

УДК 517.51

О неравенстве типа неравенства Джексона в диадическом пространстве BMO

Иродова И.П.¹

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: IrinaIrodova@gmail.com

получена 31 июля 2009

Ключевые слова: неравенство Джексона, диадическое BMO , аппроксимация, интерполяция

Доказывается прямая теорема теории приближения для функций из диадического пространства Бесова. Вместе с обратной теоремой это позволяет решить задачу интерполяции между диадическим BMO и диадическим пространством Бесова.

1. Введение

Напомним ставший уже классическим результат М.Ш. Бирмана и М.З. Соломыка [1] о нелинейной кусочно-полиномиальной аппроксимации функций из пространства Соболева – Слободецкого $W_p^\lambda(Q_0)$, $p \geq 1$:

$$\|f - s_n\|_{L_q} \leq c \cdot n^{-\frac{\lambda}{d}} \|f\|_{W_p^\lambda}. \quad (1)$$

Здесь $Q_0 = [0, 1]^d$; $\|\cdot\|_{L_q} = \|\cdot\|_{L_q(Q_0)}$, $\frac{\lambda}{d} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ и s_n — кусочно-полиномиальная функция из множества PP_n^k (определение PP_n^k см. ниже).

Неравенство (1) является неравенством типа неравенства Джексона. Его особенность заключается в том, что функции из $W_p^\lambda(Q_0)$ (возможно гладкие) приближаются в пространстве $L_q(Q_0)$ ($W_p^\lambda(Q_0) \subset L_q(Q_0)$) разрывными функциями.

Этот результат можно развивать по двум направлениям. В первом случае следует сменить аппарат приближения, заменив разрывные функции гладкими. Во втором случае можно отказаться от гладкости приближаемой функции.

Первое направление было развито в статье автора [2], где получен аналог результата (1) в случае приближения функций из $B_p^{\lambda\infty}$ гладкими функциями из $SS_n^k := PP_n^k \cap C^{k-2}(Q_0)$. Затем, сменив аппарат приближения, удалось доказать результат и для "предельного" случая $\frac{\lambda}{d} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$:

$$\|f - s_n\|_{L_q} \leq c \cdot n^{-\frac{\lambda}{d}} |f|_{B_p^\lambda}. \quad (2)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00385)

Здесь $0 < p < q < \infty$ и $0 < p \leq 1$ для $q = \infty$; $s_n \in S_n^k$ (определение множества S_n^k см. ниже).

Впервые теорема о приближении сплайнами со свободными узлами на "пределном" показателе в одномерном случае была получена Ю.А. Брудным в [3]. Позднее аналогичный результат доказан П. Петрушевым в [4]. Многомерный случай анонсирован в работе Ю.А. Брудного, И.П. Иродовой [5] (более подробное доказательство см. в [6]). Независимо этот же результат в случае приближения линейными комбинациями характеристических функций был получен Р.А. Девором и В.А. Поповым в [7], вейвлет-аппроксимация при $0 < p < q < \infty$ рассмотрена в статье Р.А. Девора, Б. Яверса, В.А. Попова [8], при $q = \infty$ — Р.А. Девора, П. Петрушева, Х.М. Ю в [9].

Второе направление (отказ от гладкости приближаемой функции) было развито в работе автора [10], где классическое пространство Бесова B_p^λ было заменено на диадическое пространство $B_p^\lambda(F)$, которое можно считать дискретным аналогом пространства B_p^λ . В этом случае было доказано неравенство

$$\|f - s_n(F)\|_{L_q} \leq c \cdot n^{-\frac{\lambda}{d}} |f|_{B_p^\lambda(F)}. \quad (3)$$

Здесь F — почти диадическое семейство; $s_n(F)$ — кусочно-полиномиальная функция из $P_n^k(F)$ (определение $P_n^k(F)$ см. ниже) и параметры λ, d, p, q удовлетворяют тем же условиям, что и в (2).

Заметим, что (3) (так же, как и (2)) не выполняется в случае $p > 1, q = \infty$, так как нет вложения $B_p^\lambda(F)$ в $L_\infty(Q_0)$. Однако, если заменить $L_\infty(Q_0)$ на более широкое пространство $BMO(F)$, то вложение сохранится. Вопрос заключается в том, как приблизить функцию из пространства $B_p^\lambda(F)$, $\lambda = \frac{d}{p}$ при $p > 1$ в пространстве $BMO(F)$. Ответ на этот вопрос и получен в данной статье. А именно, доказано неравенство аналогичное (3), где пространство L_q левой части (3) заменено на $BMO(F)$. Оказалось, что аппроксимирующий алгоритм, предложенный автором в [10] в случае $0 < p \leq 1, q = \infty$, после некоторой модификации можно применить и при $p > 1, \lambda = \frac{d}{p}$.

2. Определения

Дадим сначала определение почти диадического семейства. Пусть F_n обозначает разбиение единичного куба Q_0 на параллелепипеды, образованные $(2^n - 1)d$ гиперплоскостями (по $2^n - 1$ гиперплоскостей, параллельных каждой из координатных плоскостей). Мы будем предполагать, что разбиение F_n состоит из параллелепипедов с длинами ребер $\approx 2^{-n}$. В дальнейшем такие параллелепипеды будем называть **квазикубами**. Если разбиение F_{n+1} является измельчением разбиения F_n (то есть если любой куб из F_{n+1} содержится в некотором квазикубе из F_n), то такие разбиения будем называть **почти диадическими**, а $F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$ будем называть **почти диадическим семейством**.

Частным случаем F является диадическое семейство D , где разбиение F_n на параллелепипеды заменяется разбиением D_n на равные кубы с длиной ребра 2^{-nd} .

Символом P_k обозначим пространство многочленов степени не выше $k-1$ по каждой переменной. Будем говорить, что функция s принадлежит множеству $PP_n^k(F)$, если ее можно представить в виде

$$s = \sum_{i=1}^n p_{Q_i} \chi_{Q_i}, \quad (4)$$

где $p_{Q_i} \in P_k$, $Q_i \in F$, Q_i попарно не пересекаются, и $\bigcup_{i=1}^n Q_i = Q_0$.

В результате (1), о котором шла речь во введении, фигурирует множество $PP_n^k = PP_n^k(D)$.

Расширим множество $PP_n^k(F)$. Множество $P_n^k(F)$ состоит из функций s , таких, что выполняется (4), но сейчас нет ограничений на выбор квазикубов $Q_i \in F$. Отметим, что результат (2) доказан для случая приближения множеством $S_n^k := P_n^k(D) \cap C^{k-2}(Q_0)$. Здесь $C^{k-2}(Q_0)$ – пространство функций, заданных на Q_0 и имеющих производные до $k-2$ включительно по каждой переменной.

