

УДК 519.854.2

Задача целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы и сетевая модель

Смирнов А.В.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: alexander_sm@mail.ru

получена 2 июня 2009

Ключевые слова: целочисленное сбалансирование, трехмерные матрицы, потоки в сетях

Рассматривается задача целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы, исследуется проблема ее сведения к задаче нахождения максимального потока в сети.

Различные задачи целочисленного сбалансирования возникают в сфере управления, экономики, финансов. В частности, подобная задача ставится при планировании железнодорожных грузоперевозок. Имеется матричный план по отправке вагонов, который группируется по некоторым показателям (например, направление, тип вагона, владелец вагона и т. п.). Данный план составляется на месяц и естественно является целочисленным. Однако вагоны необходимо отправлять ежедневно. При делении на количество дней в месяце план перестает быть целочисленным. Поэтому возникает проблема такого округления основных параметров, чтобы суммирующие показатели не выходили за определенные рамки. Данный план может быть представлен в виде k -мерной матрицы, где k – это число показателей, по которым ведется суммирование.

В работе [1] была рассмотрена задача целочисленного сбалансирования двумерной матрицы, показана сводимость этой задачи к задаче нахождения максимального потока в транспортной сети. При этом по исходной матрице строится сеть, элементам матрицы сопоставляются определенные вершины, значениям этих элементов ставятся в соответствие пропускные способности дуг сети. Кроме того, решение первой задачи индуцирует решение второй и наоборот.

Рассмотрим задачу целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы. Дана вещественная трехмерная матрица A размерности $(n + 1) \times (m + 1) \times (t + 1)$ с неотрицательными элементами a_{ijp} , для которой выполнены условия баланса:

$$a_{000} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^t a_{ijp}; \quad a_{i00} = \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^t a_{ijp} \quad (i \in \overline{1, n}); \quad a_{0j0} = \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^t a_{ijp} \quad (j \in \overline{1, m});$$

$$\begin{aligned}
a_{00p} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ijp} \quad (p \in \overline{1, t}); & a_{ij0} &= \sum_{p=1}^t a_{ijp} \quad (i \in \overline{1, n}, j \in \overline{1, m}); \\
a_{i0p} &= \sum_{j=1}^m a_{ijp} \quad (i \in \overline{1, n}, p \in \overline{1, t}); & a_{0jp} &= \sum_{i=1}^n a_{ijp} \quad (j \in \overline{1, m}, p \in \overline{1, t}).
\end{aligned}$$

Ищется целочисленная сбалансированная матрица D той же размерности, для которой выполнены условия:

$$\begin{aligned}
d_{ijp} &\in \{[a_{ijp}],]a_{ijp}[\} \quad (i \in \overline{0, n}, j \in \overline{0, m}, p \in \overline{0, t}); & d_{000} &= [a_{000} + 0.5]; \\
d_{000} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^t d_{ijp}; & d_{i00} &= \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^t d_{ijp} \quad (i \in \overline{1, n}); & d_{0j0} &= \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^t d_{ijp} \quad (j \in \overline{1, m}); \\
d_{00p} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d_{ijp} \quad (p \in \overline{1, t}); & d_{ij0} &= \sum_{p=1}^t d_{ijp} \quad (i \in \overline{1, n}, j \in \overline{1, m}); \\
d_{i0p} &= \sum_{j=1}^m d_{ijp} \quad (i \in \overline{1, n}, p \in \overline{1, t}); & d_{0jp} &= \sum_{i=1}^n d_{ijp} \quad (j \in \overline{1, m}, p \in \overline{1, t}).
\end{aligned}$$

Постановку задачи целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы можно также дать в виде трехиндексной задачи линейного программирования. Пусть имеется вещественная трехмерная матрица A размерности $(n+1) \times (m+1) \times (t+1)$ с неотрицательными элементами a_{ijp} , для которой выполнены условия баланса. Ищется целочисленная сбалансированная матрица D , для которой выполняются ограничения:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^t d_{ijp} &= [a_{000} + 0.5]; \\
[a_{i00}] &\leq \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^t d_{ijp} \leq]a_{i00}[\quad (i \in \overline{1, n}); \\
[a_{0j0}] &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^t d_{ijp} \leq]a_{0j0}[\quad (j \in \overline{1, m}); \\
[a_{00p}] &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d_{ijp} \leq]a_{00p}[\quad (p \in \overline{1, t}); \\
[a_{ij0}] &\leq \sum_{p=1}^t d_{ijp} \leq]a_{ij0}[\quad (i \in \overline{1, n}, j \in \overline{1, m}); \\
[a_{i0p}] &\leq \sum_{j=1}^m d_{ijp} \leq]a_{i0p}[\quad (i \in \overline{1, n}, p \in \overline{1, t});
\end{aligned}$$

$$[a_{0jp}] \leq \sum_{i=1}^n d_{ijp} \leq [a_{0jp}] \quad (j \in \overline{1, m}, p \in \overline{1, t});$$

$$[a_{ijp}] \leq d_{ijp} \leq [a_{ijp}] \quad (i \in \overline{1, n}, j \in \overline{1, m}, p \in \overline{1, t});$$

и принимает минимальное значение критерий

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^t d_{ijp}.$$

Обе постановки являются эквивалентными. Действительно, в силу целочисленности элементов матрицы D условие $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^t d_{ijp} = [a_{000} + 0.5]$ будет эквивалентно условию $d_{000} = [a_{000} + 0.5]$, а двойные неравенства будут эквивалентны условиям $d_{ijp} \in \{[a_{ijp}], [a_{ijp}]\}$ ($i \in \overline{0, n}, j \in \overline{0, m}, p \in \overline{0, t}$). Помимо того, выполнение всех ограничений автоматически влечет выполнение условий баланса.

