

УДК 519.16 + 514.172.45

## О нецелочисленных гранях метрического многогранника

Бондаренко В. А., Николаев А. В.<sup>1</sup>

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова  
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

e-mail: bond@bond.edu.yar.ru, werdan.nik@gmail.com

получена 28 июля 2014

**Ключевые слова:** распознавание целочисленности, корневой полуметрический многогранник, метрический многогранник, релаксационный многогранник

На последовательности  $M_{n,k}$  вложенных релаксаций булева квадратичного многогранника, включающей корневой полуметрический  $M_n$  и метрический  $M_{n,3}$  многогранники, рассматривается задача распознавания целочисленности. Ограничения метрического многогранника отсекают все грани корневого полуметрического многогранника, содержащие только нецелочисленные вершины, что позволяет решить задачу распознавания целочисленности на  $M_n$  за полиномиальное время. Для решения задачи распознавания целочисленности на метрическом многограннике исследуется возможность отсечения всех нецелочисленных граней  $M_{n,3}$  некоторой релаксацией  $M_{n,k}$ . Координаты точек метрического многогранника представляются в однородном виде в форме трехмерной блочной матрицы. Показывается, что при исследовании вопроса отсечения нецелочисленных граней метрического многогранника достаточно учитывать только ограничения вида неравенств треугольника.

### 1. Распознавание целочисленности на корневом полуметрическом и метрическом многогранниках

Рассматривается известный класс  $M_n$  *корневых полуметрических многогранников* [1–3], внешние ограничения для которых имеют вид:

$$x_{i,j} + y_{i,j} + z_{i,j} + t_{i,j} = 1, \quad (1)$$

$$x_{i,j} + y_{i,j} = x_{k,j} + y_{k,j}, \quad (2)$$

$$x_{i,j} + z_{i,j} = x_{i,l} + z_{i,l}, \quad (3)$$

$$y_{i,i} = z_{i,i} = 0, \quad (4)$$

---

<sup>1</sup>Исследование выполнено при поддержке РФФИ в рамках проекта № 14-01-00333.

$$x_{i,j} \geq 0, y_{i,j} \geq 0, z_{i,j} \geq 0, t_{i,j} \geq 0, \quad (5)$$

где  $1 \leq i \leq k \leq j \leq l \leq n$ .

Отметим, что координаты точек многогранника  $M_n$  удобно представлять в виде ступенчатой блочной матрицы (Табл. 1).

|           |           |           |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $x_{i,i}$ | 0         | $x_{i,j}$ | $y_{i,j}$ | $x_{i,k}$ | $y_{i,k}$ |
| 0         | $t_{i,i}$ | $z_{i,j}$ | $t_{i,j}$ | $z_{i,k}$ | $t_{i,k}$ |
|           |           | $x_{j,j}$ | 0         | $x_{j,k}$ | $y_{j,k}$ |
|           |           | 0         | $t_{j,j}$ | $z_{j,k}$ | $t_{j,k}$ |
|           |           |           |           | $x_{k,k}$ | 0         |
|           |           |           |           | 0         | $t_{k,k}$ |

Таблица 1. Ступенчатая блочная матрица координат  $M_n$

Корневой полуметрический многогранник является *релаксационным многогранником* для ряда комбинаторных задач, в частности задачи о максимальном разрезе, и булево квадратичное программирование сводится к задаче целочисленного программирования на  $M_n$ , а выпуклая оболочка целых вершин корневого полуметрического многогранника непосредственно совпадает с известным *булевым квадратичным многогранником*  $BQP(n)$  [1, 3].

Особый интерес на корневом полуметрическом многограннике представляет задача распознавания целочисленности [2].

**Задача 1.** Пусть  $\bar{M}$  – некоторый класс выпуклых многогранников. Пусть  $M \in \bar{M}$ , а  $Z$  – множество всех целых точек из  $M$ . Обозначим через  $f(x) = (c, x)$  линейную целевую функцию. Требуется выяснить, выполняется ли равенство

$$\max_{x \in M} f(x) = \max_{z \in Z} f(z).$$

Таким образом, задача распознавания целочисленности отвечает на вопрос: «есть ли среди точек грани, на которой целевая функция достигает максимума, хотя бы одна целая?»

