Модел. и анализ информ. систем. Т. **16**, № **3** (2009) 47–58

УДК 517.928 + 517.929

Исправления и дополнения к статье «Поправка к периоду решения уравнения, моделирующего динамику мембранного потенциала нейрона»

Дунаева О.А., Мячин М.Л.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: Ltwood@gmail.com

получена 12 сентября 2009

Ключевые слова: биологический нейрон, дифференциальное уравнение с запаздыванием, асимптотические методы

Представлен исправленный вариант формулировки и доказательства теоремы из статьи «Поправка к периоду решения уравнения, моделирующего динамику мембранного потенциала нейрона», в которой была получена оценка первого порядка точности для периода решения уравнения с запаздыванием, моделирующего биологический нейрон.

В работе [1] получена оценка периода решения уравнения с запаздыванием, моделирующего биологический нейрон. Эта оценка имеет первый порядок точности по величине, обратной к значению большого параметра. Изложенная в [1] техника вычисления периода имеет большое методическое значение, поскольку она может быть использована для решения многих задач, связанных с получением оценок продолжительности нейронных процессов. К сожалению, в работе [1] были допущены некоторые неточности. Поэтому мы считаем необходимым представить здесь исправленный вариант формулировки и доказательства теоремы, который существенно облегчит использование представленной в [1] техники.

Теорема 1. *Пусть дважды непрерывно дифференцируемые положительные функции $f_{Na}(u)$ и $f_K(u)$ монотонно убывают и при $u \to \infty$ стремятся к нулю быстрее, чем $O(u^{-1})$, т.е. найдется такое $\varepsilon > 0$, что при $u \to \infty$ выполнены следующие соотношения:*

$$f_{Na}(u) = O(u^{-1-\varepsilon}), \qquad f_K(u) = O(u^{-1-\varepsilon}). \tag{1}$$

Пусть также выполнены соотношения

$$f'_{Na}(0) = f'_K(0) = 0, \tag{2}$$
$$\alpha = f_K(0) - f_{Na}(0) - 1 > 0. \tag{3}$$

Тогда для периода T решения $u(t)$ уравнения

$$\dot{u}(t) = \lambda \left[f_K(u(t-1)) - f_{Na}(u(t)) - 1 \right] u(t) \tag{4}$$

с начальной функцией $\varphi \in S'$, где

$$S' = \left\{ \varphi \in C[-1,0] : \, \lambda^{-1} \exp(2\lambda\alpha s) \leqslant \varphi(s) \leqslant \lambda^{-1} \exp(\lambda\alpha s/2) \right\}, \tag{5}$$

при $\lambda \to +\infty$ справедливо асимптотическое представление

$$\begin{gathered} T = T_2 + \Delta T + o(\lambda^{-1}), \\ T_2 = 2 + \alpha_1 + \alpha_2/\alpha, \\ \Delta T = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \left[\frac{f_K(u) - \alpha_1}{\alpha_1 - f_{Na}(u)} + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha - f_K(u)}{1 + f_{Na}(u)} \right] \frac{du}{u}, \end{gathered} \tag{6}$$

где

$$\alpha_1 = f_K(0) - 1, \tag{7}$$

$$\alpha_2 = f_{Na}(0) + 1. \tag{8}$$

Доказательство теоремы 1 основывается на следующем утверждении, сформулированном в [2].

Теорема 2. *Если начальная функция $\varphi(s)$ выбирается из множества S', определенного формулой (5), а гладкие положительные монотонно убывающие функции $f_{Na}(u)$ и $f_K(u)$ стремятся к нулю при $u \to \infty$, то для решения $u(t)$ уравнения (4) при $\lambda \to \infty$ имеют место следующие асимптотические равенства:*

$$u(t) = \begin{cases} \exp[\lambda\alpha_1(t - t_1 + o(1))], & t \in [t_1, t_2], \\ \exp[-\lambda(t - t_3 - \alpha_1 + o(1))], & t \in [t_3, t_4], \\ \exp[-\lambda\alpha_2(t - t_5 + o(1))], & t \in [t_5, t_6], \\ \exp[\lambda\alpha(t - t_7 - \alpha_2/\alpha + o(1))], & t \in [t_7, t_8], \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} t_1 &= o(1), & t_2 &= 1, \\ t_3 &= t_2 + o(1), & t_4 &= t_3 + \alpha_1, \\ t_5 &= t_4 + o(1), & t_6 &= t_5 + 1, \\ t_7 &= t_6 + o(1), & t_8 &= t_7 + \alpha_2/\alpha, \end{aligned}$$

а величины α, α_1 и α_2 определены формулами (3), (7) и (8). Символом $o(1)$ обозначены слагаемые, стремящиеся при $\lambda \to \infty$ к нулю равномерно относительно выбора начальной функции $\varphi \in S'$.

Описанное в теореме 2 асимптотическое поведение решения $u(t)$ уравнения (4) может быть проиллюстрировано рисунком 1.

Доказательству теоремы предпошлем ряд простых и полезных лемм (их доказательства тривиальны).

