_2:\ \mathbf{e} = \xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbf{h} = -2x\frac{\partial}{\partial x} - (k+1)\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1} - (k-1)\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2} - 2\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3},$$

$$\mathbf{f} = \xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_2} - x^2\frac{\partial}{\partial x} - x\nabla;$$

где $\nabla = k\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1} + k\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2} + 2\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3}$.

Обозначим через $H^1(\mathbb{CP}^1, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}}))^{\mathfrak{a}}$ множество $\mathfrak{a}$-инвариантных классов когомологий.

Лемма 2. *Базис пространства $H^1(\mathbb{CP}^1, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2)^{\mathfrak{a}_i}$ в каждом из случаев подалгебры $\mathfrak{a}_i$ может быть представлен следующими коциклами:*

при $k = 2$

1) $i = 1:$
$$x^{-1}\xi_1\xi_2\frac{\partial}{\partial x} + x^{-2}\left(\xi_1\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3} + \xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4}\right), \quad x^{-1}\xi_1\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2}, \quad x^{-1}\xi_2\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1},$$
$$x^{-1}\xi_1\xi_3\frac{\partial}{\partial x} + x^{-2}\left(\xi_1\xi_3\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2} + \xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4}\right), \quad x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \quad x^{-1}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_3},$$
$$x^{-1}\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial x} + x^{-2}\left(\xi_2\xi_3\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4}\right), \quad x^{-1}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_2}, \quad x^{-1}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_1};$$

2) $i = 2:$ $x^{-1}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_3};$

3) $i = 3:$
$$x^{-1}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_3}, \quad 2x^{-3}\xi_1\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3} + x^{-2}\xi_1\xi_3\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2} + x^{-1}\xi_2\xi_3\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1},$$
$$2x^{-3}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4} + x^{-2}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4} + x^{-1}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4};$$

при $k = 3$ и $k \geq 5$

1) $i = 1:$ $x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \quad x^{-1}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_2}, \quad x^{-1}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_1};$

2) $i = 2:$ $x^{-1}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_2}, \quad x^{-1}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_1};$

при $k=4$

$$\begin{aligned}
&1)\ i=1:\ \ x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1},\ \ x^{-1}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_2},\ \ x^{-1}\xi_1\xi_4\frac{\partial}{\partial x}+2x^{-2}\xi_1\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}+x^{-2}\xi_1\xi_4\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_3},\\
&\qquad\qquad x^{-1}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_1},\ \ x^{-1}\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial x}+2x^{-2}\xi_2\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}+x^{-2}\xi_2\xi_4\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_3};\\
&2)\ i=2:\ \ x^{-1}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_2},\ \ x^{-1}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_1}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Для $\mathfrak{a}_1$ воспользуемся теоремой 15 из [1]. В остальных случаях подалгебры $\mathfrak{a}_i$, $i=2,3$, доказательство проводится аналогично. □

Аналогично предыдущей лемме доказывается

Лемма 3. *Для любой расщепляющей подалгебры* $\mathfrak{a}$ *имеем* $H^1(\mathbb{CP}^1,(\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_4)^{\mathfrak{a}}=\{0\}$.

Пусть $\lambda_2:\mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\mathrm{gr}}\to(\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2$ — гомоморфизм пучков, сопоставляющий каждому ростку автоморфизма a 2-компоненту элемента $\log a$ в $(\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2\oplus(\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_4$.

Обозначим через $H^1(\mathbb{CP}^1,\mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})^{\mathfrak{a}}$ — множество классов, определяющих четно-однородные относительно $\mathfrak{a}$ супермногообразия.