Зададимся вопросом о сводимости рассматриваемой задачи к потоковой. Как и в двумерном случае, нас будет интересовать такое сведение, при котором по исходной трехмерной матрице будет строиться сеть; при этом каждому элементу a_{ijp} матрицы будет соответствовать вершина сети, а пропускные способности дуг будут устанавливаться в зависимости от значений a_{ijp} , причем все пропускные способности дуг должны быть целочисленными. Потребуем также, чтобы некоторое подмножество компонент оптимального решения потоковой задачи образовывало оптимальное решение задачи сбалансирования и задача сбалансирования не имела допустимого решения, если не имеет допустимого решения потоковая задача. Подобное сведение назовем «естественным».

Теорема. Пусть $n \geq 2, m \geq 2, p \geq 2$. Тогда для задачи целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы не существует «естественного» сведения к задаче о нахождении наибольшего потока.

Доказательство. Рассмотрим задачу целочисленного сбалансирования, поставленную в виде задачи линейного программирования. При такой постановке задача целочисленного сбалансирования является многоиндексной задачей распределения ресурсов $W(M)$, рассмотренной в [2, 3]. Многоиндексные задачи линейного программирования указанного вида также были рассмотрены в [4, 5]. Известно (см. [3]), что если задача $W(M)$ сводится к задаче L_1 поиска циркуляции минимальной стоимости в транспортной сети, то матрица системы ограничений задачи $W(M)$ абсолютно унимодулярна (данное утверждение можно обосновать с помощью результатов статьи [6]).

Напомним определение абсолютной унимодулярности. Абсолютно унимодулярной называется такая матрица A , любой минор которой равен либо 0, либо ± 1 .

Очевидно, что при введенном критерии

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^t d_{ijp} \rightarrow \min$$

задача L_1 поиска циркуляции минимальной стоимости и задача о максимальном потоке будут эквивалентны в том смысле, что величина потока по каждой дуге в

решениях этих двух задач будет одинакова. Поэтому невозможность сведения задачи целочисленного сбалансирования к задаче нахождения максимального потока будет вытекать из невозможности ее сведения к задаче L_1 , причем понятие сводимости, определяемое в [2, 3], будет соответствовать интересующей нас «естественной» сводимости. Следовательно, для доказательства теоремы нам достаточно показать, что матрица системы ограничений для задачи целочисленного сбалансирования не является абсолютно унимодулярной.

Обозначим через E_s единичную подматрицу порядка s , а через O – соответствующую нулевую подматрицу.

Тогда структура матрицы ограничений B для задачи целочисленного сбалансирования будет выглядеть следующим образом:

1	1	...	1	...	1	1	1	...	1	...	1	1	1	...	1	1	1	...	1
1	1	...	1	...	1	1	1	...	1	...	0	0	...	0	...	0	0	...	0
0	0	...	0	...	0	0	0	...	0	...	1	1	...	1	...	0	0	...	0
⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	⋮	...	⋮
0	0	...	0	...	0	0	0	...	0	...	0	0	...	0	...	1	1	...	1
1	1	...	1	...	0	0	0	...	0	...	1	1	...	1	...	0	0	...	0
0	0	...	0	...	0	0	0	...	0	...	0	0	...	0	...	⋮	⋮	...	⋮
⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	⋮	...	⋮	...	1	1	...	1
0	0	...	0	...	1	1	...	1	0	...	0	0	...	0	...	0	0	...	0
E_t				...	E_{t-1}				E_t				...	E_{t-1}				E_{t-1}	
1	1	...	1	...	0	0	...	0	0	...	0	0	...	0	...	0	0	...	0
0	0	...	0	...	0	0	...	0	0	...	0	0	...	0	...	⋮	⋮	...	⋮
⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	⋮	...	⋮	⋮	...	⋮	⋮	...	⋮	...	1	1	...	1
0	0	...	0	...	0	0	...	0	0	...	0	0	...	0	...	0	0	...	0
E_t				...	E_t				O				...	O				O	
O				...	O				E_t				...	O				O	
...				...	...				...				...	...				...	
O				...	O				O				...	E_t				E_t	
E_t				...	O				E_t				...	O				O	
O				...	O				O				...	O				O	
...				...	...				...				...	...				...	
O				...	E_t				O				...	O				E_t	

E_{nmt}

Пусть I и J – множества номеров строк и столбцов одинаковой мощности. Тогда через B_{IJ} обозначим минор матрицы B , составленный из элементов матрицы, стоящих на пересечении строк и столбцов с номерами из множеств I и J .