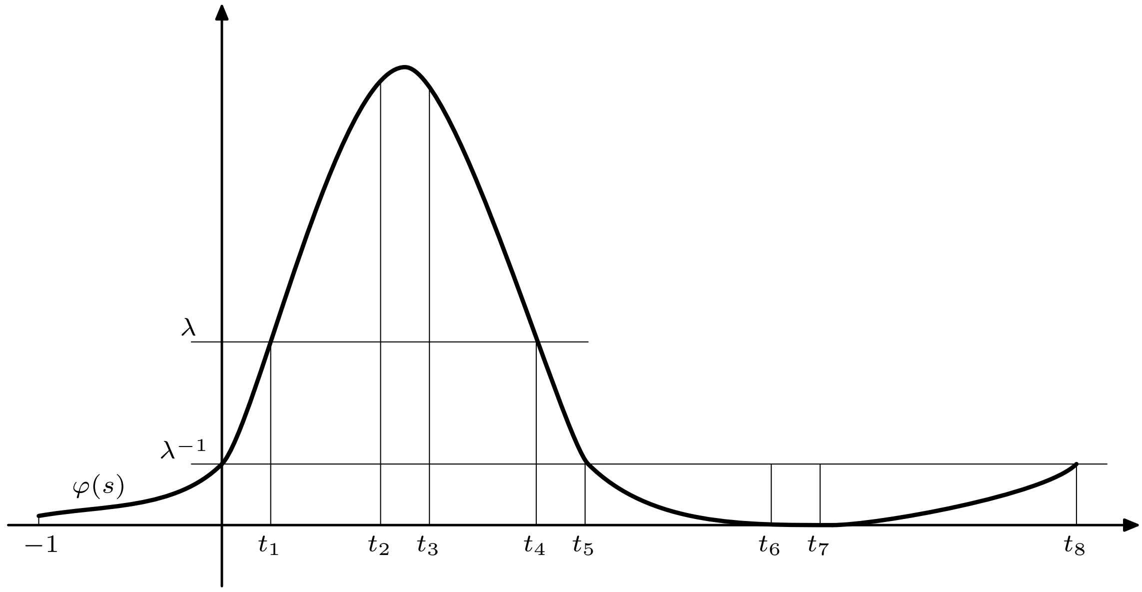

Рис. 1. Схематический график решения уравнения нейрона

Лемма 1. *Если в начальной задаче вида*

$$\dot{u} = \lambda p u, \qquad u(0) = u_0$$

при $\lambda \to \infty$ числовой параметр p известен с точностью $o(\lambda^{-\beta})$ при некотором $\beta > 0$, а начальное значение $u_0 > 0$ известно с относительной точностью $o(\lambda^{-\gamma})$ при некотором $\gamma > 0$, то момент времени, в который решение достигает заданного уровня определяется с точностью порядка $o(\lambda^{-q})$, где $q = \min\{\beta, \gamma + 1\}$.

Лемма 2. *Если в начальной задаче вида*

$$\dot{u} = \lambda p u, \qquad u(0) = u_0$$

при $\lambda \to \infty$ числовой параметр p известен с точностью $o(\lambda^{-\beta})$ при некотором $\beta > 0$, то значение решения в фиксированный момент времени $t = O(1)$ определяется с относительной точностью порядка $o(\lambda^{-\beta+1})$.

Отметим, что говоря о точности $o(\lambda^{-m})$ задания некоторого параметра x, мы имеем в виду, что вместо точного значения $\bar{x}$ для этого параметра используется асимптотическая оценка $\tilde{x}$, для которой справедливо равенство $\tilde{x} = \bar{x} + o(\lambda^{-m})$. Аналогично, говоря об относительной точности $o(\lambda^{-m})$ задания некоторого параметра x, мы имеем в виду использование асимптотической оценки $\tilde{x}$, для которой справедливо равенство $\tilde{x} = \bar{x}[1 + o(\lambda^{-m})]$.

Введем оператор

$$L[u](t) = f_{\mathrm{K}}(u(t-1)) - f_{\mathrm{Na}}(u(t)) - 1 \tag{9}$$

и перепишем уравнение (4) следующим образом:

$$\dot{u} = \lambda L[u]u. \tag{10}$$

Из лемм 1 и 2 непосредственно следует вывод относительно необходимой точности для каждого шага построения асимптотики. Для получения оценки периода с погрешностью порядка $o(\lambda^{-1})$ длины всех временны́х интервалов также должны вычисляться с погрешностью порядка $o(\lambda^{-1})$. Для тех временны́х интервалов, окончание которых связано с достижением решением некоторого заданного значения, а начальное значение задано точно, требование к точности определяется леммой 1. Полагая формально $\gamma = \infty$, получаем, что значения оператора $L[u]$ должны быть определены с точностью не хуже $o(\lambda^{-1})$. Часть интервалов имеют фиксированную известную длину, и неточность задания значений оператора $L[u]$ на этих интервалах приводит к погрешности в определении значения решения на конце интервала, которая описывается леммой 2. Такая погрешность, в свою очередь, приводит к погрешности в определении длительности следующего интервала, которая снова описывается леммой 1. В результате для такой пары интервалов для вычисления суммарной длительности с погрешностью порядка $o(\lambda^{-1})$ требуется на каждом интервале задавать значения оператора $L[u]$ с точностью не хуже $o(\lambda^{-1})$. Таким образом, для получения оценки периода с погрешностью порядка $o(\lambda^{-1})$ значения оператора $L[u]$ на каждом шаге должны быть определены с точностью не хуже $o(\lambda^{-1})$.