Перейдем к определению диадического пространства Бесова. Для этого через $E_k(f, Q)_p$ обозначим наилучшее приближение f многочленами из P_k в квазинорме пространства L_p на $Q \subset Q_0$.

Определение 1. Диадическим пространством Никольского – Бесова $B_p^\lambda(F)$, построенным по диадическому семейству F , называется множество функций из $L_p(Q_0)$, для которых конечна величина

$$|f|_{B_{p,k}^\lambda(F)} := \left(\sum_{Q \in F} |Q|^{-\frac{\lambda p}{d}} E_k(f, Q)_p^p \right)^{\frac{1}{p}};$$

здесь $0 < p \leq \infty$, $0 < \lambda < \infty$.

Квазинорма в $B_{p,k}^\lambda(F)$ определяется равенством

$$\|f\|_{B_{p,k}^\lambda(F)} := |f|_{B_{p,k}^\lambda(F)} + \|f\|_{L_p}.$$

Замечание 1. Если $k > \lambda$, то квазинорма от k не зависит.

Замечание 2. Как доказано в [11], $B_p^\lambda \subset B_p^\lambda(F)$ для почти диадического семейства F . С другой стороны, можно так подобрать почти диадические семейства F^j , $j = 1, \dots, 2^d$, что

$$B_p^\lambda = \bigcap_{j=0}^{2^d} B_p^\lambda(F^j).$$

Определение 2. Почти диадическим пространством $BMO_r^k(F)$, $r > 0$ будем называть множество функций из $L_r(Q_0)$, для которых конечна величина

$$|f|_{BMO_r^k(F)} := \sup_{Q \in F} \frac{E_k(f, Q)_r}{|Q|^{\frac{1}{r}}}.$$

Квазинорма в $BMO_r^k(F)$ определяется равенством

$$\|f\|_{BMO_r^k(F)} := |f|_{BMO_r^k(F)} + \|f\|_{L_r}.$$

Замечание 3. Впервые диадическое пространство $BMO(D) = BMO_1^1(D)$ было введено в книге Дж. Гарнета [12]. Оно явилось упрощенной моделью классического пространства BMO (пространства функций ограниченной вариации). Пространство BMO отличается от $BMO(D)$ тем, что верхняя грань в определении квазинормы берется по всем $Q \subseteq Q_0$. Отметим, что $BMO_r^k(F)$ шире пространства $L_\infty(Q_0)$.

Замечание 4. Из неравенства, аналогичного неравенству Джексона – Стромберга, доказанного в статье Ю. Сагера и П. Шварцмана [13], следует, что

$$BMO_r^k(F) = BMO(F);$$

здесь $BMO(F) := BMO_1^1(F)$.

3. Неравенство типа неравенства Джексона

Перейдем теперь к формулировке и доказательству основного результата статьи.

Теорема 1. Пусть $f \in B_{p,k}^{\frac{d}{p}}(F)$. Тогда для любого натурального n существует кусочно-полиномиальная функция $s_n = s_n(f)$ из множества $P_{c_1 n}^k(F)$ такая, что

$$|f - s_n|_{BMO_r^k(F)} \leq c \cdot n^{-\frac{1}{p}} |f|_{B_{p,k}^{\frac{d}{p}}(F)};$$

здесь $0 < p, r < \infty$ и константы c, c_1 не зависят от f и n .

Доказательство. В работе автора [10] была построена кусочно-полиномиальная функция $s_n \in P_{c_1 n}^k(F)$, с помощью которой решалась следующая задача:

$$\|f - s_n\|_{L_\infty} \leq c \cdot n^{-\frac{1}{p}} |f|_{B_p^{\frac{d}{p}}(F)}, \quad (5)$$

где $0 < p \leq 1$. Здесь и всюду ниже мы будем опускать параметр k в обозначении $BMO_r^k(F)$ и $B_{p,k}^{\frac{d}{p}}(F)$.

Если учесть, что $\|f - s_n\|_{BMO_r^k(F)} \leq c \cdot \|f - s_n\|_{L_\infty}$, то теорема 1 в случае $0 < p \leq 1$, $0 < r < \infty$ доказана.

Пусть теперь $p > 1$. Учитывая замечание 4, достаточно доказать теорему для $r = 1$. Не ограничивая общности, можно считать, что $|f|_{B_p^{\frac{d}{p}}(F)} = 1$.

Итак, для $f \in B_p^{\frac{d}{p}}(F)$, $|f|_{B_p^{\frac{d}{p}}(F)} = 1$ нам нужно построить функцию $s_n \in P_{c_1 n}^k(f)$ такую, что выполняется неравенство

$$E_k(f - s_n, Q)_1 \leq c \cdot n^{-\frac{1}{p}} |Q|, \quad (6)$$

где $p > 1$ и $Q \in F$.

Как отмечалось во введении, способ построения функции s_n для решения задачи (6) во многом схож с тем, как была решена задача (5). Отметим, что для решения

задачи (5) применялся алгоритм, который является модификацией алгоритма из статьи Ю.А. Брудного, И.П. Иродовой [6].

Перейдем к описанию алгоритма построения функции $s_n = s_n(f)$.

Обозначим через $P_Q(f)$ многочлен наилучшего приближения функции f на $Q \subset Q_0$ в норме пространства L_p , то есть

$$\|f - P_Q(f)\|_{p(Q)} = E_k(f, Q)_p.$$

Обозначим через $Q' \neq Q_0$ "отца" квазикуба Q , то есть если $Q \in F_n$, то $Q' \in F_{n-1}$ и $Q \subset Q'$. Тогда

$$P_Q^* = P_Q^*(f) := (P_Q(f) - P_{Q'}(f)) \cdot \chi_Q$$

и

$$\lambda_Q^* = \lambda_Q^*(f) = |Q|^{-\frac{1}{p}} \|P_Q^*\|_p.$$

Кроме того, $P_{Q_0}^* = P_{Q_0}(f)$.

Если сравнить эти обозначения с обозначениями статьи [10], то $P_Q^* \approx \lambda_Q^* b_Q$.

Как доказано в [10], каждая функция из $B_p^{\frac{d}{p}}(F)$ допускает представление в виде сходящегося в $L_p(Q_0)$ ряда

$$f = \sum_{Q \in F} P_Q^*(f) \quad (7)$$

и

$$|f|_{B_p^{\frac{d}{p}}(F)} \approx \left(\sum_{Q \in F} \lambda_Q^*(f)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Напомним, что по предположению $\left(\sum_{Q \in F} |\lambda_Q^*|^p \right)^{\frac{1}{p}} \approx c$.