Рассмотрим следующие множества I и J (полагая при этом $n \geq 2$, $m \geq 2$, $p \geq 2$):

$$I = \{n + 1, n + m + 1, n + m + t + 1\};$$

$$J = \{m + t, nmt - t, nmt - t + 1\}.$$

Выпишем минор B_{IJ} :

$$B_{IJ} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

Таким образом, мы получили, что у матрицы B имеется минор, отличный от 0 и от ± 1 , то есть матрица B не является абсолютно унимодулярной. Следовательно, утверждение теоремы полностью обосновано.

Замечание 1. Доказательство теоремы можно провести также следующим образом. Сформулируем задачу целочисленного сбалансирования как задачу линейного программирования и выделим из матрицы ее системы ограничений подматрицу, определяемую системой ограничений

$$[a_{i00}] \leq \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^t d_{ijp} \leq]a_{i00}[\quad (i \in \overline{1, n});$$

$$[a_{0j0}] \leq \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^t d_{ijp} \leq]a_{0j0}[\quad (j \in \overline{1, m});$$

$$[a_{00p}] \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d_{ijp} \leq]a_{00p}[\quad (p \in \overline{1, t}).$$

Данная матрица соответствует задаче $W(M)$, в которой $M = \{\{i, j\}, \{i, p\}, \{j, p\}\}$. Для такой задачи в работе [2] показана невозможность ее сведения к потоковой задаче, так как не выполняются условия абсолютной унимодулярности. Следовательно, задача целочисленного сбалансирования также не сводится к потоковой.

Замечание 2. Утверждение теоремы справедливо только для $n \geq 2$, $m \geq 2$, $p \geq 2$. Действительно, пусть $n = 1$. Тогда $a_{0jp} = a_{1jp}$ ($j \in \overline{0, m}$, $p \in \overline{0, t}$), и задача целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы становится эквивалентной задаче сбалансирования двумерной матрицы $A' = (a_{0jp})_{j=\overline{0, m}, p=\overline{0, t}}$, которая сводится к потоковой задаче (см. [1]). То же самое верно для $m = 1$ и для $t = 1$.

Замечание 3. Отсутствие сводимости задачи целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы к задаче о наибольшем потоке в «естественном» смысле не означает отсутствия какого-либо другого сведения. Однако другое сведение очевидно будет сложнее, нежели «естественное», поэтому в работах [7, 8] было предложено обобщение теории потоков Форда–Фалкерсона, названное кратными потоками и задачей о нахождении максимального кратного потока. Показано, что задача о сбалансировании трехмерной матрицы индуцирует задачу о наибольшем кратном потоке так, что решение первой является решением второй. Обратное, однако, неверно: в кратной сети целочисленного сбалансирования может существовать поток, для которого в соответствующей матрице одно из условий $d_{ijp} \in \{[a_{ijp}],]a_{ijp}[\}$ ($i \in \overline{0, n}$, $j \in \overline{0, m}$, $p \in \overline{0, t}$) будет нарушаться. Поэтому ставится вопрос о нахождении такого максимального кратного потока, в котором определенные дуги (т.н. «основные дуги») будут насыщенными.

Замечание 4. Задача целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы (и соответственно задача нахождения максимального кратного потока кратности 2)

предположительно является NP -трудной. В настоящее время ведется работа над обоснованием этого факта.

Список литературы

1. Коршунова Н.М., Рублев В.С. Задача целочисленного сбалансирования матрицы // Современные проблемы математики и информатики. Вып. 3. Ярославль: ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2000. С. 145 – 150.
2. Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х. Многоиндексные задачи распределения ресурсов в иерархических системах // Автоматика и телемеханика. 2006. №6. С. 194 – 205.
3. Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х. Многопродуктовые потоки в древовидных сетях // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008. №2. С. 57 – 63.
4. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. М.: Наука, 1969.
5. Раскин Л.Г., Кириченко И.О. Многоиндексные задачи линейного программирования. М.: Радио и связь, 1982.
6. Гофман А.Д., Краскал Д.Б. Целочисленные граничные точки выпуклых многогранников // Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: Изд-во ИЛ, 1959. С. 325 – 347.
7. Рублев В.С., Смирнов А.В. Целочисленное сбалансирование 3-мерной матрицы плана // Труды VII международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Покровское 4-6 марта 2006 г.). М.: МГУ, 2006. С. 302 – 308.
8. Рублев В.С., Смирнов А.В. Послойный алгоритм целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы // Материалы IX Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения», посвященного 75-летию со дня рождения академика О.Б. Лупанова (Москва, МГУ, 18-23 июня 2007 г.). М.: МГУ, 2007. С. 351 – 353.

The Problem of Integer-valued Balancing of a Three-dimensional Matrix and Network Model

Smirnov A.V.

Keywords: integer-valued balancing, three-dimensional matrices, flows in networks

The article is devoted to the problem of integer-valued balancing of a three-dimensional matrix. A problem of reducing this problem to the problem of finding a maximum flow in network is explored.

Сведения об авторе:

Смирнов Александр Валерьевич,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
аспирант