Лемма 3. *Если $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывные функции, причем $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) \geqslant \delta > 0$, то*

$$\int\limits_{\lambda^{-1}}^{\lambda} \frac{f(x)}{g(x) + o(\lambda^{-\beta})} \frac{dx}{x} = \int\limits_{\lambda^{-1}}^{\lambda} \frac{f(x)}{g(x)} \frac{dx}{x} + o(\lambda^{-\beta} \ln \lambda).$$

Лемма 4. *Пусть при каждом $\lambda > 0$ определена непрерывно дифференцируемая функция $f_\lambda(u)$, причем $f_\lambda(0) = 0$ и при $\lambda \to \infty$ выполнено асимптотическое равенство $f_\lambda(u) = o(\lambda^{-1})$. Тогда при $\lambda \to \infty$ справедлива оценка*

$$\int_0^{\lambda^{-1}} f_\lambda(u) u^{-1}\, du = o(\lambda^{-1}).$$

Лемма 5. *Если для непрерывной функции $f(u) > 0$ при некотором $\varepsilon > 0$ выполнено равенство $f(u) = O(u^{-1-\varepsilon})$, то при $\lambda \to \infty$ справедлива оценка*

$$\int_\lambda^{\infty} f(u) u^{-1}\, du = o(\lambda^{-1}).$$

Доказательство теоремы 1.

При доказательстве мы будем пользоваться стандартным методом шагов, разбивая период решения на подынтервалы $[t_j, t_{j+1}]$, где $j = 0, \ldots, 7$ (здесь $t_0 = 0$). Значения границ t_j интервалов в нулевом приближении (т.е. с точностью $o(1)$) определены теоремой 2. Отметим, что в процессе доказательства мы уточним значение каждой границы t_j, не вводя новых обозначений для получаемых более точных оценок[1]. Доказательство разбивается на этапы, каждый из которых соответствует одному интервалу $[t_j, t_{j+1}]$.

[1]Используемые нами обозначения границ интервалов отличаются от обозначений из [1]. Границам t_1, t_2 и t_3 из [1] в наших обозначениях соответствуют границы t_1, t_4 и t_5 соответственно.

1. Рассмотрим интервал $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, где $t_0 = 0$ и $t_1 = o(1)$. Поскольку на этом интервале выполнено неравенство $-1 \leqslant t-1 \leqslant 0$, то уравнение (4) может быть переписано следующим образом:

$$\dot{u} = \lambda[f_{\mathrm{K}}(\varphi(t-1)) - f_{\mathrm{Na}}(u) - 1]u.$$

Кроме того, выполнено неравенство $\varphi(t-1) \leqslant \lambda^{-1}$, поэтому с учетом равенства $f'_{\mathrm{K}}(0) = 0$ для функции $f_{\mathrm{K}}(\varphi(t-1))$ имеет место следующее разложение в ряд Тэйлора:

$$f_{\mathrm{K}}(\varphi(t-1)) = f_{\mathrm{K}}(0) + o(\varphi(t-1)) = f_{\mathrm{K}}(0) + o(\lambda^{-1}).$$

Пренебрегая слагаемыми порядка $o(\lambda^{-1})$, получаем уравнение

$$\dot{u} = \lambda\,[\alpha_1 - f_{\mathrm{Na}}(u)]\,u.$$

В силу того, что $u(0) = \lambda^{-1}$ и $u(t_1) = \lambda$, из этого уравнения следует равенство

$$t_1 = \lambda^{-1}\int_{\lambda^{-1}}^{\lambda}\left[\frac{1}{\alpha_1 - f_{\mathrm{Na}}(u)}\right]\frac{du}{u}.$$

Отметим, что $\alpha_1 - f_{\mathrm{Na}}(0) = \alpha$, поэтому из монотонности функции $f_{\mathrm{Na}}(u)$ и из неравенства (3) следует неравенство $f_{\mathrm{Na}}(u) \leqslant f_{\mathrm{Na}}(0) < \alpha_1$, гарантирующее положительность знаменателя в последней формуле. Локализуем особенности и выделим сингулярную составляющую каждого интеграла:

$$t_1 = \lambda^{-1}\left\{\frac{\ln\lambda}{\alpha} + \int_{\lambda^{-1}}^{1}\left[\frac{1}{\alpha_1 - f_{\mathrm{Na}}(u)} - \frac{1}{\alpha}\right]\frac{du}{u}\right\} + \\ + \lambda^{-1}\left\{\frac{\ln\lambda}{\alpha_1} + \int_{1}^{\lambda}\left[\frac{1}{\alpha_1 - f_{\mathrm{Na}}(u)} - \frac{1}{\alpha_1}\right]\frac{du}{u}\right\}.$$

