

УДК 519.7

О множестве достижимости автоматных трехсчетчиковых машин

Кузьмин Е. В., Чалый Д. Ю.¹

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: {kuzmin,chaly}@uniyar.ac.ru

получена 28 июня 2009

Ключевые слова: абстрактные счетчиковые машины, автоматные счетчиковые машины, взаимодействующие раскрашивающие автоматы, множества достижимости, полулинейные множества

Доказывается, что существуют абстрактные счетчиковые машины, принадлежащие классу автоматных трехсчетчиковых машин, множество достижимости которых не является полулинейным.

1. Введение

В работе исследуются свойства класса автоматных счетчиковых машин [7], которые «лежат в основе» (моделируются с помощью) взаимодействующих раскрашивающих автоматов, введенных в [4, 6] как средство моделирования перемещения данных различного типа между компонентами распределенной системы. Основное отличие этого формализма от других заключается в переносе управления над данными на дуги переходов. В автоматных счетчиковых машинах каждый переход определяется недетерминированно в соответствии с локальными управляющими состояниями и независимо от манипулируемых данных.

В теории формальных моделей особое пограничное место занимают абстрактные машины с двумя счетчиками, поскольку уменьшение количества счетчиков до одного обычно приводит к резкому росту числа разрешимых свойств, в то время как уже для трехсчетчиковых машин того же класса имеем неразрешимыми подавляющее большинство полезных свойств. В связи с этим представляется интересным исследование выразительной способности (мощности) абстрактных двухсчетчиковых машин разных классов.

Известно, что для 2-мерных систем векторного сложения с состояниями (сетей Петри, среди позиций которых неограниченными являются только две) и некоторых их расширений (с помощью добавлений обнуляющих, тестирующих на ноль

¹Работа поддержана РФФИ, грант №07-01-00702а, и проводилась при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям, ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы".

и перемещающих значения счетчиков переходов) классические проблемы эквивалентности, включения и достижимости являются алгоритмически разрешимыми. Например, алгоритмы, представленные в работах [3, 1, 2], производят построение множеств достижимых конфигураций, которые в случае двух счетчиков (двух неограниченных позиций) представляют собой полулинейные множества, имеющие конечное представление. Таким образом, каждая из указанных проблем может быть легко задана формулой арифметики Пресбургера на основе полученного конечного представления множества достижимости. Известно, что арифметика Пресбургера разрешима, т. е. существует алгоритм, определяющий истинность для любой формулы арифметики Пресбургера.

Применение подобных алгоритмов ограничивается лишь случаем абстрактных машин с двумя счетчиками, поскольку уже для «слабых» машин с тремя счетчиками, например 3-мерных систем векторного сложения с состояниями (сетей Петри с тремя неограниченными позициями), множество достижимых конфигураций не является полулинейным [3].

В этой работе мы продолжаем изучать свойства автоматных счетчиковых машин [7]. Объектом исследования является класс автоматных 2-счетчиковых машин. Основной вопрос — является ли полулинейным множество достижимости каждой машины из этого класса. В случае полулинейности множества достижимости могли бы быть применены алгоритмы, подобные представленным в работах [3, 1, 2]. К сожалению, эта проблема пока остается открытой.

Однако, следуя [3], мы покажем, что среди автоматных 3-счетчиковых машин существуют машины, множества достижимости которых не являются полулинейными, и более того, эти машины могут иметь весьма простой вид.

2. Основные определения

Абстрактная счётчиковая машина M — это набор элементов $(v_0, q_0, Q, X, \rightarrow, T)$, где $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ — конечное множество счетчиков, $Q = \{q_0, \dots, q_n\}$ — конечное множество состояний, q_0 — начальное состояние, q_n — финальное (заключительное) состояние, v_0 — вектор начальных значений счетчиков, T — конечное множество меток действий, соответствующих выражению (преобразованию) над счетчиками, $\rightarrow \subseteq Q \setminus \{q_n\} \times T \times Q$ — отношение переходов, запись $q \xrightarrow{t} q'$ используется для обозначения (правила) перехода $(q, t, q') \in \rightarrow$.