Обозначим через $I(M)$ для $M \in F$ следующую величину

$$I(M) = \sum_{Q \subseteq M} |\lambda_Q^*|^p; \quad (8)$$

здесь суммирование идет по всем квазикубам Q из F .

Заметим, что $I(Q_0) \approx |f|_{B_p^{\frac{d}{p}}(F)}^p$.

1-й шаг (выбор особых квазикубов).

Найдем квазикубы $Q_i \in F$ такие, что

$$I(Q_i) > n^{-1},$$

а для всех $Q \subset Q_i$

$$I(Q) \leq n^{-1}. \quad (9)$$

Будем называть их **особыми**.

Если таких квазикубов нет, то $I(Q_0) \leq n^{-1}$ и $|f|_{B_p^{\frac{d}{p}}(F)} \leq c \cdot n^{-\frac{1}{p}}$. В этом случае

$s_n = 0$ и утверждение теоремы 1 следует из вложения $B_p^{\frac{d}{p}}(F)$ в $BMO_r(F)$ при любом r (см. [10]).

Если особые квазикубы существуют, то они не пересекаются. Иначе они (в силу диадичности) были бы вложены друг в друга, а это противоречило бы их выбору. Кроме того, особых кубов не более $c \cdot n$. Это следует из такой цепочки неравенств:

$$L \cdot \frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^L I(Q_i) \leq I(Q_0) \leq c.$$

2-й шаг (разбиение на простые отрезки).

Из множества всех квазикубов из F выделим только те, которые содержат хотя бы один особый квазикуб. Пусть

$$D(Q_1, \dots, Q_L) := \{Q \in F : \exists Q_i, 1 \leq i \leq L, Q_i \subseteq Q\}.$$

Следуя [6], введем такие обозначения. Отрезок $[J_i, J_j]$ определим по формуле $\{Q : J_i \subseteq Q \subseteq J_j\}$. Аналогично вводятся множества $(J_i, J_j]$, $[J_i, J_j)$.

Будем говорить, что отрезок $[J_i, J_j]$ является **простым** по отношению к семейству $J_1, \dots, J_m$, если в нем не содержится квазикубов J_l , $l = 1, \dots, m$, отличных от J_i и J_j .

Приведем алгоритм разбиения множества $D(Q_1, \dots, Q_L)$ на простые отрезки.

Представим множество всех квазикубов из F в виде дерева с начальной точкой Q_0 и выходящими из каждой вершины 2^d ребрами. Тогда отрезок $[Q_i, Q_j]$ – это путь из Q_i в Q_j . Пусть $|Q_1| \leq |Q_2| \leq \dots \leq |Q_L|$. Выберем вершину, которая соответствует квазикубу Q_1 и поднимемся от нее до начальной вершины Q_0 . Затем поднимемся от вершины Q_2 . Пути $[Q_1, Q_0]$ и $[Q_2, Q_0]$ пересекутся. Найдем их первое пересечение K . Заметим, что $K \in D(Q_1, \dots, Q_L)$. Добавим K к $Q_1, \dots, Q_L$. Процесс повторяем для каждого квазикуба Q_l , $l \geq 3$, поднимаясь до тех пор, пока не начнется пересечение с уже построенными путями. Квазикубы, где происходит первое пересечение, добавляем к $Q_1, \dots, Q_L$. Обозначим множество квазикубов Q_i , $i = 1, \dots, L$ вместе с добавленными к ним квазикубами через J_i , $i = 1, \dots, L_1$.

Как доказано в [10], $L_1 \approx n$, и $D(Q_1, \dots, Q_L)$ мы разбили на $\approx n$ простых по отношению к семейству $\{J_i\}$ отрезков $A_\alpha = [J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2}]$.

3-й шаг (продолжение разбиения на простые отрезки с учетом их "веса").

"Весом" отрезка $A_\alpha = [J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2}]$ назовем величину $I(A_\alpha)$, вычисленную по формуле

$$I(A_\alpha) := \sum_{Q \in (J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2}]} |\lambda_Q^*|^p.$$

Если исключить слагаемое, которое соответствует $Q = J_{\alpha_2}$, то получим определение $I(\dot{A}_\alpha)$ "веса" интервала $\dot{A}_\alpha = (J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2})$. Теперь разобьем A_α на еще более мелкие простые отрезки, если $I(A_\alpha) > \frac{1}{n}$. Выберем минимальный квазикуб Q_β из отрезка A_α такой, что $I([J_{\alpha_1}, Q_\beta]) > \frac{1}{n}$. Если $I([Q_\beta, J_{\alpha_2}]) \leq \frac{1}{n}$, то процесс разбиения закончен. Иначе находим минимальный квазикуб для отрезка $[Q_\beta, J_{\alpha_2}]$ и т.д. В результате получаем разбиение отрезка A_α на простые отрезки C_j , для которых (кроме, возможно, последнего) выполняются условия

$$I(C_j) > \frac{1}{n}$$

и

$$I(\dot{C}_j) \leq \frac{1}{n}.$$

Условие

$$I(\dot{C}_j) \leq \frac{1}{n}$$

выполняется для всех интервалов разбиения.

Добавим квазикубы, которые появились в результате деления A_α , к квазикубам J_i , $i = 1, \dots, L_1$.

Полученное множество квазикубов вновь обозначим через J_i , $j = 1, \dots, L_2$. Итак (см. [10]), множество $D(Q_1, \dots, Q_L)$ мы разбили на $\approx n$ простых отрезков A_α так, что "вес" каждого соответствующего интервала $\dot{A}_\alpha$ не превосходит $\frac{1}{n}$.

То есть

$$D(Q_1, \dots, Q_L) = \left(\bigcup_{A_\alpha \in W} \dot{A}_\alpha \right) \cup \left(\bigcup_{Q \in V} Q \right). \quad (10)$$

Здесь W – множество всех простых отрезков, V – крайние точки простых отрезков, $V = \{J_i, i = 1, \dots, L_2\}$, $L_2 \approx n$.

4-й шаг (построение приближающей функции).

$$s_n = \sum_{Q \in V} P_Q^*(f).$$

Докажем, что для любого $\tilde{Q} \in F$

$$E_k(f - s_n, \tilde{Q})_1 \leq c \cdot n^{-\frac{1}{p}} |\tilde{Q}|.$$

В силу диадичности семейства F все квазикубы разбиваются на три множества: одни лежат в $\tilde{Q}$, другие его содержат, третьи с ним не пересекаются. Поэтому из (7) следует, что

$$f|_{\tilde{Q}} = \sum_{Q \subset \tilde{Q}} P_Q^* \cdot \chi_{\tilde{Q}} + \sum_{Q \supseteq \tilde{Q}} P_Q^* \cdot \chi_{\tilde{Q}}.$$

Обозначим первое слагаемое $f_{\tilde{Q}}$, второе – $y_{\tilde{Q}}$.