Для полученных интегралов можно выписать следующие асимптотические формулы:

$$\int\limits_0^{\lambda^{-1}}\left[\frac{1}{\alpha_1 - f_{\mathrm{Na}}(u)} - \frac{1}{\alpha}\right]\frac{du}{u} = \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{\lambda^{-1}}\left[\frac{f_{\mathrm{Na}}(u) - f_{\mathrm{Na}}(0)}{\alpha_1 - f_{\mathrm{Na}}(u)}\right]\frac{du}{u} = o(\lambda^{-1}),$$
$$\int_{\lambda}^{\infty}\left[\frac{1}{\alpha_1 - f_{\mathrm{Na}}(u)} - \frac{1}{\alpha_1}\right]\frac{du}{u} = \frac{1}{\alpha_1}\int_{\lambda}^{\infty}\left[\frac{f_{\mathrm{Na}}(u)}{\alpha_1 - f_{\mathrm{Na}}(u)}\right]\frac{du}{u} = o(\lambda^{-1}).$$

Отметим, что для знаменателя справедлива оценка $\alpha_1 - f_{\mathrm{Na}}(u) = \alpha - [f_{\mathrm{Na}}(u) - f_{\mathrm{Na}}(0)] = \alpha + o(\lambda^{-1})$. Первое асимптотическое равенство непосредственно следует из леммы 4, если заметить, что $f_{\mathrm{Na}}(u) - f_{\mathrm{Na}}(0) = o(\lambda^{-1})$. Второе асимптотическое равенство непосредственно следует из оценки (1) и леммы 5. Таким образом, оба интеграла в правой части выражения для t_1 сходятся при $\lambda \to \infty$. Для дальнейших выкладок окажется удобной следующая форма записи этого выражения:

$$t_1 = \frac{\ln\lambda}{\lambda}\left(\alpha^{-1} + \alpha_1^{-1}\right) + \lambda^{-1}\int_0^1\left[\frac{1}{\alpha_1 - f_{\mathrm{Na}}(u)} - \frac{1}{\alpha}\right]\frac{du}{u} + \\ + \lambda^{-1}\int_1^{\infty}\left[\frac{1}{\alpha_1 - f_{\mathrm{Na}}(u)} - \frac{1}{\alpha_1}\right]\frac{du}{u} + o(\lambda^{-1}).$$

2. Рассмотрим теперь следующий интервал $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, где $t_2 = 1$. На этом интервале по-прежнему выполнены неравенства $-1 \leqslant t-1 \leqslant 0$ и $\varphi(t-1) \leqslant \lambda^{-1}$, поэтому уравнение (4) имеет такой же вид, как и на первом шаге:

$$\dot{u} = \lambda\,[\alpha_1 - f_{\mathrm{Na}}(u)]\,u.$$

Кроме того, на данном интервале выполнено неравенство $u(t) \geqslant \lambda$, поэтому для функции $f_{\mathrm{Na}}(u)$ из (1) следует оценка $f_{\mathrm{Na}}(u) = o(\lambda^{-1})$, позволяющая еще сильнее упростить уравнение:

$$\dot{u} = \lambda\alpha_1 u, \qquad u(t_1) = \lambda.$$

Решение этого уравнения имеет вид $u(t) = \lambda\exp[\lambda\alpha_1(t-t_1)]$ и принимает в точке t_2 значение

$$u(t_2) = \lambda\exp[\lambda\alpha_1(1-t_1)].$$

3. Рассмотрим интервал $t_2 \leqslant t \leqslant t_3$, где $t_3 = 1 + t_1$. На нем $u(t) > \lambda$ и в силу оценки (1) справедлива оценка $f_{\mathrm{Na}}(u) = o(\lambda^{-1})$. Пренебрегая этим слагаемым в (4), получаем уравнение

$$\dot{u} = \lambda\,[f_{\mathrm{K}}(u(t-1)) - 1]\,u.$$

Его решение имеет следующий вид:

$$u(t) = u(t_2)\exp\left[\lambda\int_{t_2}^{t} f_{\mathrm{K}}(u(s-1))\,ds - \lambda(t-t_2)\right] =$$
$$= \lambda\exp\left[\lambda\int_{1}^{t} f_{\mathrm{K}}(u(s-1))\,ds - \lambda(t-1) + \lambda\alpha_1(1-t_1)\right].$$

В момент времени t_3 решение принимает значение

$$u(t_3) = \lambda\exp\left[\lambda\int_{1}^{1+t_1} f_{\mathrm{K}}(u(s-1))\,ds - \lambda t_1 + \lambda\alpha_1(1-t_1)\right].$$

Преобразуем входящий в формулу интеграл:

$$I = \lambda\int_{1}^{1+t_1} f_{\mathrm{K}}(u(s-1))\,ds = \lambda\int_{0}^{t_1} f_{\mathrm{K}}(u(s))\,ds =$$
$$= \lambda\int_{0}^{t_1} \frac{f_{\mathrm{K}}(u(s))}{\lambda\,[f_{\mathrm{K}}(u(s-1)) - f_{\mathrm{Na}}(u(s)) - 1]\,u}\,\dot{u}(s)\,ds.$$

Из неравенства $0 \leqslant s \leqslant t_1 = o(1)$ следует, что в знаменателе дроби $f_{\mathrm{K}}(u(s-1)) = f_{\mathrm{K}}(\varphi(s-1))$, а из этого же неравенства и оценок (5) следует, что $f_{\mathrm{K}}(\varphi(s-1)) = f_{\mathrm{K}}(0) + o(\lambda^{-1-\delta})$ при некотором $\delta > 0$. Замечая дополнительно, что $u(0) = \lambda^{-1}$, а $u(t_1) = \lambda$, получаем

$$I = \int_{\lambda^{-1}}^{\lambda} \frac{f_{\mathrm{K}}(u)}{[\alpha_1 - f_{\mathrm{Na}}(u)] + o(\lambda^{-1-\delta})}\,\frac{du}{u}.$$