В общем случае, для произвольного многогранника, задача распознавания целочисленности является NP-полной. Однако для  $\bar{M} = \{M_n\}$  справедливо [2]

**Утверждение 1.** Для класса  $\{M_n\}$  корневых полуметрических многогранников задача распознавания целочисленности полиномиально разрешима.

Отметим, что при этом задача целочисленного программирования на  $M_n$  является NP-полной, так как к ней сводятся задачи булева квадратичного программирования и максимальный разрез. Доказательство утверждения 1 опирается на свойства релаксаций булева квадратичного многогранника.

Определим, следуя [4], релаксации булева квадратичного многогранника более высоких уровней. С этой целью выберем натуральное  $k$  ( $k \leq n$ ) и рассмотрим систему неравенств  $S$ , задающую многогранник  $M_k^Z$ ; обозначим через  $\Theta$  число этих

неравенств. Далее для каждого  $k$ -элементного подмножества  $\nu = \{\nu_1, \dots, \nu_k\}$  множества  $\mathbb{N}_n = \{1, \dots, n\}$  рассмотрим систему  $S_\nu$ , получающуюся из системы неравенств  $S$  заменой переменных  $x_{i,j}$ ,  $y_{i,j}$ ,  $z_{i,j}$  и  $t_{i,j}$  соответственно на  $x_{\nu_i, \nu_j}$ ,  $y_{\nu_i, \nu_j}$ ,  $z_{\nu_i, \nu_j}$  и  $t_{\nu_i, \nu_j}$ . Дополним систему (1)–(5) совокупностью всех  $\Theta \cdot C_n^k$  указанных неравенств, а многогранник, который задается расширенной системой ограничений, обозначим через  $M_{n,k}$ . Таким образом, релаксации  $M_{n,k}$  образуют последовательность вложенных друг в друга многогранников:

$$BQP(n) = M_n^Z = M_{n,n} \subseteq M_{n,n-1} \subseteq \dots \subseteq M_{n,k} \subseteq \dots \subseteq M_{n,3} \subseteq M_{n,2} = M_{n,1} = M_n.$$

Следует отметить, что непосредственное построение полного внешнего описания релаксационных многогранников  $M_{n,k}$  является весьма трудоемкой задачей, так как требует полного описания фасет  $M_k^Z$ , совпадающего с булевым квадратичным многогранником  $BQP(k)$  и разрезным многогранником  $CUT(k+1)$ , которое известно лишь для значений  $k \leq 8$  [5].

Первой, отличной от корневого полуметрического многогранника, релаксацией булева квадратичного многогранника является многогранник  $M_{n,3}$ , известный как *метрический* [6]. Многогранник  $M_{n,3}$  задается системой (1)–(5) и дополнительными ограничениями:

$$y_{i,j} + z_{i,k} + y_{j,k} \leq 1, \quad (6)$$

$$x_{i,j} + y_{i,k} + t_{j,k} \leq 1, \quad (7)$$

$$z_{i,j} + t_{i,k} + x_{j,k} \leq 1, \quad (8)$$

$$t_{i,j} + x_{i,k} + z_{j,k} \leq 1, \quad (9)$$

для каждой тройки  $i, j, k \in \mathbb{N}_n$ , где  $i < j < k$ .

Ограничения (6)–(9) известны как *неравенства треугольника* [6].

Ключевое для решения задачи распознавания целочисленности свойство метрического многогранника  $M_{n,3}$  приведено в утверждении 2.

**Утверждение 2.** *Каждая точка многогранника  $M_{n,3}$  является выпуклой комбинацией вершин многогранника  $M_n$ , среди которых есть хотя бы одна целая.*

Таким образом, ограничения метрического многогранника отсекают все грани многогранника  $M_n$ , содержащие только нецелочисленные вершины. Любая граничная точка  $M_{n,3}$  принадлежит грани корневого полуметрического многогранника с хотя бы одной целой вершиной. Поэтому для решения задачи распознавания целочисленности на корневом полуметрическом многограннике достаточно сравнить максимумы целевой функции на  $M_n$  и  $M_{n,3}$ . Задача полиномиально разрешима, так как сводится к двойному применению линейного программирования [2].