Так как $P_Q^* = (P_Q(f) - P_{Q'}(f)) \cdot \chi_Q$, то для $Q \supseteq \tilde{Q}$ получим $P_Q^* \cdot \chi_{\tilde{Q}} = (P_Q(f) - P_{Q'}(f)) \cdot \chi_{\tilde{Q}}$, а значит, $y_{\tilde{Q}} = P_{\tilde{Q}}(f) \cdot \chi_{\tilde{Q}}$. Тогда

$$E_k(f - s_n, \tilde{Q})_1 = E_k(f_{\tilde{Q}} - s_n, \tilde{Q})_1.$$

Разобьем множество всех квазикубов F на два подмножества $G_2 = D(Q_1, \dots, Q_L)$ и $G_1 = F \setminus G_2$. Тогда $f_{\tilde{Q}}$ можно разбить на сумму двух функций $f_{\tilde{Q}}^1$ и $f_{\tilde{Q}}^2$:

$$f_{\tilde{Q}}^i = \sum_{\substack{Q \subset \tilde{Q} \\ Q \in G_i}} P_Q^*, \quad i = 1, 2.$$

Нам нужно доказать, что

$$E_k(f_{\tilde{Q}}^1, \tilde{Q})_1 \leq c \cdot n^{-\frac{1}{p}} |\tilde{Q}| \quad (11)$$

и

$$E_k(f_Q^2 - s_n, \tilde{Q})_1 \leq c \cdot n^{-\frac{1}{p}} |\tilde{Q}|. \quad (12)$$

Прежде всего докажем следующее утверждение, которое имеет и самостоятельное значение.

Лемма 1. Пусть $0 < p, q < \infty$, $M \in F$. Тогда

$$\left\| \sum_{Q \subseteq M} g_Q \chi_Q \right\|_q \leq c \cdot \left(\sum_{Q \subseteq M} \frac{\|g_Q\|_{p(Q)}^p}{|Q|} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot |M|^{\frac{1}{q}};$$

здесь $g_Q \in P_k$ и суммирование идет по квазикубам Q из F .

Доказательство. Пусть сначала $q > p$. Обозначим $g_M = \sum_{Q \subseteq M} g_Q \chi_Q$. Из теоремы вложения, доказанной в [10], следует, что

$$|g_M|_{BMO_q(F)} \leq c \cdot |g_M|_{B_p^{\frac{d}{p}}(F)}. \quad (13)$$

Как доказано в [10],

$$|g|_{B_p^{\frac{d}{p}}(F)} \approx \inf \left(\sum_{Q \in F} \frac{\|h_Q\|_{p(Q)}^p}{|Q|} \right)^{\frac{1}{p}},$$

где точная нижняя грань берется по всем представлениям $g = \sum_{Q \in F} h_Q \chi_Q$, $h_Q \in P_k$.

Учитывая этот факт и определение пространства $BMO_q(F)$, из (13) получим

$$E_k(g_M, \tilde{Q})_q \leq c \cdot \left(\sum_{Q \subseteq M} \frac{\|g_Q\|_{p(Q)}^p}{|Q|} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot |\tilde{Q}|^{\frac{1}{q}} \quad (14)$$

для любого $\tilde{Q} \in F$.

Пусть $M \neq Q_0$. Возьмем в (14) $\tilde{Q} = M'$. Так как $|M'| \approx 2^d |M|$, то из (14) следует, что

$$E_k(g_M, M')_q \leq c \cdot \left(\sum_{Q \subseteq M} \frac{\|g_Q\|_{p(Q)}^p}{|Q|} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot |M|^{\frac{1}{q}}. \quad (15)$$

Остается доказать, что

$$\|g_M\|_q \leq c \cdot E(g_M, M')_q.$$

Для этого напомним результат о свойстве многочлена, доказанном в статье Ю.А. Брудного, М.И. Ганзбурга [14]. Из него следует, что норму многочлена по большему множеству можно оценить через норму многочлена по меньшему множеству с константой, зависящей от отношения размеров этих кубов.

Выберем в $M' \setminus M$ квазикуб $K \in F$ такой, что $|K| \approx |M|$. Это можно сделать, так как M, M' из диадического семейства. Имеем

$$\|P_{M'}(g_M)\|_{L_q(M')} \leq c \cdot \|P_{M'}(g_M)\|_{L_q(K)}.$$

Здесь использовали указанное выше свойство. Так как $|K| \setminus |M'| \approx 2^{-d}$, то константа в этом неравенстве зависит только от q, k, d .

Продолжим оценку:

$$\|P_{M'}(g_M)\|_{L_q(K)} = \|P_{M'}(g_M) - g_M\|_{L_q(K)} \leq \|P_{M'}(g_M) - g_M\|_{L_q(M')}.$$

В первом переходе учли, что $g_M|_K = 0$. Во втором – заменили K на большее множество M' .

Напомним, что $P_{M'}(g_M)$ – это многочлен наилучшего приближения функции g_M на квазикубе M' в норме пространства L_p . Воспользуемся результатом, доказанным Р.А. Девором и В.А. Поповым в [15], в силу которого многочлен наилучшего приближения в $L_p(Q)$ является многочленом "почти" наилучшего приближения и в $L_q(Q)$ при $0 < p < q < \infty$, то есть

$$\|P_{M'}(g_M) - g_M\|_{L_q(M')} \approx E_k(g_M, M')_q.$$

Из трех последних оценок следует неравенство

$$\|P_{M'}(g_M)\|_{L_q(M')} \leq c \cdot E_k(g_M, M')_q.$$

Из двух последних следует

$$\|g_M\|_{L_q} \leq c \cdot E_k(g_M, M')_q.$$

Вместе с (15) это доказывает лемму 1 в случае $M \neq Q_0$.