Применяя лемму 3, убеждаемся, что отбрасывая в знаменателе слагаемое $o(\lambda^{-1-\delta})$, мы получим ошибку порядка $o(\lambda^{-1-\delta}\ln\lambda) = o(\lambda^{-1})$:

$$I = \int_{\lambda^{-1}}^{\lambda} \left[\frac{f_{\mathrm{K}}(u)}{\alpha_1 - f_{\mathrm{Na}}(u)}\right] \frac{du}{u} + o(\lambda^{-1}).$$

Как и на первом шаге, положительность знаменателя следует из равенства $\alpha_1 - f_{\mathrm{Na}}(0) = \alpha$, монотонности функции $f_{\mathrm{Na}}(u)$ и неравенства (3). Выделим в интеграле сингулярную составляющую:

$$I = \frac{f_{\mathrm{K}}(0)}{\alpha}\ln\lambda + \int_{\lambda^{-1}}^{1} \left[\frac{f_{\mathrm{K}}(u)}{\alpha_1 - f_{\mathrm{Na}}(u)} - \frac{f_{\mathrm{K}}(0)}{\alpha}\right] \frac{du}{u} + \int_{1}^{\lambda} \left[\frac{f_{\mathrm{K}}(u)}{\alpha_1 - f_{\mathrm{Na}}(u)}\right] \frac{du}{u}.$$

Для полученных интегралов можно выписать следующие асимптотические формулы:

$$\int_{0}^{\lambda^{-1}} \left[\frac{f_{\mathrm{K}}(u)}{\alpha_1 - f_{\mathrm{Na}}(u)} - \frac{f_{\mathrm{K}}(0)}{\alpha}\right] \frac{du}{u} = \\ = \int_{0}^{\lambda^{-1}} \left[\frac{\alpha f_{\mathrm{K}}(u) - (\alpha_1 - f_{\mathrm{Na}}(u)) f_{\mathrm{K}}(0)}{\alpha(\alpha_1 - f_{\mathrm{Na}}(u))}\right] \frac{du}{u} = o(\lambda^{-1}),$$

$$\int_{\lambda}^{\infty} \left[\frac{f_{\mathrm{K}}(u)}{\alpha_1 - f_{\mathrm{Na}}(u)}\right] \frac{du}{u} = o(\lambda^{-1}).$$

Отметим, что для знаменателя справедлива оценка $\alpha_1 - f_{\mathrm{Na}}(u) = \alpha - [f_{\mathrm{Na}}(u) - f_{\mathrm{Na}}(0)] = \alpha + o(\lambda^{-1})$. Первое асимптотическое равенство непосредственно следует из леммы 4, если заметить, что

$$\alpha f_{\mathrm{K}}(u) - (\alpha_1 - f_{\mathrm{Na}}(u)) f_{\mathrm{K}}(0) = \alpha[f_{\mathrm{K}}(u) - f_{\mathrm{K}}(0)] + f_{\mathrm{K}}(0)[f_{\mathrm{Na}}(u) - f_{\mathrm{Na}}(0)] = o(\lambda^{-1}).$$

Второе асимптотическое равенство непосредственно следует из оценки (1) и леммы 5. В результате получаем следующую оценку:

$$I = \frac{f_{\mathrm{K}}(0)}{\alpha}\ln\lambda + \int_{0}^{1} \left[\frac{f_{\mathrm{K}}(u)}{\alpha_1 - f_{\mathrm{Na}}(u)} - \frac{f_{\mathrm{K}}(0)}{\alpha}\right] \frac{du}{u} + \int_{1}^{\infty} \left[\frac{f_{\mathrm{K}}(u)}{\alpha_1 - f_{\mathrm{Na}}(u)}\right] \frac{du}{u} + o(\lambda^{-1}).$$

Окончательно получаем:

$$u(t_3) = \lambda \exp[I - \lambda t_1 + \lambda\alpha_1(1 - t_1)].$$

4. Пусть теперь $t_3 \leqslant t \leqslant t_4$, причем $u(t_4) = \lambda$. На этом интервале выполнены неравенства $u(t) \geqslant \lambda$ и $u(t-1) \geqslant \lambda$, поэтому $f_{\mathrm{Na}}(u(t)) = o(\lambda^{-1})$ и $f_{\mathrm{K}}(u(t-1)) = o(\lambda^{-1})$ в силу оценок (1). Пренебрегая в (4) величинами $o(1)$, получаем следующее уравнение:

$$\dot{u} = -\lambda u,$$

Его решение имеет следующий вид:

$$u(t) = u(t_3)\exp[-\lambda(t - t_3)] = \lambda \exp[-\lambda(t-1) + I + \lambda\alpha_1(1 - t_1)].$$