Предложение 2. *Если* $\mathfrak{a}$ *— подалгебра, расщепляющая последовательность* (1), *то* λ_2^* *биективно отображает множество* $H^1(\mathbb{CP}^1,\mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})^{\mathfrak{a}}$ *на* $H^1(\mathbb{CP}^1,(\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2)^{\mathfrak{a}}$.
Доказательство следует из предложения 1 и леммы 3. □

В [5] описано условие подъема векторного поля на нерасщепимое супермногообразие с его ретракта. Используя это условие и лемму 3, получаем, что четно-однородные относительно $\mathfrak{a}$ супермногообразия задаются коциклами вида u^2, где класс $[u^2]$ $\mathfrak{a}$-инвариантен и $[u^2,u^2]=0$. Так как условие $[u^2,u^2]=0$ выполняется для всех коциклов леммы 2, то справедлива

Теорема 1. *Для любой расщепляющей подалгебры* $\mathfrak{a}$ *четно-однородные относительно* $\mathfrak{a}$ *супермногообразия задаются коциклами из леммы 2.*

Тем самым описаны все четно-однородные нерасщепимые супермногообразия с ретрактом $\mathbb{CP}^{1|4}_{kk20}$ при $k\geq 2$.

Выясним, есть ли однородные нерасщепимые супермногообразия в рассматриваемом случае. Для этого воспользуемся следующим предложением, аналогичным предложению 15 из [2]:

Предложение 3. *Пусть выполнены условия предложения 1 и пусть супермногообразие* $(\mathbb{CP}^1,\mathcal{O})$ *является четно-однородным относительно* $\mathfrak{a}_i$, $i=1,2,3$. *В случае* $i=1$ *супермногообразие* $(\mathbb{CP}^1,\mathcal{O})$ *однородно тогда и только тогда, когда векторные поля* $\dfrac{\partial}{\partial\xi_j}$ *для* $j=1,\dots,4$ *поднимаются на* $(\mathbb{CP}^1,\mathcal{O})$;
в случае $i=2$ *— когда этим свойством обладают поля* $\dfrac{\partial}{\partial\xi_j}$ *для* $j=1,3,4$;
а в случае $i=3$ *— когда этим свойством обладают поля* $\dfrac{\partial}{\partial\xi_1}$ *и* $\dfrac{\partial}{\partial\xi_4}$.
Доказательство. Согласно предложению 5 из [2], вопрос однородности сводится к сюръективности отображения $\mathrm{ev}_o:\mathfrak{v}(M,\mathcal{O})_{\bar 1}\to T_o(M,\mathcal{O})_{\bar 1}$ для некоторой точки $o\in M$. Пусть o — точка в U_0, заданная уравнением $x=0$. Представим это отображение в виде $\mathrm{ev}_o=\tilde{\mathrm{ev}}_o\circ p_{-1}$, где $\tilde{\mathrm{ev}}_o$ — отображение $\mathfrak{v}(M,\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})\to T_o(M,\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$, вычисляющее

значение векторного поля в точке $o \in M$, p_{-1} — проекция $\mathfrak{v}(M,\mathcal{O})_{\bar 1} \to \mathfrak{v}(M,\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})_{-1}$. Очевидно, $W = \operatorname{Im} p_{-1}$ является $\mathfrak{a}$-подмодулем в $\mathfrak{v}(M,\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})_{-1}$.

В случае $i = 1$ любой старший вектор относительно $\mathfrak{a}$, лежащий в W, есть линейная комбинация векторных полей $\dfrac{\partial}{\partial\xi_j}$ (см. [2]). Если $(\mathbb{CP}^1,\mathcal{O})$ однородно, то $\mathrm{ev}_o(W) = T_o(\mathbb{CP}^1,\mathcal{O})_{\bar 1}$ и W содержит все $\dfrac{\partial}{\partial\xi_j}$, $j = 1,\ldots,4$, откуда следует, что $W = \mathfrak{v}(\mathbb{CP}^1,\mathcal{O})_{-1}$. Следовательно, все поля $\dfrac{\partial}{\partial\xi_j}$ поднимаются. Обратно, если все поля $\dfrac{\partial}{\partial\xi_j}$ поднимаются, то p_{-1} сюръективно. Поскольку элементы $\dfrac{\partial}{\partial\xi_j}$ натягивают $T_o(\mathbb{CP}^1,\mathcal{O})_{\bar 1}$ для $x \in U_0$, то $\tilde{\mathrm{ev}}_o$ сюръективно. Поэтому $(\mathbb{CP}^1,\mathcal{O})$ однородно.