Автоматная счётчиковая машина АМ — это абстрактная счетчиковая машина, у которой переход из одной конфигурации в другую может быть одного из следующих видов (при $q \xrightarrow{t} q'$):

если t соответствует выражению $x_i := x_i + 1$, тогда

$$(q, c_1, \dots, c_i, \dots, c_m) \xrightarrow{t} (q', c_1, \dots, c_i + 1, \dots, c_m);$$

если метка t соответствует выражению $x_i := x_i \ominus 1$, тогда

$$(q, c_1, \dots, c_i, \dots, c_m) \xrightarrow{t} (q', c_1, \dots, c'_i, \dots, c_m),$$

где $c'_i = 0$ при $c_i = 0$ и $c'_i = c_i - 1$ при $c_i > 0$;

если метка t соответствует выражению $x_i := x_i + \min(x_j, 1)$, тогда

$$(q, c_1, \dots, c_i, \dots, c_m) \xrightarrow{t} (q', c_1, \dots, c'_i, \dots, c_m),$$

где $c'_i = c_i + 1$ при $c_j \geq 1$ и $c'_i = c_i$ при $c_j = 0$;

если t соответствует выражению $x_i := x_i$, тогда

$$(q, c_1, \dots, c_i, \dots, c_m) \xrightarrow{t} (q', c_1, \dots, c_i, \dots, c_m).$$

Для удобства правила переходов будем представлять в виде $q \rightarrow (q', w)$, означая, что существует переход из состояния q в q' , при котором к вектору старых значений счетчиков прибавляется вектор w . Например, правила переходов, соответствующие выражениям $x_i := x_i + \min(x_j, 1)$ и $x_i := x_i \ominus 1$ можно переписать соответственно как

$$q \rightarrow (q', (0, \dots, 0, \min(x_j, 1), 0, \dots, 0))$$

(выражения $\min(x_j, 1)$ и $\ominus 1$ стоят в i -х позициях) и

$$q \rightarrow (q', (0, \dots, 0, \ominus 1, 0, \dots, 0)),$$

где $\ominus 1$ — вычитание единицы до нуля, а $\min(x_j, 1)$ — функция, возвращающая минимум из единицы и значения счетчика x_j .

Множеством достижимости, или *сферой достижимости*, $R(\mathcal{M})$ автоматной счетчиковой машины АМ $\mathcal{M}$ назовем множество всех векторов значений счетчиков, достижимых машиной из начальной конфигурации (q_0, v_0) , где q_0 — начальное состояние, v_0 — вектор начальных значений счетчиков.

Таким образом, вектор принадлежит множеству $R(\mathcal{M})$, если он достижим из начального вектора v_0 (и начального состояния q_0) последовательностью переходов.

Конфигурация счетчиковой машины представляет собой набор $(q_i, c_1, \dots, c_m)$, где q_i — состояние машины, $c_i \in \mathbb{N}$ — значение соответствующего счетчика ($\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, включая ноль).

Исполнение счетчиковой машины — это последовательность конфигураций $s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots$ с начальной конфигурацией $s_0 = (q_0, v_0)$, индуктивно определяемая в соответствии с правилами переходов.

Пусть $L \subseteq \mathbb{N}^n$ — произвольное множество векторов. Вектор $p \in \mathbb{N}^n$ называется *периодом* множества L , если для любого $r \in L$ вектор $r + p$ также принадлежит множеству L .

Пусть C и P — подмножества множества $\mathbb{N}^n$ и $\mathcal{L}(C; P)$ — множество всех векторов из $\mathbb{N}^n$, представимых в виде $c + p_1 + \dots + p_m$, где $c \in C$ и $p_1, \dots, p_m$ — некоторая (возможно, пустая) последовательность векторов из P , т. е.

$$\mathcal{L}(C; P) = \{x \mid \exists c \in C, k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_m \in P: x = c + \sum_{i=1}^m k_i p_i\}.$$

Тогда множества C и P называются соответственно *системой предпериодов* и *системой периодов* множества $\mathcal{L}(C; P)$.

Итак, $\mathcal{L}(C; P)$ — множество всех x из множества $\mathbb{N}^n$, таких что $x = c + \sum_{i=1}^m k_i p_i$, где $c \in C$, $p_1, \dots, p_m \in P$ и $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$.

Если множество C состоит в точности из одного элемента, т. е. $C = \{c\}$, то для удобства вместо $\mathcal{L}(C; P)$ будем писать $\mathcal{L}(c; P)$.

Множество $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{N}^n$ называется *линейным*, если $\mathcal{L} = \mathcal{L}(c; P)$, где система периодов P конечна, $P = \{p_1, \dots, p_r\}$, а система предпериодов состоит в точности из одного элемента c , т.е. $C = \{c\}$. В этом случае вместо $\mathcal{L}(C; P)$ будем писать $\mathcal{L}(c; p_1, \dots, p_r)$.