Момент времени t_4 легко находится из условия $u(t_4) = \lambda$:

$$t_4 = 1 + \lambda^{-1} I + \alpha_1 (1 - t_1).$$

5. На интервале $t_4 \leqslant t \leqslant t_5$ выполнено неравенство $u(t-1) \geqslant \lambda$, поэтому функция $f_{\mathrm{K}}(u(t-1)) = o(\lambda^{-1})$. Пренебрегая этим слагаемым, приходим к уравнению

$$\dot{u} = -\lambda [f_{\mathrm{Na}}(u) + 1] u.$$

Действуя, как на первом шаге, и учитывая, что $u(t_4) = \lambda$ и $u(t_5) = \lambda^{-1}$, получим следующее интегральное представление:

$$t_5 - t_4 = \lambda^{-1} \int_{\lambda^{-1}}^{\lambda} \left[\frac{1}{1 + f_{\mathrm{Na}}(u)} \right] \frac{du}{u},$$

Действуя, как и на первом шаге, выделим в интеграле сингулярную составляющую:

$$t_5 - t_4 = \frac{\ln \lambda}{\lambda \alpha_2} + \lambda^{-1} \int_{\lambda^{-1}}^{1} \left[\frac{1}{1 + f_{\mathrm{Na}}(u)} - \frac{1}{\alpha_2} \right] \frac{du}{u} + \\ + \frac{\ln \lambda}{\lambda} + \lambda^{-1} \int_{1}^{\lambda} \left[\frac{1}{1 + f_{\mathrm{Na}}(u)} - 1 \right] \frac{du}{u}.$$

Для полученных интегралов можно выписать следующие асимптотические формулы:

$$\int\limits_{0}^{\lambda^{-1}} \left[\frac{1}{1 + f_{\mathrm{Na}}(u)} - \frac{1}{\alpha_2} \right] \frac{du}{u} = \frac{1}{\alpha_2} \int\limits_{0}^{\lambda^{-1}} \left[\frac{f_{\mathrm{Na}}(0) - f_{\mathrm{Na}}(u)}{1 + f_{\mathrm{Na}}(u)} \right] \frac{du}{u} = o(\lambda^{-1}),$$

$$\int_{\lambda}^{\infty} \left[\frac{1}{1 + f_{\mathrm{Na}}(u)} - 1 \right] \frac{du}{u} = \int_{\lambda}^{\infty} \left[\frac{-f_{\mathrm{Na}}(u)}{1 + f_{\mathrm{Na}}(u)} \right] \frac{du}{u} = o(\lambda^{-1}).$$

Отметим, что для знаменателя справедлива оценка $1 + f_{\mathrm{Na}}(u) = [1 + f_{\mathrm{Na}}(0)] + o(\lambda^{-1}) = \alpha_2 + o(\lambda^{-1})$. Первое асимптотическое равенство непосредственно следует из леммы 4, если заметить, что $f_{\mathrm{Na}}(u) - f_{\mathrm{Na}}(0) = o(\lambda^{-1})$. Второе асимптотическое равенство непосредственно следует из оценки (1) и леммы 5. В результате получаем следующую оценку:

$$J = \frac{\ln \lambda}{\lambda \alpha_2} + \lambda^{-1} \int_{0}^{1} \left[\frac{1}{1 + f_{\mathrm{Na}}(u)} - \frac{1}{\alpha_2} \right] \frac{du}{u} + \\ + \frac{\ln \lambda}{\lambda} + \lambda^{-1} \int_{1}^{\infty} \left[\frac{1}{1 + f_{\mathrm{Na}}(u)} - 1 \right] \frac{du}{u} + o(\lambda^{-1}).$$

Окончательно для момента времени t_5 получаем следующее выражение:

$$t_5 = t_4 + J = 1 + \lambda^{-1} I + \alpha_1 (1 - t_1) + J.$$

6. Рассмотрим интервал времени $t_5 \leqslant t \leqslant t_6$, где $t_6 = t_4 + 1$. Поскольку $u(t-1) \geqslant \lambda$, то имеет место оценка $f_{\mathrm{K}}(u(t-1)) = o(\lambda^{-1})$. Кроме того, выполнено неравенство

$u(t) \leqslant \lambda^{-1}$, поэтому с учетом равенства $f'_{\mathrm{Na}}(0) = 0$ разложение функции $f_{\mathrm{Na}}(u)$ в ряд Тэйлора в окрестности нуля имеет вид $f_{\mathrm{Na}}(u) = f_{\mathrm{Na}}(0) + o(\lambda^{-1})$. Уравнение (4) приобретает вид:

$$\dot{u} = -\lambda\alpha_2 u, \qquad u(t_5) = \lambda^{-1}.$$

Решение этого уравнения имеет вид $u(t) = \lambda^{-1}\exp[-\lambda\alpha_2(t-t_5)]$ и принимает в точке t_6 значение

$$u(t_6) = \lambda^{-1}\exp[-\lambda\alpha_2(t_6 - t_5)] = \lambda^{-1}\exp[-\lambda\alpha_2(1 - J)].$$