В случае $i = 2$ старшими векторами $\mathfrak{a}$-модуля $\mathfrak{v}(\mathbb{CP}^1,\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})_{-1}$ являются $\dfrac{\partial}{\partial\xi_1}$, $\dfrac{\partial}{\partial\xi_2} + x\dfrac{\partial}{\partial\xi_1}$, $\dfrac{\partial}{\partial\xi_3}$, $\dfrac{\partial}{\partial\xi_4}$ (см. [2]). Далее,

$$[\mathbf{f},\frac{\partial}{\partial\xi_1}] = kx\frac{\partial}{\partial\xi_1} - \frac{\partial}{\partial\xi_2} \equiv -\frac{\partial}{\partial\xi_2} \mod \operatorname{Ker}(\mathrm{ev}_o),\ (\operatorname{ad}\mathbf{f})^r(\frac{\partial}{\partial\xi_1}) \in \operatorname{Ker}(\mathrm{ev}_o) \text{ при } r \geq 2;$$
$$(\operatorname{ad}\mathbf{f})^r(\frac{\partial}{\partial\xi_2} + x\frac{\partial}{\partial\xi_1}) \in \operatorname{Ker}(\mathrm{ev}_o) \text{ при } r \geq 1;$$
$$(\operatorname{ad}\mathbf{f})^r(\frac{\partial}{\partial\xi_j}) \in \operatorname{Ker}(\mathrm{ev}_o) \text{ при } r \geq 1,\ j = 3,4.$$

Отсюда следует, что если $(\mathbb{CP}^1,\mathcal{O})$ однородно, то $\dfrac{\partial}{\partial\xi_j} \in W$, $j = 1,3,4$. Следовательно, поля $\dfrac{\partial}{\partial\xi_j}$, $j = 1,3,4$, поднимаются на $(\mathbb{CP}^1,\mathcal{O})$. Обратно, если указанные поля поднимаются на $(\mathbb{CP}^1,\mathcal{O})$, то $\dfrac{\partial}{\partial\xi_j} \in W$, $j = 1,3,4$. Отсюда, W содержит соответствующие неприводимые компоненты модуля $\mathfrak{v}(\mathbb{CP}^1,\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})_{-1}$, и потому $kx\dfrac{\partial}{\partial\xi_1} - \dfrac{\partial}{\partial\xi_2} \in W$. Следовательно, ev_o сюръективно, а $(\mathbb{CP}^1,\mathcal{O})$ — однородно.

В случае $i = 3$ старшими векторами $\mathfrak{a}$-модуля $\mathfrak{v}(\mathbb{CP}^1,\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})_{-1}$ являются $\dfrac{\partial}{\partial\xi_1}$, $\dfrac{\partial}{\partial\xi_3} + x\dfrac{\partial}{\partial\xi_2} + \frac{1}{2}x^2\dfrac{\partial}{\partial\xi_1}$, $\dfrac{\partial}{\partial\xi_4}$ (см. [2]). Далее,

$$[\mathbf{f},\frac{\partial}{\partial\xi_1}] = 2x\frac{\partial}{\partial\xi_1} - 2\frac{\partial}{\partial\xi_2} \equiv -2\frac{\partial}{\partial\xi_2} \mod \operatorname{Ker}(\mathrm{ev}_o),\ (\operatorname{ad}\mathbf{f})^2(\frac{\partial}{\partial\xi_1}) = -6x\frac{\partial}{\partial\xi_2} +$$
$$+2x^2\frac{\partial}{\partial\xi_1} + 4\frac{\partial}{\partial\xi_3} \equiv 4\frac{\partial}{\partial\xi_3} \mod \operatorname{Ker}(\mathrm{ev}_o),\ (\operatorname{ad}\mathbf{f})^r(\frac{\partial}{\partial\xi_1}) \in \operatorname{Ker}(\mathrm{ev}_o) \text{ при } r \geq 3;$$
$$(\operatorname{ad}\mathbf{f})^r(\frac{\partial}{\partial\xi_3} + x\frac{\partial}{\partial\xi_2} + \tfrac{1}{2}x^2\frac{\partial}{\partial\xi_1}) \in \operatorname{Ker}(\mathrm{ev}_o) \text{ при } r \geq 1;$$
$$(\operatorname{ad}\mathbf{f})^r(\frac{\partial}{\partial\xi_4}) \in \operatorname{Ker}(\mathrm{ev}_o) \text{ при } r \geq 1.$$