Вопрос заключается в том, возможно ли применить подобное рассуждение для задачи распознавания целочисленности на метрическом многограннике  $M_{n,3}$ . Если для некоторого фиксированного значения  $k$  любая точка  $M_{n,k}$  представляет собой выпуклую комбинацию вершин  $M_{n,3}$ , среди которых есть хотя бы одна целая, то задачу распознавания целочисленности на  $M_{n,3}$  можно решить аналогично за полиномиальное время, сравнив значения целевой функции на  $M_{n,3}$  и  $M_{n,k}$ . При этом известно [4], что справедливо

**Утверждение 3.** Для класса  $\{M_{n,3}\}$  метрических многогранников задача распознавания целочисленности  $NP$ -полна.

В частности, к ней сводится задача 3-выполнимости при различных литералах (not-all-equal-3-SAT).

## 2. Трехмерная структура координат метрического многогранника

Дополнительные ограничения вида неравенств треугольника (6)–(9) могут быть представлены в различном виде [3]. Особый интерес представляет структура, введенная в работе [7].

Для каждой тройки индексов  $i, j, k \in \mathbb{N}_n$  ( $i \leq j < k$ ) введем новые координаты

$$x_{i,j,k} = 1 - y_{i,j} - z_{i,k} - y_{j,k}, \quad (10)$$

$$y_{i,j,k} = 1 - t_{i,j} - x_{i,k} - z_{j,k}, \quad (11)$$

$$z_{i,j,k} = 1 - x_{i,j} - y_{i,k} - t_{j,k}, \quad (12)$$

$$t_{i,j,k} = 1 - z_{i,j} - t_{i,k} - x_{j,k}. \quad (13)$$

Новые координаты, в силу (6)–(9), являются неотрицательными. Кроме того, непосредственно устанавливаются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} x_{i,j,k} + y_{i,j,k} + z_{i,j,k} + t_{i,j,k} &= 4 - (x_{i,j} + y_{i,j} + z_{i,j} + t_{i,j}) - \\ &\quad - (x_{i,k} + y_{i,k} + z_{i,k} + t_{i,k}) - (x_{j,k} + y_{j,k} + z_{j,k} + t_{j,k}) = 1, \\ x_{i,j,k} + y_{i,j,k} &= 2 - (y_{i,j} + t_{i,j}) - (x_{i,k} + z_{i,k}) - (y_{j,k} + z_{j,k}), \\ x_{i,j,k} + y_{i,j,k} &= 2 - t_{i,i} - x_{i,i} - (y_{j,k} + z_{j,k}) = 1 - (y_{j,k} + z_{j,k}), \\ x_{i,j,k} + y_{i,j,k} &= x_{j,k} + t_{j,k}, \\ x_{i,j,k} + z_{i,j,k} &= 2 - x_{j,j} - t_{j,j} - (y_{i,k} + z_{i,k}) = x_{i,k} + t_{i,k}, \\ x_{i,j,k} + t_{i,j,k} &= 2 - x_{k,k} - t_{k,k} - (y_{i,j} + z_{i,j}) = x_{i,j} + t_{i,j}, \\ y_{i,i,k} &= (1 - t_{i,i}) - (x_{i,k} + z_{i,k}) = x_{i,i} - x_{i,i} = 0, \\ z_{i,i,k} &= (1 - x_{i,i}) - (y_{i,k} + t_{i,k}) = t_{i,i} - t_{i,i} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в новых координатах метрический многогранник  $M_{n,3}$  задается системой (1)–(5), (10)–(13) и дополнительными ограничениями

$$\forall i, j, k, p, q, r \in \mathbb{N}_n \ (1 \leq i \leq p \leq j \leq q < k \leq r \leq n) :$$