Всякий раз, когда говорится, что множество $\mathcal{L}(C; P)$ линейно, имеется в виду, что P конечно.

Подмножество множества $\mathbb{N}^n$ называется *полулинейным*, если оно является объединением конечного числа линейных множеств.

Например, пусть $c_1, c_2, p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_r \in \mathbb{N}^n$, тогда множество

$$\mathcal{L}(c_1; p_1, \dots, p_m) \cup \mathcal{L}(c_2; q_1, \dots, q_r)$$

является полулинейным подмножеством множества $\mathbb{N}^n$.

Объединение конечного числа полулинейных подмножеств множества $\mathbb{N}^n$ также является полулинейным множеством. Более того, класс полулинейных множеств замкнут относительно операций пересечения и дополнения [5, 3].

3. Автоматная 3-счетчиковая машина с неполулинейным множеством достижимости

В этом разделе рассматривается пример 3-счетчиковой машины АМ, которая генерирует экспоненту, убеждающий, что в общем 3-счетчиковые машины АМ имеют *неполулинейные* множества достижимости.

Лемма 1. *Существует 3-счетчиковая машина АМ, которая имеет неполулинейное множество достижимости.*

Доказательство. Рассмотрим автоматную 3-счетчиковую машину АМ $\mathcal{M} = (v_0, q_0, Q, X, \rightarrow, T)$, где $v_0 = (0, 0, 1)$, $Q = \{q_0, q'_0, q_1, q'_1, q''_1\}$, $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, множество меток переходов $T = \{t'_1, t''_1, t_2, t'_3, t''_3, t'''_3, t_4\}$ соответствует следующим правилам переходов (см. рис. 1):

$$t'_1: q_0 \rightarrow (q'_0, (0, \min(x_3, 1), 0)),$$

$$t''_1: q'_0 \rightarrow (q_0, (0, 0, \ominus 1)),$$

$$t_2: q_0 \rightarrow (q_1, (0, 0, 0)),$$

$$t'_3: q_1 \rightarrow (q'_1, (0, 0, \min(x_2, 1))),$$

$$t''_3: q'_1 \rightarrow (q''_1, (0, 0, \min(x_2, 1))),$$

$$t'''_3: q''_1 \rightarrow (q_1, (0, \ominus 1, 0)),$$

$$t_4: q_1 \rightarrow (q_0, (1, 0, 0)).$$

Рассмотрим следующие неравенства (условия):

$$(1) \quad 0 < \beta + \gamma \leq 2^\alpha;$$

$$(2) \quad 0 < 2\beta + \gamma \leq 2^{\alpha+1};$$

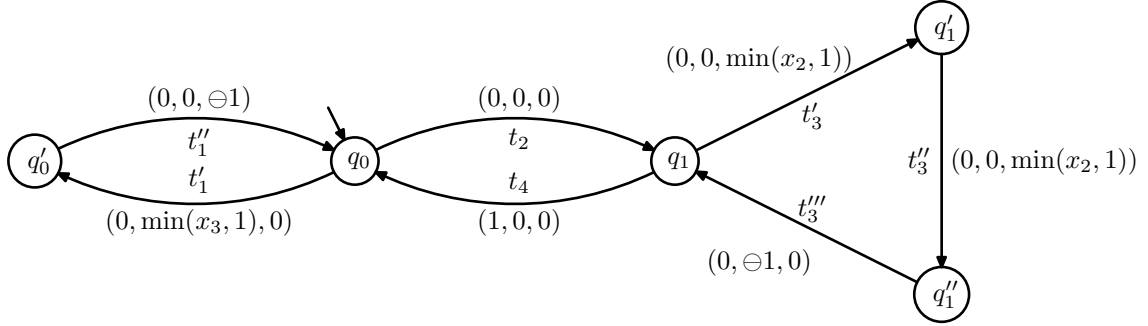


Рис. 1. Граф переходов 3-счетчиковой машины АМ с неполулинейным множеством достижимости

Покажем, что некоторый вектор $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ достижим машиной $\mathcal{M}$ в состоянии q_0 тогда и только тогда, когда выполняется условие 1; и вектор $v' = (\alpha', \beta', \gamma')$ достижим в состоянии q_1 тогда и только тогда, когда выполняется условие 2.

Для удобства обозначим последовательность переходов $t'_1 t''_1$ одним переходом t_1 , а последовательность переходов $t'_3 t''_3 t'''_3$ — переходом t_3 .