Отсюда следует, что если $(\mathbb{CP}^1,\mathcal{O})$ однородно, то $\dfrac{\partial}{\partial\xi_1}$ и $\dfrac{\partial}{\partial\xi_4} \in W$. Следовательно, поля $\dfrac{\partial}{\partial\xi_1}$ и $\dfrac{\partial}{\partial\xi_4}$ поднимаются на $(\mathbb{CP}^1,\mathcal{O})$. Обратно, если указанные поля поднимаются на $(\mathbb{CP}^1,\mathcal{O})$, то $\dfrac{\partial}{\partial\xi_1}$ и $\dfrac{\partial}{\partial\xi_4} \in W$. Отсюда, W содержит соответствующие неприводимые компоненты модуля $\mathfrak{v}(\mathbb{CP}^1,\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})_{-1}$, и потому $2x\dfrac{\partial}{\partial\xi_1} - 2\dfrac{\partial}{\partial\xi_2}$ и

$-6x\dfrac{\partial}{\partial\xi_2} + 2x^2\dfrac{\partial}{\partial\xi_1} + 4\dfrac{\partial}{\partial\xi_3} \in W$. Следовательно, ev_o сюръективно, а $(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O})$ — однородно. $\square$

Применив предложение 3 к коциклам леммы 2, получаем следующий результат.

Теорема 2. *Однородных нерасщепимых супермногообразий с ретрактом $\mathbb{CP}^{1|4}_{kk20}$ при $k \geq 2$ не существует.*

Список литературы

1. *Башкин М.А., Онищик А.Л.* Однородные нерасщепимые супермногообразия над комплексной проективной прямой // Математика, кибернетика, информатика: труды международной научной конференции памяти А.Ю. Левина. Ярославль: ЯрГУ, 2008. С. 40–57.

2. *Бунегина В.А., Онищик А.Л.* Однородные супермногообразия, связанные с комплексной проективной прямой // Современная математика и ее приложения. Т.19. Москва: ВИНИТИ, 2001. С. 141–180.

3. *Онищик А.Л.* Проблемы классификации комплексных супермногообразий // Математика в Ярославском университете: Сб. обзорных статей. К 25-летию математического факультета / Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2001. С. 7–34.

4. *Bunegina V.A., Onishchik A.L.* Two families of flag supermanifolds // Different. Geom. and its Appl. V.4. 1994. P.329–360.

5. *Onishchik A.L.* A Construction of Non-Split Supermanifolds // Annals of Global Analysis and Geometry. 1998. V. 16. P. 309–333.

Homogeneous and $\overline{0}$-homogeneous supermanifolds with retract $\mathbb{CP}^{1|4}_{kk20}$ when $k \geq 2$

Bashkin M.A.

Keywords: complex supermanifold, homogeneous complex supermanifold, retract, tangent sheaf

This paper contain the description of non-split even-homogeneous supermanifolds over the complex projective line whose retract corresponds to a holomorphic vector bundle of the signature $(k, k, 2, 0)$, where $k \geq 2$. We prove that there are no non-split homogeneous supermanifolds in this case. See [3] and [4] for more information about the complex supermanifolds theory.

Сведения об авторе: **Башкин Михаил Анатольевич**,
Рыбинская государственная авиационная технологическая академия им. П.А. Соловьева, канд. физ.-мат. наук, доцент