$$x_{i,j,k} + y_{i,j,k} + z_{i,j,k} + t_{i,j,k} = 1, \quad (14)$$

$$x_{i,j,k} + y_{i,j,k} = x_{p,j,k} + y_{p,j,k}, \quad (15)$$

$$x_{i,j,k} + z_{i,j,k} = x_{i,q,k} + z_{i,q,k}, \quad (16)$$

$$x_{i,j,k} + t_{i,j,k} = x_{i,j,r} + t_{i,j,r}, \quad (17)$$

$$y_{i,i,k} = z_{i,i,k} = 0, \quad (18)$$

$$x_{i,j,k} \geq 0, \ y_{i,j,k} \geq 0, \ z_{i,j,k} \geq 0, \ t_{i,j,k} \geq 0. \quad (19)$$

Таблица 2. Слои дополнительных координат для точки  $M_{4,3}$

Многогранники  $M_n$  и  $M_{n,3}$  имеют сходную структуру. Новые координаты удобно представлять в виде трехмерной блочной матрицы, где третий индекс координат обозначает номер слоя (Табл. 2).

Если же исходные координаты записать  $(n+1)$ -м слоем в трехмерную структуру, ПОЛОЖИВ

$$x_{i,j,n+1} = x_{i,j}, \quad y_{i,j,n+1} = y_{i,j}, \quad z_{i,j,n+1} = z_{i,j}, \quad t_{i,j,n+1} = t_{i,j},$$

тогда система (10)–(19) полностью определяет метрический многогранник  $M_{n,3}$ .

Рассмотрим слой  $s$  в трехмерном представлении точки метрического многогранника

$$\begin{aligned}\Delta &= y_{i,j,s} + z_{i,k,s} + y_{j,k,s} = (1 - t_{i,j} - x_{i,s} - z_{j,s}) + \\ &\quad + (1 - x_{i,k} - y_{i,s} - t_{k,s}) + (1 - t_{j,k} - x_{j,s} - z_{k,s}), \\ 1 - x_{i,s} - y_{i,s} &= t_{s,s}, \quad 1 - z_{j,s} - x_{j,s} = t_j, \quad 1 - z_{k,s} - t_{k,s} = x_{s,s}, \\ \Delta &= t_{s,s} + t_{j,j} + x_{s,s} - t_{i,j} - x_{i,k} - t_{j,k}, \\ x_{s,s} + t_{s,s} &= x_{i,i} + t_{i,i}, \\ \Delta &= (t_{i,i} - t_{i,j}) + (x_{i,i} - x_{i,k}) + (t_{j,j} - t_{j,k}), \\ \Delta &= y_{i,j} + z_{i,k} + y_{j,k} = 1 - x_{i,j,k}, \\ x_{i,j,k} &= 1 - y_{i,j,s} - z_{i,k,s} - y_{j,k,s}.\end{aligned}$$

Аналогичные утверждения верны и для координат  $y_{i,j,k}, z_{i,j,k}, t_{i,j,k}$ . Таким образом, каждый слой  $s$  трехмерного представления точки метрического многогранника  $M_{n,3}$  порождает все слои  $k$ , где  $k < s$ .

### 3. Операция инвертирования точки

Рассмотрим операцию *инвертирования* [4, 8], которая произвольную точку  $w \in M_n$  превращает в точку  $w^* = Inv_j(w)$ , по следующим правилам:

$$\begin{aligned} x_{j,j}^* &= t_{j,j}, & t_{j,j}^* &= x_{j,j}, \\ x_{i,j}^* &= z_{i,j}, & y_{i,j}^* &= t_{y,j}, & z_{i,j}^* &= x_{i,j}, & t_{i,j}^* &= y_{y,j}, \\ x_{j,k}^* &= y_{j,k}, & y_{j,k}^* &= x_{j,k}, & z_{j,k}^* &= t_{j,k}, & t_{j,k}^* &= z_{j,k}, \end{aligned}$$

для всех  $1 \leq i < j < k \leq n$  (Табл. 3).