Сначала докажем необходимость выполнения приведенных условий для достижимых векторов ($\Rightarrow$). Заметим, что изначально выполняется условие 1, и, кроме того, справедливо следующее.

1. Если выполняется условие 1 (для состояния q_0), то после срабатывания перехода t_1 по-прежнему будет выполняться условие 1, а после перехода t_2 будет выполняться условие 2.
2. Если выполнено условие 2 (для состояния q_1), то после срабатывания перехода t_3 по-прежнему будет выполнено условие 2, а после перехода t_4 будет выполнено условие 1.

Отсюда следует, что любой достижимый вектор в зависимости от того состояния, в котором он был получен, удовлетворяет либо условию 1, либо условию 2.

Теперь докажем достаточность ($\Leftarrow$), т. е. покажем, что если для некоторого вектора $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ выполняется одно из двух рассматриваемых условий, то этот вектор v является достижимым машиной АМ $\mathcal{M}$ (из начального состояния q_0 и вектора $v_0 = (0, 0, 1)$) в соответствующем состоянии (q_0 или q_1). Доказательство проводится индукцией по значениям первой координаты.

Базис индукции. Пусть $v = (\alpha, \beta, \gamma)$. Если $\alpha = 0$ и для вектора v выполняется условие 1, тогда имеет место одно из двух.

1. $v = (0, 0, 1)$, и v достижим в состоянии q_0 по пустому пути;
2. $v = (0, 1, 0)$, и v достижим в состоянии q_0 по переходу t_1 .

Если же $\alpha = 0$, но для вектора v справедливо условие 2, то в этом случае возможен один из следующих вариантов.

1. $v = (0, 1, 0)$, и v достижим в состоянии q_1 по пути $t_1 t_2$;
2. $v = (0, 0, 1)$, и v достижим в состоянии q_1 по переходу t_2 ;
3. $v = (0, 0, 2)$, и v достижим в состоянии q_1 по пути $t_1 t_2 t_3$.

Во всех случаях вектор v достижим в правильном состоянии.

Предположение индукции. Предположим, что все векторы, удовлетворяющие условию 1 или условию 2, для первой координаты которых выполняется неравенство $\alpha \leq a_1 - 1$, $a_1 \in \mathbb{N}$, достигаются машиной АМ $\mathcal{M}$ в соответствующем правильном состоянии. Пусть вектор $a = (a_1, a_2, a_3)$ удовлетворяет условию 1, т.е. $0 < a_2 + a_3 \leq 2^{a_1}$. Покажем, что вектор a достижим в состоянии q_0 .

Шаг индукции. Рассмотрим случай, когда для вектора a выполняется неравенство $0 < a_2 + a_3 \leq 2^{a_1-1}$. Тогда по предположению индукции вектор $a' = (a_1 - 1, a_2, a_3)$ достижим в состоянии q_0 . Применяя к a' последовательность переходов $t_2 t_4$, получим вектор a и окажемся при этом в состоянии q_0 .

Остается рассмотреть ситуацию, при которой $2^{a_1-1} < a_2 + a_3 \leq 2^{a_1}$. Пусть $a_2 + a_3 = 2^{a_1-1} + b$, где $0 < b \leq 2^{a_1-1}$. По предположению индукции существует путь, приводящий к вектору $a' = (a_1 - 1, b, 2^{a_1-1} - b)$, так как вектор a' удовлетворяет условию 1. Но теперь к вектору a' может быть применена последовательность переходов $t_2(t_3)^b t_4(t_1)^{a_2}$, результатом которой будет вектор $(a_1, a_2, 2^{a_1-1} + b - a_2)$ в состоянии q_0 . Однако, поскольку $2^{a_1-1} + b - a_2 = a_3$, получается, что в действительности в состоянии q_0 был достигнут рассматриваемый вектор a .

Аналогичным образом доказывается, что если вектор a удовлетворяет условию 2, то он достижим машиной АМ $\mathcal{M}$ в состоянии q_1 .

Итак, мы показали, что произвольный вектор достигается машиной АМ $\mathcal{M}$ в состоянии q_0 или q_1 тогда и только тогда, когда он удовлетворяет соответственно либо условию 1, либо условию 2.