7. Рассмотрим интервал времени $t_6 \leqslant t \leqslant t_7$, где $t_7 = t_5 + 1$. На этом интервале величина $u(t)$ экспоненциально мала по λ, следовательно, $u(t) = o(\lambda^{-1})$ и $f_{\mathrm{Na}}(u) = f_{\mathrm{Na}}(0) + O(u) = f_{\mathrm{Na}}(0) + o(\lambda^{-1})$. Отбрасывая в (4) малые слагаемые, получаем уравнение

$$\dot{u} = \lambda[f_{\mathrm{K}}(u(t-1)) - \alpha_2]u.$$

Это уравнение аналогично уравнению, проанализированному на третьем шаге. Получаем

$$u(t_7) = u(t_6)\exp\left[\lambda\int_{t_6}^{t_7} f_{\mathrm{K}}(u(s-1))\,ds - \lambda\alpha_2(t_7 - t_6)\right] = \\ = \lambda^{-1}\exp\left[\lambda\int_{t_4+1}^{t_5+1} f_{\mathrm{K}}(u(s-1))\,ds - \lambda\alpha_2\right].$$

Преобразуем входящий в формулу интеграл:

$$K = \lambda\int_{t_4+1}^{t_5+1} f_{\mathrm{K}}(u(s-1))\,ds = \lambda\int_{t_4}^{t_5} f_{\mathrm{K}}(u(s))\,ds = \\ = \lambda\int_{t_4}^{t_5} \frac{f_{\mathrm{K}}(u(s))}{\lambda\,[f_{\mathrm{K}}(u(s-1)) - f_{\mathrm{Na}}(u(s)) - 1]\,u}\,\dot{u}(s)\,ds.$$

Поскольку для $s \in [t_4, t_5]$ выполнено неравенство $u(s-1) \geqslant \lambda$, то имеет место оценка $f_{\mathrm{K}}(u(s-1)) = O(\lambda^{-1-\varepsilon}) = o(\lambda^{-1-\varepsilon/2})$. Замечая дополнительно, что $u(t_4) = \lambda$, а $u(t_5) = \lambda^{-1}$, получаем:

$$K = \int_{\lambda^{-1}}^{\lambda} \frac{f_{\mathrm{K}}(u)}{[1 + f_{\mathrm{Na}}(u)] + o(\lambda^{-1-\varepsilon/2})}\,\frac{du}{u}.$$

Применяя лемму 3, убеждаемся, что, отбрасывая в знаменателе слагаемое $o(\lambda^{-1-\varepsilon/2})$, мы получим ошибку порядка $o(\lambda^{-1-\varepsilon/2}\ln\lambda) = o(\lambda^{-1})$:

$$K = \int_{\lambda^{-1}}^{\lambda} \left[\frac{f_{\mathrm{K}}(u)}{1 + f_{\mathrm{Na}}(u)}\right]\frac{du}{u} + o(\lambda^{-1}).$$

Действуя, как и на первом шаге, выделим в интеграле сингулярную составляющую:

$$K = \frac{f_{\mathrm{K}}(0)}{\alpha_2}\ln\lambda + \int_{\lambda^{-1}}^{1}\left[\frac{f_{\mathrm{K}}(u)}{1 + f_{\mathrm{Na}}(u)} - \frac{f_{\mathrm{K}}(0)}{\alpha_2}\right]\frac{du}{u} + \int_{1}^{\lambda}\left[\frac{f_{\mathrm{K}}(u)}{1 + f_{\mathrm{Na}}(u)}\right]\frac{du}{u} + o(\lambda^{-1}).$$

Для полученных интегралов можно выписать следующие асимптотические формулы:

$$\int_0^{\lambda^{-1}} \left[\frac{f_{\mathrm{K}}(u)}{1+f_{\mathrm{Na}}(u)} - \frac{f_{\mathrm{K}}(0)}{\alpha_2}\right] \frac{du}{u} =$$

$$= \int_0^{\lambda^{-1}} \left[\frac{\alpha_2 f_{\mathrm{K}}(u) - (1+f_{\mathrm{Na}}(u))f_{\mathrm{K}}(0)}{\alpha_2(1+f_{\mathrm{Na}}(u))}\right] \frac{du}{u} = o(\lambda^{-1}),$$

$$\int_\lambda^\infty \left[\frac{f_{\mathrm{K}}(u)}{1+f_{\mathrm{Na}}(u)}\right] \frac{du}{u} = o(\lambda^{-1}).$$

Отметим, что для знаменателя справедлива оценка $1+f_{\mathrm{Na}}(u) = [1+f_{\mathrm{Na}}(0)]+o(\lambda^{-1}) = \alpha_2+o(\lambda^{-1})$. Первое асимптотическое равенство непосредственно следует из леммы 4, если заметить, что

$$\alpha_2 f_{\mathrm{K}}(u) - (1+f_{\mathrm{Na}}(u))f_{\mathrm{K}}(0) = \alpha_2[f_{\mathrm{K}}(u) - f_{\mathrm{K}}(0)] - f_{\mathrm{K}}(0)[f_{\mathrm{Na}}(u) - f_{\mathrm{Na}}(0)] = o(\lambda^{-1}).$$

Второе асимптотическое равенство непосредственно следует из оценки (1) и леммы 5. В результате получаем следующую оценку:

$$K = \frac{f_{\mathrm{K}}(0)}{\alpha_2}\ln\lambda + \int_0^1 \left[\frac{f_{\mathrm{K}}(u)}{1+f_{\mathrm{Na}}(u)} - \frac{f_{\mathrm{K}}(0)}{\alpha_2}\right] \frac{du}{u} + \int_1^\infty \left[\frac{f_{\mathrm{K}}(u)}{1+f_{\mathrm{Na}}(u)}\right] \frac{du}{u} + o(\lambda^{-1}).$$