|           |           |           |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $x_{i,i}$ | 0         | $x_{i,j}$ | $y_{i,j}$ | $x_{i,k}$ | $y_{i,k}$ |
| 0         | $t_{i,i}$ | $z_{i,j}$ | $t_{i,j}$ | $z_{i,k}$ | $t_{i,k}$ |
|           |           | $x_{j,j}$ | 0         | $x_{j,k}$ | $y_{j,k}$ |
|           |           | 0         | $t_{j,j}$ | $z_{j,k}$ | $t_{j,k}$ |
|           |           |           |           | $x_{k,k}$ | 0         |
|           |           |           |           | 0         | $t_{k,k}$ |

 $\Rightarrow$ 

|           |           |           |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $x_{i,i}$ | 0         | $z_{i,j}$ | $t_{i,j}$ | $x_{i,k}$ | $y_{i,k}$ |
| 0         | $t_{i,i}$ | $x_{i,j}$ | $y_{i,j}$ | $z_{i,k}$ | $t_{i,k}$ |
|           |           | $t_{j,j}$ | 0         | $y_{j,k}$ | $x_{j,k}$ |
|           |           | 0         | $x_{j,j}$ | $t_{j,k}$ | $z_{j,k}$ |
|           |           |           |           | $x_{k,k}$ | 0         |
|           |           |           |           | 0         | $t_{k,k}$ |

Таблица 3. Операция инвертирования точки

Нетрудно проверить, что так построенная точка  $w^*$  удовлетворяет системе (1)–(5), в силу ее симметричности, и также принадлежит многограннику  $M_n$ .

**Лемма 1.** Если точка  $w$  принадлежит многограннику  $M_{n,k}$ , то любая ее инверсия  $Inv_j(w)$  также принадлежит многограннику  $M_{n,k}$ .

*Доказательство.* Многогранник  $M_{n,k}$  получается из корневого полуметрического многогранника  $M_n$  наложением ограничений булева квадратичного многогранника  $BQP(k)$  на каждое  $k$ -элементное подмножество индексов.

Если некоторая точка  $v$  принадлежит многограннику  $BQP(k)$ , то ее можно разложить в выпуклую комбинацию целых вершин

$$v = \sum \alpha_i z_i, \\ \sum \alpha_i = 1, \forall i : \alpha_i \geq 0.$$

Учитывая, что операция инвертирования лишь переставляет местами координаты, получаем

$$Inv_j(v) = \sum \alpha_i (Inv_j(z_i)).$$

При инвертировании целые вершины многогранника  $BQP(k)$  всегда переходят в другие целые вершины [3]. Соответственно точка  $Inv_j(v)$  также принадлежит булеву квадратичному многограннику  $BQP(k)$ .

Таким образом, если точка  $w$  принадлежит многограннику  $M_{n,k}$ , то любая ее инверсия  $Inv_j(w)$  удовлетворяет системе (1)–(5) и ограничениям многогранника  $BQP(k)$ , для каждого  $k$ -элементного подмножества индексов, а значит,  $Inv_j(w)$  также принадлежит  $M_{n,k}$ .  $\square$

## 4. Ограничения метрического многогранника

Дальнейшие рассуждения связаны с вопросом об отсечении всех граней метрического многогранника  $M_{n,3}$ , имеющих только нецелые вершины, ограничениями многогранника  $M_{n,k}$  при  $k > 3$ . Такие грани будем называть *нецелочисленными*. Достаточное условие на принадлежность точки метрического многогранника нецелочисленной грани приведено в утверждении 4 [4].

**Утверждение 4.** Если для каждой инверсии точки  $w \in M_{n,3}$  найдется такая тройка  $i, j, k \in \mathbb{N}_n$ , для которой

$$y_{i,j} + z_{i,k} + y_{j,k} = 1,$$

то в любом разложении  $w$  в виде выпуклой комбинации вершин  $M_{n,3}$  нет ни одной целой вершины.