Таким образом, для состояний q_0 и q_1 мы имеем следующие множества достижимости:

$$R(q_0) = \{(\alpha, \beta, \gamma) \mid 0 < \beta + \gamma \leq 2^\alpha\},$$

$$R(q_1) = \{(\alpha, \beta, \gamma) \mid 0 < 2\beta + \gamma \leq 2^{\alpha+1}\}.$$

Построим множества достижимости для состояний q'_0 , q'_1 и q''_1 . Эти множества легко получаются из уже построенных $R(q_0)$ и $R(q_1)$.

$$R(q'_0) = \{(\alpha, \beta, \gamma) \mid 0 < \beta \leq 2^\alpha \wedge \gamma = 0\} \cup \{(\alpha, \beta + 1, \gamma) \mid 0 < \beta + \gamma \leq 2^\alpha \wedge \gamma > 0\},$$

$$R(q'_1) = \{(\alpha, \beta, \gamma) \mid 0 < \gamma \leq 2^{\alpha+1} \wedge \beta = 0\} \cup \{(\alpha, \beta, \gamma + 1) \mid 0 < 2\beta + \gamma \leq 2^{\alpha+1} \wedge \beta > 0\},$$

$$R(q''_1) = \{(\alpha, \beta, \gamma) \mid 0 < \gamma \leq 2^{\alpha+1} \wedge \beta = 0\} \cup \{(\alpha, \beta, \gamma + 2) \mid 0 < 2\beta + \gamma \leq 2^{\alpha+1} \wedge \beta > 0\}.$$

Очевидно, что полученное множество достижимости для машины АМ $\mathcal{M}$

$$R(\mathcal{M}) = R(q_0) \cup R(q_1) \cup R(q'_0) \cup R(q'_1) \cup R(q''_1)$$

не является полулинейным. В частности, элементы множества

$$\{(k+1, 2^k, 2^k) \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq R(\mathcal{M})$$

имеют экспоненциальную зависимость последних двух координат от первой. $\square$

Отметим, что рассмотренная 3-счетчиковая машина АМ $\mathcal{M}$ в некотором смысле является примером простейшей машины, множество достижимости которой неполулинейно. Если мы уменьшим размерность системы на единицу, уберем одно состояние или же сократим граф переходов на одну дугу, то получим машину АМ с *полулинейным* множеством достижимости. В качестве примера чуть более «простой» системы, но по-прежнему имеющей неполулинейное множество достижимости, можно построить 3-счетчиковую машину АМ, очень похожую на уже рассмотренную машину, которая будет реализовывать возведение в квадрат, т. е. квадратичную зависимость между координатами достижимых векторов. Однако вопрос о том, каждая ли автоматная 2-счетчиковая машина порождает *полулинейное* множество достижимости, остается открытым.

Список литературы

1. *Finkel A., Sutre G.* An Algorithm Constructing the Semilinear Post* for 2-Dim Reset/Transfer VASS // In MFCS 2000, LNCS 1893, Springer, 2000. P. 353–362.
2. *Finkel A., Sutre G.* Decidability of Reachability Problems for Classes of Two-Counter Automata // In STACS 2000, LNCS 1770, Springer, 2000. P. 346–357.
3. *Hopcroft J. E., Pansiot J.* On the Reachability Problem for 5-Dimensional Vector Addition Systems. Computer science technical report. Cornell University, 1976. — <http://hdl.handle.net/1813/6102>
4. *Kouzmin E. V., Sokolov V. A.* Communicating Colouring Automata // Proc. Int. Workshop on Program Understanding (sat. of PSI'03), 2003. P. 40–46.
5. *Гинзбург С.* Математическая теория контекстно-свободных языков. М.: Мир, 1970. 328 с.
6. *Кузьмин Е. В., Соколов В. А.* Взаимодействующие раскрашивающие процессы // Моделирование и анализ информационных систем. 2004. Т. 11, №2. С. 8 – 17.
7. *Кузьмин Е. В., Чалый Д. Ю.* Об одном классе счетчиковых машин // Моделирование и анализ информационных систем. 2009. Т. 16, №2. С. 75 – 82.
8. *Минский М.* Вычисления и автоматы. М.: Мир, 1971. 268 с.
9. *Mayr R.* Lossy counter machines. Tech. Report TUM-I9827, Institut für Informatik, TUM, Germany, October 1998.

On a reachability set of automaton 3-counter machines

Kuzmin E. V., Chalyy D. J.

Keywords: abstract counter machines, automaton counter machine, Communicating Colouring Automata, reachability sets, semilinear sets

In this paper we prove the existence of automaton 3-counter machines which have non-semilinear reachability sets.

Сведения об авторах:

Кузьмин Егор Владимирович,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
канд. физ.-мат. наук, доцент;

Чалый Дмитрий Юрьевич,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
канд. физ.-мат. наук, доцент