Пусть теперь $M = Q_0$. Разобьем Q_0 на 2^d квазикубов J_i из разбиения F_1 . Тогда получим

$$\left\| \sum_{Q \subseteq Q_0} g_Q \chi_Q \right\|_q^q \leq c \cdot \left(\sum_{i=1}^{2^d} \left\| \sum_{Q \subseteq J_i} g_Q \chi_Q \right\|_{L_q(J_i)}^q + \|g_{Q_0}\|_q^q \right).$$

К каждому квазикубу J_i применим уже доказанную часть леммы 1. Имеем

$$\left\| \sum_{Q \subseteq J_i} g_Q \chi_Q \right\|_q^q \leq c \cdot \left(\sum_{Q \subseteq J_i} \frac{\|g_Q\|_{p(Q)}^p}{|Q|} \right)^{\frac{q}{p}} \cdot |J_i|.$$

Из выбора квазикубов следует, что $|J_i| \approx 2^{-d}$. Остается учесть числовое неравенство $\sum a_i^m \leq (\sum a_i)^m$, верное при $m \geq 1$. Тогда

$$\left\| \sum_{Q \subseteq Q_0} g_Q \chi_Q \right\|_q^q \leq c \cdot \left(\left(\sum_{Q \subseteq Q_0} \frac{\|g_Q\|_{p(Q)}^p}{|Q|} \right)^{\frac{q}{p}} + \|g_{Q_0}\|_q^q \right).$$

Так как g_{Q_0} – многочлен, то $\|g_{Q_0}\|_q \leq c \cdot \|g_{Q_0}\|_p$, и оба слагаемых можно объединить в одну сумму.

Лемма 1 при $q > p$ доказана. Чтобы доказать лемму 1 в случае $q \leq p$, нужно использовать неравенство Гёльдера, в силу которого

$$\frac{\|g_M\|_{L_{q'}}}{|M|^{\frac{1}{q'}}} \leq \frac{\|g_M\|_{L_q}}{|M|^{\frac{1}{q}}}$$

при $q' < q$.

Лемма 2. Пусть $0 < p, q < \infty$, $M \in G_1$. Тогда

$$\left\| \sum_{Q \subseteq M} P_Q^* \right\|_q \leq c \cdot n^{-\frac{1}{p}} |M|^{\frac{1}{q}}.$$

Доказательство. Применим лемму 1, взяв $g_Q = P_Q(f) - P_{Q'}(f)$. Тогда

$$\left\| \sum_{Q \subseteq M} P_Q^* \right\|_q \leq c \cdot \left(\sum_{Q \subseteq M} |\lambda_Q^*|^p \right)^{\frac{1}{p}} |M|^{\frac{1}{q}};$$

здесь учли, что $\frac{\|P_Q^*\|_{p(Q)}}{|Q|^{\frac{1}{p}}} = |\lambda_Q^*|$.

Из определения (8) следует, что

$$\sum_{Q \subseteq M} |\lambda_Q^*|^p \leq I(M),$$

так как суммирование слева, возможно, идет не по всем Q из F .

По предположению $M \in G_1$, поэтому M не содержит ни одного квазикуба $\{Q_i\}_{i=1}^L$, значит,

$$I(M) \leq n^{-1}.$$

Три последние оценки доказывают лемму 2.

Перейдем к доказательству неравенства (11):

$$E_k(f_{\tilde{Q}}^1, \tilde{Q})_1 \leq c \cdot n^{-\frac{1}{p}} |\tilde{Q}|.$$

Напомним, что $f_{\tilde{Q}}^1 = \sum_{\substack{Q \subseteq \tilde{Q} \\ Q \in G_1}} P_Q^*$, а в множество G_1 попали те квазикубы, кото-

рые не содержат ни одного особого квазикуба. Поэтому существует только две возможности расположения квазикубов из G_1 . Они или вложены в особые квазикубы Q_i , $i = 1, \dots, L$ или с ними не пересекаются, то есть принадлежат множеству

$\Omega_{\tilde{Q}} = \tilde{Q} \setminus \left(\bigcup_{Q_i \subset \tilde{Q}} Q_i \right)$. В зависимости от расположения квазикубов разобьем функцию $f_{\tilde{Q}}^1$ на две:

$$h_{\tilde{Q}}^1 = \sum_{i=1}^L \sum_{\substack{Q \subseteq Q_i \\ Q_i \subseteq \tilde{Q}}} P_Q^* \quad \text{и} \quad h_{\tilde{Q}}^2 = \sum_{Q \subset \Omega_{\tilde{Q}}} P_Q^*.$$

Для оценки $\|h_{\tilde{Q}}^1\|_{L_1}$ воспользуемся свойством (9), которым обладают особые квазикубы: $I(Q) \leq \frac{1}{n}$ для любого $Q \subset Q_i$. Это означает, что любой квазикуб, лежащий в Q_i , принадлежит множеству G_1 . Перейдём от Q_i к квазикубам следующего уровня. Для этого разделим квазикуб Q_i на 2^d квазикубов Y_{Q_i} (Q_i - "отец" Y_{Q_i}). Тогда

$$\left\| \sum_{Q \subset Q_i} P_Q^* \right\|_1 = \sum_{Y_{Q_i}} \left\| \sum_{Q \subseteq Y_{Q_i}} P_Q^* \right\|_1.$$

Так как $Y_{Q_i} \in G_1$, то можем воспользоваться леммой 2:

$$\left\| \sum_{Q \subset Q_i} P_Q^* \right\|_1 \leq c \cdot n^{-\frac{1}{p}} |Q_i|.$$

Здесь учли, что $|Y_{Q_i}| \approx |Q_i|$.

Итак,

$$\|h_{\tilde{Q}}^1\|_1 = \sum_{i=1}^L \left\| \sum_{\substack{Q \subset Q_i \\ Q_i \subseteq \tilde{Q}}} P_Q^* \right\|_1 \leq c \cdot n^{-\frac{1}{p}} \sum_{Q_i \subseteq \tilde{Q}} |Q_i|.$$

Так как особые квазикубы не пересекаются, то $\sum_{Q_i \subseteq \tilde{Q}} |Q_i| \leq |\tilde{Q}|$ и

$$\|h_{\tilde{Q}}^1\|_1 \leq c \cdot n^{-\frac{1}{p}} |\tilde{Q}|. \quad (16)$$

Теперь нужно получить такую же оценку для $h_{\tilde{Q}}^2$. Для этого разобьём множество $\Omega_{\tilde{Q}}$ на непересекающиеся квазикубы из G_1 .