При инвертировании точки ограничения (6)–(9) преобразуются друг в друга, поэтому проверка принадлежности точки нецелочисленной грани  $M_{n,3}$  по утверждению 4 заключается в последовательном инвертировании с целью исключения жестких ограничений вида (6). Это можно реализовать в виде проверки свойств гиперграфа точки метрического многогранника  $M_{n,3}$ , ребрами которого являются тройки  $i, j, k$ , для которых одно из неравенств треугольника (6)–(9) выполняется как равенство [4].

В работах [8, 9] показано, что ограничений многогранников  $M_{n,4}$  и  $M_{n,5}$  не достаточно для полного отсека нецелочисленных граней метрического многогранника  $M_{n,3}$ . Остаются точки, в любом разложении которых в выпуклые комбинации вершин  $M_{n,3}$  нет ни одной целой вершины.

Отметим, что условие из утверждения 4 очевидным образом не является необходимым. Достаточно рассмотреть точку из Табл. 4 многогранника  $M_{4,3}$ .

|               |               |               |               |               |               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\frac{1}{3}$ | 0             | 0             | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |
| 0             | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 0             | $\frac{1}{3}$ | 0             | $\frac{1}{3}$ |
|               |               | $\frac{1}{3}$ | 0             | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |
|               |               | 0             | $\frac{2}{3}$ | 0             | $\frac{1}{3}$ | 0             | $\frac{1}{3}$ |
|               |               |               | $\frac{2}{3}$ | 0             | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |
|               |               |               | 0             | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 0             |               |
|               |               |               |               |               | $\frac{2}{3}$ | 0             |               |
|               |               |               |               |               | 0             | $\frac{1}{3}$ |               |

Таблица 4. Координаты вершины многогранника  $M_{4,3}$

Все неравенства вида (6) для нее выполняются как строгие, при этом точка является нецелочисленной вершиной  $M_{4,3}$  [10].

Таким образом, в конструкциях, основанных на утверждении 4, не используется полное описание нецелочисленных граней метрического многогранника  $M_{n,3}$ . Однако, как будет показано далее, для анализа задачи распознавания целочисленности на  $M_{n,3}$  достаточно ограничиться рассмотрением лишь неравенств треугольника (6)–(9).

**Теорема 1.** Если существует такое  $k_0$ , что для любого  $n$  и для любой точки  $w \in M_{n,k_0}$  найдется целая точка  $w_z$ , для которой жесткими являются все жесткие ограничения вида неравенств треугольника точки  $w$ , то найдется целая точка, у которой жесткими будут все жесткие ограничения точки  $w$ .

*Доказательство.* Рассмотрим точку  $w$  многогранника  $M_{n,k_0}$ . Построим точку  $v \in M_{n+1}$  со следующими координатами:

$$\begin{aligned} \forall i, j : (1 \leq i \leq j \leq n), \\ x_{i,j}^v = x_{i,j}^w, \quad y_{i,j}^v = y_{i,j}^w, \quad z_{i,j}^v = z_{i,j}^w, \quad t_{i,j}^v = t_{i,j}^w, \\ x_{i,n+1}^v = x_{i,i}^w, \quad y_{i,n+1}^v = t_{i,i}^w, \quad x_{n+1,n+1}^v = 1. \end{aligned}$$

Точка  $v$  удовлетворяет ограничениям (1)–(5) и принадлежит корневому полуметрическому многограннику. Кроме того, если точка  $w$  принадлежит булеву квадратичному многограннику  $BQP(n)$ , тогда ее можно разложить в выпуклую комбинацию целых вершин

$$\begin{aligned} w &= \sum \alpha_i z_i, \\ \sum \alpha_i &= 1, \quad \forall i : \alpha_i \geq 0. \end{aligned}$$

К каждой вершине  $z_i$  многогранника  $BQP(n)$  добавим столбец из блоков координат таким образом, что  $x_{n+1,n+1} = 1$ , а остальные координаты определяются из системы (1)–(5). Построенная данным образом точка  $z_i^*$  будет целочисленной вершиной многогранника  $BQP(n+1)$  [3]. Соответственно,

$$\begin{aligned} v &= \sum \alpha_i z_i^*, \\ \sum \alpha_i &= 1, \quad \forall i : \alpha_i \geq 0, \end{aligned}$$

и точка  $v$  принадлежит многограннику  $BQP(n+1)$ .