В итоге выражение для величины $u(t_7)$ приобретает вид:

$$u(t_7) = \lambda^{-1}\exp[K - \lambda\alpha_2].$$

8. Рассмотрим интервал времени $t_7 \leqslant t \leqslant t_8$, где $u(t_8) = \lambda^{-1}$. На этом интервале $u(t) < \lambda^{-1}$ и $u(t-1) < \lambda^{-1}$, поэтому с учетом равенства $f'_{\mathrm{K}}(0) = f'_{\mathrm{Na}}(0) = 0$ разложение функций $f_{\mathrm{K}}(u)$ и $f_{\mathrm{Na}}(u)$ в ряд Тэйлора в окрестности нуля имеет следующий вид:

$$f_{\mathrm{Na}}(u) = f_{\mathrm{Na}}(0) + o(\lambda^{-1}), \qquad f_{\mathrm{K}}(u) = f_{\mathrm{K}}(0) + o(\lambda^{-1}).$$

Соответственно, уравнение (4) приобретает вид:

$$\dot{u} = \lambda\alpha u.$$

Его решение имеет следующий вид:

$$u(t) = u(t_7)\exp[\lambda\alpha(t-t_7)] = \lambda^{-1}\exp[\lambda\alpha(t-t_7) + K - \lambda\alpha_2].$$

Из условия $u(t_8) = \lambda^{-1}$ получаем

$$\lambda\alpha(t_8 - t_7) + K - \lambda\alpha_2 = 0.$$

Таким образом, выполнено равенство:

$$t_8 = t_7 + \frac{\alpha_2}{\alpha} - \frac{K}{\lambda\alpha}.$$

С учетом полученного на шаге 5 выражения для t_5 получаем окончательное выражение для периода T решения:

$$T = t_8 = 2 + \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha} + \lambda^{-1}I - \alpha_1 t_1 + J - (\lambda\alpha)^{-1}K = \\ = T_2 + \lambda^{-1}I - \alpha_1 t_1 + J - (\lambda\alpha)^{-1}K.$$

Таким образом, слагаемые, не зависящие от λ, дают в сумме величину T_2 из формулы (6). Подставляя в последнюю формулу найденные выше выражения для величин I, t_1, J, и K и приводя подобные слагаемые при $\ln\lambda/\lambda$, убеждаемся, что их сумма равна нулю:

$$\frac{\ln\lambda}{\lambda}\left[\frac{f_{\rm K}(0)}{\alpha} - \frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha_2} - \frac{f_{\rm K}(0)}{\alpha\alpha_2}\right] = \\ = \frac{\ln\lambda}{\lambda}\left[\frac{f_{\rm K}(0) - \alpha_1}{\alpha} + \frac{\alpha - f_{\rm K}(0)}{\alpha\alpha_2}\right] = \frac{\ln\lambda}{\lambda}\left[\frac{1}{\alpha} - \frac{f_{\rm Na}(0)+1}{\alpha\alpha_2}\right] = 0.$$

Здесь последовательно использованы равенства $\alpha_1 = f_{\rm K}(0) - 1$ и $\alpha_2 = f_{\rm Na}(0) + 1$. После приведения подобных слагаемых в сумме интегралов непосредственно получаем для поправки ΔT формулу (6). Теорема доказана.

Отметим, что в работе [1] была получена оценка периода решения, имеющая порядок точности $o(\lambda^{-n})$ при произвольном целом $n \geqslant 1$. Тем не менее, для получения порядка точности $o(\lambda^{-n})$ необходимо специальным образом выбирать множество начальных функций S', которое в этом случае оказывается зависящим от n. Поэтому с практической точки зрения оценка из [1] не имеет преимуществ по сравнению с оценкой из теоремы 1. Приведенное выше доказательство тривиально переносится на случай использованного в работе [1] множества начальных функций S_λ.

Существенное отличие теоремы 1 от теоремы, сформулированной в работе [1], заключается во введении новых условий (2). Без введения этих условий на шагах 2, 6 и 8 доказательства не удается получить требуемую точность задания оператора $L[u]$. Также без введения условий (2) не удается получить необходимую точность оценки величин t_1 и J.

Список литературы

1. Майоров В.В., Мячин М.Л., Парамонов И.В. Поправка к периоду решения уравнения, моделирующего динамику мембранного потенциала нейрона // Моделирование и анализ информационных систем. 2008. Т. 15, № 2. С. 61 – 66.

2. Кащенко С.А., Майоров В.В. Модели волновой памяти. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 288 с.

Errata And Adendum For The Article "A Correction For Period Of Oscillation In The Model Of Spiking Neuron"

Dunaeva O.A., Machin M.L.

Keywords: biological neuron, differential-difference equation, asymptotical methods

In this paper we present a corrected version of the theorem from the article "A Correction For Period Of Oscillation In The Model Of Spiking Neuron", in which a new first-order estimation for the oscillation period in the difference-differential model of the spiking neuron was obtained.

Сведения об авторах:
Дунаева Ольга Александровна,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
аспирант;
Мячин Михаил Леонидович,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
старший преподаватель,
научный руководитель лаборатории цифровой обработки сигналов и изображений.