Пусть $\tilde{Q}$ не содержит особых квазикубов, тогда $\Omega_{\tilde{Q}} = \tilde{Q}$ и разбиение состоит из единственного квазикуба $\tilde{Q}$. Если же $\tilde{Q}$ содержит особые квазикубы Q_i , то поступим так. Разобьём $\tilde{Q}$ на 2^d квазикубов Y следующего уровня. Если в Y не попало ни одного особого квазикуба, то $Y \in G_1$ и Y входит в искомое разбиение. Если же в Y попадает хотя бы один искомый квазикуб, то Y подвергается дальнейшему делению. Таким образом, на каждом шаге разбиваем только те квазикубы, в которые попадают Q_i . Этот процесс конечен, и количество шагов определяется размером самого мелкого квазикуба Q_i . Итак, $\Omega_{\tilde{Q}} = \bigcup Z$, где $Z \in G_1$, $Z \subseteq \tilde{Q}$ и Z попарно не пересекаются. Тогда

$$\|h_{\tilde{Q}}^2\|_{L_1} = \sum_Z \left\| \sum_{Q \subseteq Z} P_Q^* \right\|_{L_1}.$$

Вновь применив лемму 2, получим

$$\|h_{\tilde{Q}}^2\|_1 \leq c \cdot n^{-\frac{1}{p}} \sum_{Z \subseteq \tilde{Q}} |Z| \leq c \cdot n^{-\frac{1}{p}} |\tilde{Q}|.$$

Вместе с (16) это доказывает неравенство

$$\|f_{\tilde{Q}}^1\|_{L_1(\tilde{Q})} \leq c \cdot n^{-\frac{1}{p}} |\tilde{Q}|, \quad (17)$$

а значит, и неравенство (11).

Перейдём к доказательству неравенства (12):

$$E_k(f_{\tilde{Q}}^2 - s_n, \tilde{Q})_1 \leq c \cdot n^{-\frac{1}{p}} |\tilde{Q}|.$$

Напомним, что

$$f_{\tilde{Q}}^2 = \sum_{\substack{Q \subset \tilde{Q} \\ Q \in G_2}} P_Q^*.$$

Пусть $\tilde{Q} \in G_1$. Тогда $\tilde{Q}$ не содержит особых квазикубов, а значит, $f_{\tilde{Q}}^2 = 0$.

По построению $s_n = \sum_{Q \in V} P_Q^*$, где Q – квазикубы из G_2 . Так как $\tilde{Q} \in G_1$, то $Q \supset \tilde{Q}$ или Q с $\tilde{Q}$ не пересекаются. Поэтому

$$s_n \cdot \chi_{\tilde{Q}} = \sum_{\substack{Q \in V \\ Q \supset \tilde{Q}}} P_Q^* \cdot \chi_{\tilde{Q}}.$$

Учтем, что P_Q^* на Q (а значит, и на $\tilde{Q}$) многочлен. Так как в сумме $\approx n$ слагаемых, то $s_n|_{\tilde{Q}}$ – многочлен из P_k . Имеем

$$E_k(f_{\tilde{Q}}^2 - s_n, \tilde{Q})_1 = 0.$$

Пусть $\tilde{Q} \in G_2$. Напомним, что $s_n = \sum_{Q \in V} P_Q^*$. Если рассматривать s_n на $\tilde{Q}$, то s_n можно разбить на сумму двух функций:

$$s_n \cdot \chi_{\tilde{Q}} = s_{\tilde{Q}} + g_{\tilde{Q}};$$

где $g_{\tilde{Q}} = \sum_{\substack{Q \in V \\ Q \supset \tilde{Q}}} P_Q^* \cdot \chi_{\tilde{Q}}$ и $s_{\tilde{Q}} = \sum_{\substack{Q \in V \\ Q \subset \tilde{Q}}} P_Q^*$.

Так как каждая из сумм состоит из не более чем n слагаемых, и P_Q^* является многочленом на $\tilde{Q} \subseteq Q$, то и $g_{\tilde{Q}}$ – многочлен на $\tilde{Q}$, поэтому

$$E_k(f_{\tilde{Q}}^2 - s_n, \tilde{Q})_1 = E_k(f_{\tilde{Q}}^2 - s_{\tilde{Q}}, \tilde{Q})_1.$$

Напомним (см. (10)), что множество G_2 мы разбили на простые непересекающиеся интервалы $\dot{A}_\alpha$ и множество V крайних точек. Используя эти обозначения, можно по-другому записать функцию $f_{Q_0}^2 = \sum_{Q \in G_2} P_Q^*$:

$$f_{Q_0}^2 = \sum_{A_\alpha \in W} \left(\sum_{Q \in \dot{A}_\alpha} P_Q^* \right) + \sum_{Q \in V} P_Q^*. \quad (18)$$

Рассмотрим два случая расположения квазикуба $\tilde{Q} \in G_2$. Пусть $\tilde{Q} \in V$ (в частности, $\tilde{Q} = Q_0$). Будем говорить, что интервал $\dot{A}_\alpha$ вложен в $\tilde{Q}$, если все квазикубы

$Q \in \dot{A}_\alpha$ вложены в $\tilde{Q}$. Аналогично $\dot{A}_\alpha \supseteq \tilde{Q}$, если $Q \supseteq \tilde{Q}$ для любого $Q \in \dot{A}_\alpha$. Если $\tilde{Q} \in V$, то все простые интервалы $\dot{A}_\alpha$ лежат в $\tilde{Q}$ или его содержат или с ним не пересекаются. Тогда из определения $f_{\tilde{Q}}^2$ с учетом (18) имеем:

$$f_{\tilde{Q}}^2 = \sum_{A_\alpha \subset \tilde{Q}} \left(\sum_{Q \in \dot{A}_\alpha} P_Q^* \right) + \sum_{\substack{Q \in V \\ Q \subset \tilde{Q}}} P_Q^*;$$

здесь и всюду ниже $A_\alpha \in W$.

Для сокращения записи обозначим $\sum_{Q \in \dot{A}_\alpha} P_Q^* = \varphi_{A_\alpha}$. Тогда

$$f_{\tilde{Q}}^2 - s_{\tilde{Q}} = \sum_{A_\alpha \subset \tilde{Q}} \varphi_{A_\alpha}. \quad (19)$$

Оценим $\|\varphi_{A_\alpha}\|_{L_1}$. Для этого воспользуемся леммой 1. Напомним, что $\varphi_{A_\alpha} = \sum_{Q \in (J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2})} P_Q^*$, $\dot{A}_\alpha = (J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2})$, тогда

$$\|\varphi_{A_\alpha}\|_{L_1} \leq c \cdot \left(\sum_{Q \in (J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2})} \frac{\|P_Q^*\|_{p(Q)}^p}{|Q|} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot |J_{\alpha_2}| = c \cdot I^{\frac{1}{p}}(\dot{A}_\alpha) |J_{\alpha_2}|.$$

По построению "вес" каждого интервала не превосходит $\frac{1}{n}$. Имеем

$$\|\varphi_{A_\alpha}\|_{L_1} \leq c \cdot n^{-\frac{1}{p}} |J_{\alpha_2}|. \quad (20)$$

Из (19) и (20) получим оценку

$$\|f_{\tilde{Q}}^2 - s_{\tilde{Q}}\|_{L_1} \leq c \cdot n^{-\frac{1}{p}} \sum_{J_{\alpha_2} \subset \tilde{Q}} |J_{\alpha_2}|. \quad (21)$$

Здесь учли (см. [10]), что кратность пересечения отрезков не более чем $2^d + 1$.