По построению, точка  $v$  удовлетворяет всем ограничениям булева квадратичного многогранника, которым удовлетворяет точка  $w$ , и если  $w \in M_{n,k_0}$ , то и  $v \in M_{n+1,k_0}$ .

Инвертируем точку  $v$  по всем строкам из блоков. По лемме 1 точка  $Inv(v)$  также принадлежит многограннику  $M_{n+1,k_0}$ . Рассмотрим точку

$$w^* = \frac{v + Inv(v)}{2}.$$

Как середина отрезка она также принадлежит многограннику  $M_{n+1,k_0}$ . Ее координаты имеют вид

$$\begin{aligned} \forall i, j : (1 \leq i \leq j \leq n) : \\ x_{i,j}^{w^*} = t_{i,j}^{w^*} = \frac{x_{i,j}^w + t_{i,j}^w}{2}, \\ y_{i,j}^{w^*} = z_{i,j}^{w^*} = \frac{y_{i,j}^w + z_{i,j}^w}{2}, \\ x_{i,n+1}^{w^*} = t_{i,n+1}^{w^*} = \frac{x_{i,i}^w}{2}, \\ y_{i,n+1}^{w^*} = z_{i,n+1}^{w^*} = \frac{1 - x_{i,i}^w}{2}. \end{aligned}$$

Точка  $w^*$  принадлежит многограннику  $M_{n+1,k_0}$  и, так как  $k_0 > 3$ , многограннику  $M_{n+1,3}$ . Построим трехмерную блочную матрицу дополнительных координат, включающую координаты  $w^*$  в качестве  $(n+2)$ -го слоя. Рассмотрим слой  $n+1$ :

$$\begin{aligned} x_{i,j,n+1}^{w^*} &= 1 - \frac{y_{i,j}^w + z_{i,j}^w}{2} - \frac{1 - x_{i,i}^w}{2} - \frac{1 - x_{j,j}^w}{2}, \\ x_{i,j,n+1}^{w^*} &= \frac{1}{2}((x_{i,i}^w - z_{i,j}^w) + (x_{j,j}^w - y_{i,j}^w)) = \frac{1}{2}(2x_{i,j}^w) = x_{i,j}^w. \end{aligned}$$



Аналогично, нетрудно проверить, что

$$y_{i,j,n+1}^{w^*} = y_{i,j}^w, \quad z_{i,j,n+1}^{w^*} = z_{i,j}^w, \quad t_{i,j,n+1}^{w^*} = t_{i,j}^w.$$

Таким образом, слой  $n + 1$  точки  $w^*$  совпадает с координатами точки  $w$ . Так как каждый слой определяет все лежащие выше слои, то начиная с  $(n + 1)$ -го слоя и выше координаты точек  $w$  и  $w^*$  совпадают.

По условию теоремы для точки  $w^*$  найдется такая целая точка  $w_z^*$ , для которой жесткими являются все жесткие ограничения вида неравенств треугольника точки  $w^*$ . В дополнительных координатах они принимают вид (19). По построению, ограничения (19) полностью совпадают с неравенствами, определяющими точку  $w$ . Соответственно, если исключить из точки  $w_z^*$  последний  $(n + 2)$ -й слой, то получится целая точка  $w_z$ , для которой жесткими будут все жесткие ограничения точки  $w$ .  $\square$

Таким образом, несмотря на то, что утверждение 4 не является необходимым условием принадлежности точки метрического многогранника  $M_{n,3}$  грани без целых вершин, неравенства треугольника (6)–(9) являются ключевыми, и можно ограничиться только ими при исследовании вопроса отсечения нецелочисленных граней и анализе задачи распознавания целочисленности на метрическом многограннике.