Перейдем от квазикубов J_{α_2} , которые могут пересекаться, к множествам $\overleftarrow{J_{\alpha_2}} \setminus J_{\alpha_1}$, которые, как доказано в [10], не пересекаются. Здесь через $\overleftarrow{J_{\alpha_2}}$ обозначен самый большой квазикуб отрезка $[J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2}]$, не совпадающий с J_{α_2} . В силу диадичности

$$|J_{\alpha_2}| \approx |\overleftarrow{J_{\alpha_2}}| \approx |\overleftarrow{J_{\alpha_2}} \setminus J_{\alpha_1}|.$$

Тогда

$$\sum_{J_{\alpha_2} \subset \tilde{Q}} |J_{\alpha_2}| \leq c \cdot \sum_{J_{\alpha_2} \subset \tilde{Q}} |\overleftarrow{J_{\alpha_2}} \setminus J_{\alpha_1}| \leq c \cdot |\tilde{Q}|. \quad (22)$$

Вместе с (21) получаем оценку:

$$\|f_{\tilde{Q}}^2 - s_{\tilde{Q}}\|_{L_1} \leq c \cdot n^{-\frac{1}{p}} |\tilde{Q}|. \quad (23)$$

Рассмотрим последний случай: $\tilde{Q} \in G_2$, но $\tilde{Q} \notin V$. Тогда $\tilde{Q}$ принадлежит единственному простому интервалу. Обозначим его $\dot{A}_{\tilde{Q}} = (J_{\alpha_1, \tilde{Q}}, J_{\alpha_2, \tilde{Q}})$. В отличие от случая $\tilde{Q} \in V$ в определении $f_{\tilde{Q}}^2$ появится ещё одно слагаемое, соответствующее интервалу $\dot{A}_{\tilde{Q}}$:

$$f_{\tilde{Q}}^2 = \sum_{A_\alpha \subset \tilde{Q}} \varphi_{A_\alpha} + \sum_{J_{\alpha_1, \tilde{Q}} \subset Q \subset \tilde{Q}} P_Q^* + \sum_{\substack{Q \in V \\ Q \subset \tilde{Q}}} P_Q^*. \quad (24)$$

Обозначим второе слагаемое в правой части (24) $\xi_{\tilde{Q}}$.

Тогда

$$\|f_{\tilde{Q}}^2 - s_{\tilde{Q}}\|_{L_1} \leq \sum_{A_\alpha \subset \tilde{Q}} \|\varphi_{A_\alpha}\|_{L_1} + \|\xi_{\tilde{Q}}\|_{L_1}.$$

Так же, как в случае, когда $\tilde{Q} \in V$, учитывая (20) и (22), получим

$$\sum_{A_\alpha \subset \tilde{Q}} \|\varphi_{A_\alpha}\|_{L_1} \leq c \cdot n^{-\frac{1}{p}} |\tilde{Q}|.$$

Для оценки $\|\xi_{\tilde{Q}}\|_{L_1}$ используем лемму 1, в силу которой

$$\|\xi_{\tilde{Q}}\|_{L_1} \leq c \cdot \left(\sum_{J_{\alpha_1, \tilde{Q}} \subset Q \subset \tilde{Q}} \frac{\|P_Q^*\|_{p(Q)}^p}{|Q|} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot |\tilde{Q}| \leq c \cdot I^{\frac{1}{p}}(\dot{A}_{\tilde{Q}}) \cdot |\tilde{Q}|.$$

Так как "вес" интервала не превышает $\frac{1}{n}$, то три последние оценки дают неравенство

$$\|f_{\tilde{Q}}^2 - s_{\tilde{Q}}\|_{L_1} \leq c \cdot n^{-\frac{1}{p}} |\tilde{Q}|$$

и в случае $\tilde{Q} \notin V$.

Итак, мы рассмотрели все возможные случаи расположения квазикуба $\tilde{Q}$. Этим неравенство (12), а значит, и теорема 1 доказаны.

Замечание 5. Отметим, что в ходе доказательства теоремы 1 было получено неравенство

$$\|f - s_n\|_{BMO_1^k(F)} \leq c \cdot n^{-\frac{1}{p}} |f|_{B_{p,k}^{\frac{d}{p}}(F)}.$$

Действительно, $f = f_{Q_0} + P_{Q_0}(f)$ и $s_n = s_{Q_0} + P_{Q_0}(f)$. Тогда

$$\|f - s_n\|_{L_1(Q_0)} \leq \|f_{Q_0}^1\|_{L_1(Q_0)} + \|f_{Q_0}^2 - s_{Q_0}\|_{L_1(Q_0)}.$$

Теперь нужно учесть неравенства (17) и (23).

4. Следствия

Первый результат этого раздела показывает, что пространство $B_p^{\frac{d}{p}}(F)$ можно описать в терминах приближения в пространстве $BMO(F)$. Для его формулировки дадим определение **аппроксимационного пространства**. Так как $P_n^k(F) + P_m^k(F) \subset P_{n+m}^k(F)$, то $P^k(F) = \{P_n^k(F), n \in N\}$ является аппроксимационным семейством по Петре – Спарру [16]. Следуя этой статье, определим аппроксимационное пространство $E_{\lambda,r}(P^k(F), X)$ с помощью квазинормы

$$|f|_{E_{\lambda,r}(P^k(F), X)} := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{\lambda}{d}} \text{dist}(f, P_n^k(F)_X) \right)^r \frac{1}{n} \right\}^{\frac{1}{r}};$$

здесь $0 < \lambda < \infty$, $r > 0$.

Теорема 2. Пусть $0 < p < \infty$. Тогда

$$B_p^{\frac{d}{p},k}(F) = E_{\frac{d}{p},p}(P^k(F), BMO(F)).$$

Доказательство. Аналогично тому, как это сделано для классических пространств в [15], можно доказать, что

$$B_p^{\frac{d}{p}}(F) = \left(B_{p_1}^{\frac{d}{p_1}}(F), B_{p_2}^{\frac{d}{p_2}}(F) \right)_{\theta,p};$$

здесь $p_1 < p < p_2$ и число $\theta \in (0, 1)$ выбрано так, что $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}$.