## Список литературы

1. Padberg M. V. The Boolean quadratic polytope: some characteristics, facets and relatives // Mathematical Program. 1989. V. 45. P. 139–172.
2. Бондаренко В. А., Урываев Б. В. Об одной задаче целочисленной оптимизации // АиТ. 2007. № 6. С. 18–23.  
(English transl.: Bondarenko V. A., Uryvaev B. V. On One Problem of Integer Optimization // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. Iss. 6. P. 948–953.)
3. Бондаренко В. А., Максименко А. Н. Геометрические конструкции и сложность в комбинаторной оптимизации. М.: ЛКИ, 2008. 184 с.  
[Bondarenko V. A., Maksimenko A. N. Geometricheskie konstruksii i slozhnost v kombinatornoy optimizatsii. Moscow: LKI, 2008 (in Russian)].
4. Бондаренко В. А., Николаев А. В. Об одном классе гиперграфов и о вершинах релаксаций разрезного многогранника // Докл. РАН. 2012. Т. 442. № 3. С. 300–302.  
(English transl.: Bondarenko V. A., Nikolaev A. V. A Class of Hypergraphs and Vertices of Cut Polytope Relaxations // Doklady Mathematics. 2012. V. 85. Iss. 1. P. 46–47.)
5. Christof T., Reinelt G. Efficient parallel facet enumeration for 0/1-polytopes. Technical report. Institut fur Angewandte Mathematik. Universitat Heidelberg. 1997.
6. Deza M. M., Laurent M. Geometry of Cuts and Metrics (Algorithms and Combinatorics). 2nd ed. Springer, 2009.
7. Бондаренко В. А., Николаев А. В. О подобии разных релаксаций разрезного многогранника // Научные исследования факультета информатики и вычислительной техники: Сборник статей к 25-летию факультета. Ярославль, 2011. С. 17–21.

- [Bondarenko V. A., Nikolaev A. V. О подобии разных релаксаций разрезного многогранника // Научные исследования факультета информатики и вычислительной техники: Сборник статей к 25-летию факультета. Ярославль, 2011. С. 17–21 (in Russian)].
8. Николаев А.В. Гиперграфы специального вида и анализ свойств релаксаций разрезного многогранника // Моделирование и анализ информационных систем. 2011. Т. 18. № 3. С. 82–100.  
[Nikolaev A. V. Hypergraphs of Special Type and CUT Polytope Relaxations Properties Analysis // Model. and Anal. Inform. Syst. 2011. Vol. 18. № 3. P. 82–100 (in Russian)].
  9. Бондаренко В. А., Николаев А. В. Некоторые свойства релаксаций разрезного многогранника // Ярославский педагогический вестник. 2011. Т. 3 (Естественные науки). № 2. С. 23–29.  
[Bondarenko V. A., Nikolaev A. V. Some Properties of Cut Polytope Relaxations // Yaroslavl Pedagogical Bulletin. 2011. Vol. 3. № 2. P. 23–29 (in Russian)].
  10. Laurent M. Graphic vertices of the metric polytope // Discrete Mathematics. 1996. Vol. 151. Iss. 1–3. P. 131–153.

## Some Properties of Metric Polytope Constraints

Bondarenko V. A., Nikolaev A. V.

*P.G. Demidov Yaroslavl State University, Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia*

**Keywords:** integrality recognition, rooted semimetric polytope, metric polytope, relaxation polytope

The integrality recognition problem is considered on the sequence  $M_{n,k}$  of the nested Boolean quadric polytope relaxations, including the rooted semimetric  $M_n$  and the metric  $M_{n,3}$  polytopes. Constraints of the metric polytope cut off all faces of the rooted semimetric polytope, containing only fractional vertices, that allows to solve the problem of integrality recognition on  $M_n$  in polynomial time. To solve the problem of integrality recognition on the metric polytope, we consider the possibility of cutting off all fractional faces of  $M_{n,3}$  by some relaxation  $M_{n,k}$ . We represent the coordinates of the metric polytope in a homogeneous form by a three-dimensional block matrix. We show that to answer the question of the metric polytope fractional faces cutting off, it is sufficient to consider only constraints of the triangle inequalities form.

### Сведения об авторах:

**Бондаренко Владимир Александрович,**

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой дискретного анализа

**Николаев Андрей Валерьевич,**

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры дискретного анализа