Из теоремы 1 и определения аппроксимационного пространства следует, что

$$B_{p_i}^{\frac{d}{p_i}}(F) \subset E_{\frac{d}{p_i},\infty}(P^k(F), BMO(F)) := E_i.$$

Как доказано в [16],

$$(E_1, E_2)_{\theta,p} = E_{\frac{d}{p},p}(P^k(F), BMO(F))$$

и поэтому вложение $B_p^{\frac{d}{p}}(F)$ в $E_{\frac{d}{p},p}(P^k(F), BMO(F))$ получено.

Чтобы доказать противоположное вложение, используем неравенство типа неравенства Бернштейна, доказанное автором в [17]:

$$|g_n|_{B_p^{\frac{d}{p}}(F)} \leq c \cdot n^{\frac{1}{p}} |g_n|_{BMO(F)};$$

здесь $g_n \in P_n^k(F)$.

Как доказано в [18], из этого неравенства следует, что

$$E_{\frac{d}{p},p}(P^k(F), BMO(F)) \subset (B_1(F), B_2(F))_{\theta,p};$$

здесь $B_i(F) = B_{p_i}^{\frac{d}{p_i}}(F)$ и параметры θ, p_1, p_2 удовлетворяют условиям, указанным выше.

Так как правая часть вложения совпадает с $B_p^{\frac{d}{p}}(F)$, то теорема 2 доказана.

Второй результат этого раздела посвящен интерполяции пространств. Ж. Петре и И. Свенсон в [19] решили вопрос об интерполяции пространства BMO и пространства Никольского – Бесова B_p^λ . Теорема 3 является аналогом этого результата для соответствующих диадических пространств.

Теорема 3. Пусть $0 < p < \infty$. Тогда

$$\left(BMO(F), B_p^{\frac{d}{p}}(F) \right)_{\theta, p_\theta} = B_{p_\theta}^{\frac{d}{p_\theta}}(F);$$

здесь $0 < \theta < 1$, $p_\theta = \frac{p}{\theta}$.

Доказательство. Используя теорему 2, заменим $B_p^{\frac{d}{p}}(F)$ на аппроксимационное пространство $E_{\frac{d}{p}, p}^{\frac{d}{p}}(P^k, BMO(F))$. Тогда, как доказано в [16],

$$\left(BMO(F), E_{\frac{d}{p}, p}^{\frac{d}{p}}(P^k, BMO(F)) \right)_{\theta, p_\theta} = E_{\frac{d}{p_\theta}, p_\theta}^{\frac{d}{p_\theta}}(P^k, BMO(F)).$$

Вновь используем теорему 2, взяв там $p = p_\theta$:

$$E_{\frac{d}{p}, p_\theta}^{\frac{d}{p}}(P^k, BMO(F)) = B_{p_\theta}^{\frac{d}{p_\theta}}(F).$$

Теорема 3 доказана.

Список литературы

1. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Кусочно-полиномиальные приближения функций классов W_p^α // Мат. сборник. 1967. Т. 73, № 3. С. 331-355.
2. Иродова И.П. Совместное приближение функции и ее производных в $L_p([0, 1]^n)$ с помощью нелинейных сплайнов // Рукопись представлена Яросл. ун-том. Деп. в ВИНТИ 15 марта 1982, № 1135-82. Ярославль. 1982. С. 23.
3. Брудный Ю.А. Рациональная аппроксимация и теорема вложения // ДАН СССР. 1979. № 247. Вып. 2. С. 269-272.
4. Petrushev P.P. Direct and converse theorems for spline and rational approximation and Besov spaces // Function Spaces and Applications Lund. 1986. Lecture Notes in Math. V. 1302. Springer - Verlag. Berlin. 1988. P. 363-377.
5. Брудный Ю.А., Иродова И.П. Нелинейная сплайн-аппроксимация и B -пространства // Тр. Междунар. конф. по теории приближений. Киев. 1983. М.: Наука, 1987. С. 71-75.

6. Брудный Ю.А., Иродова И.П. Нелинейная сплайн-аппроксимация и B -пространства // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4, № 6. С. 45-79.
7. Devore R.A., Popov V.A. Free multivariate splines // Constr. Approx. 1987. V. 3. P. 239-248.
8. Devore R.A., Jawerth B., Popov V.A. Compression of wavelet decompositions // Amer. J. Math. 1992. V. 114. P. 737-785.
9. Devore R.A., Petrushev P.P., X.M. Yu Nonlinear wavelet approximation in the space $C(R^d)$ // Progress in Approximation Theory (Tampa, FL. 1990), Springer Ser. Comput. Math. V. 19, Springer, New York, 1992. P. 261-283.
10. Иродова И.П. Диадические пространства Бесова // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12. Вып. 3. С. 40-80.
11. Иродова И.П. Некоторые свойства диадических пространств Бесова // Функции, производные, дифференциальные операторы. Проблемы математического образования: Труды международного конф. / Унив. Дружбы народов. Т. 1. М., 1998. С. 78-81.
12. Дж. Гарнет Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1980. 487 с.
13. Sagher Y., Shvartsman P. On the John-Strömberg-Torchinsky Characterization of BMO // Fourier Analysis and Applications. 1998. V. 4, Issues 4 and 5. P. 521-548.
14. Брудный Ю.А., Ганзбург М.И. Об одной экстремальной задаче для многочленов n переменных // Изв. АН СССР. Сер. мат. 37. Вып. 2. 1973. С. 344-355.
15. Devore R.A., Popov V.A. Interpolation of Besov Spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1988. V. 305. P. 397-414.
16. Peetre J., Sparr G. Interpolation of normed Abelian groups // Ann. Mat. Pura Appl. 1972. 92. №4. P. 217-262.
17. Иродова И.П. О неравенстве типа неравенства Бернштейна // Моделирование и анализ информационных систем. 2008. Т. 15, №4. С. 31-41.
18. Брудный Ю.А. Адаптивная аппроксимация функций с особенностями // Тр. ММО. 1994. № 55. С. 123-185.
19. Peetre J., Svensson E. On the Generalized Hardy's inequality of McGehee, Pigno and Smith and the problem of interpolation between BMO and Besov Space // Math. Scand. 54. 1984. P. 221-241.

On the Jackson type inequality in the dyadic BMO space

Irodova I.P.

Keywords: Jackson inequality, dyadic BMO , approximation, interpolation.

In this paper the direct theorem of the approximation theory for functions from the dyadic Besov space is proved. Together with the inverse theorem, it allows to solve an interpolation problem between dyadic BMO and the dyadic Besov space.

Сведения об авторе:

Иродова Ирина Павловна,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
канд. физ.-мат наук, доцент