

УДК 517.9

Разностные аппроксимации уравнения «реакция – диффузия» на отрезке

Глызин С.Д.¹

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

получена 22 сентября 2009

Ключевые слова: хаотический аттрактор, автоколебания, автогенераторы, ляпуновская размерность, бифуркация, инвариантный тор

Для цепочки диффузионно слабо связанных колебательных систем на устойчивом интегральном многообразии построена и проанализирована система разностей фаз осцилляторов. В случае, когда число осцилляторов в цепочке растет, численными методами показано, что ляпуновская размерность аттрактора увеличивается по близкому к линейному закону. Произведен обширный численный эксперимент для разностной модели уравнения Гинзбурга – Ландау, в котором проиллюстрирован этот результат и определены границы применимости асимптотических методов.

Введение

Большое число физических и биохимических приложений связаны с задачей «реакция – диффузия», представляющей собой эволюционное уравнение, в котором пространственно-временные изменения изучаемой переменной обусловлены диффузией по пространственной переменной и нелинейным, обычно колебательным, поведением по времени

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu D \Delta u + \Phi(u), \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\Gamma} = 0. \quad (2)$$

В системе (1) вектор-функция $u(t, x) \in \mathbb{R}^n$ определена в области Ω с достаточно гладкой границей Γ , D — диагональная матрица с положительными элементами, Δ — оператор Лапласа, μ — положительный параметр, $\partial u / \partial \nu$ — производная по направлению внешней нормали. Фазовым пространством задачи (1),(2) считаем

¹Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (государственный контракт №02.740.11.0197).

$\mathring{W}_2^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$, где $\mathring{W}_2^2$ — соболевское пространство функций, удовлетворяющих нулевым граничным условиям Неймана. Кроме того, полагаем, что система обыкновенных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$ $\dot{u} = \Phi(u)$ имеет единственный аттрактор — экспоненциально орбитально устойчивый цикл.

Перечисленные условия обеспечивают существование пространственно однородных периодических режимов краевой задачи (1), (2), которые устойчивы при достаточно большом μ . Уменьшение μ может привести к возникновению сложных пространственно неоднородных колебаний, изучение которых представляет интерес для приложений, поскольку ряд важных моделей биологии и физики сводится именно к уравнению типа «реакция-диффузия». При решении задачи (1), (2) часто возникают существенные трудности вычислительного характера, в связи с чем требуется предварительный асимптотический анализ, который иногда позволяет определить качественную структуру пространства состояний изучаемых динамических систем и возможные фазовые перестройки при изменении параметров. Один из возможных методов изучения качественного поведения решений задачи (1), (2) состоит в замене соответствующих уравнений в частных производных системами связанных осцилляторов. Следует отметить, что изучение взаимодействия таких цепочек имеет и самостоятельное значение, не связанное с породившими их краевыми задачами (см., например, [1–7]). В данной работе рассматривается динамическая система, описывающая поведение разностей фаз близких диффузионно-связанных осцилляторов. Такие системы изучались ранее при некоторых конкретных значениях параметров (см. [8–10]). Ниже изучение этой системы продолжено. С помощью вводимых фазовых систем может быть изучено явление так называемого «диффузионного хаоса» для краевой задачи (1), (2) при некоторых специальных ограничениях.

Под термином «диффузионный хаос» будем понимать странный аттрактор краевой задачи (1), (2), нетривиально зависящий от пространственной переменной. В настоящее время существуют две концепции диффузионного хаоса — маломодовый и многомодовый хаос. Первый из них может возникать в системе (1), (2) при «средних» значениях параметра μ , а второй — при $\mu \rightarrow 0$.

Интерес к маломодовому хаосу инициирован известными работами Лоренца [11], а также Рюэля и Такенса [12], в которых был поставлен общий вопрос: можно ли связать стохастические режимы в распределенной системе, имеющей бесконечно много степеней свободы, с наличием странного аттрактора в системе небольшого числа обыкновенных дифференциальных уравнений, представляющей упрощенную модель исходной системы. В ряде случаев это действительно удается сделать. Для примера сошлемся на известное уравнение Гинзбурга — Ландау

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa_0 \Delta u + \kappa_1 u - \kappa_2 u |u|^2, \quad (3)$$

для которого сформулированный вопрос был решен в статье [13] для некоторых типов краевых условий. Точнее говоря, в [13] численными методами был обнаружен странный аттрактор в трехмерной системе, получающейся из уравнения (3) на отрезке с граничными условиями Неймана в результате двухмодовой галеркинской аппроксимации. Другой пример — анализ странных аттракторов простейших конечно-разностных аппроксимаций краевых задач вида (1), (2) на отрезке (см. [14]).

Многомодовый диффузионный хаос сначала был теоретически описан в статье [10], посвященной исследованию динамики нелинейных осцилляторов, слабо связанных через диффузию, его численный анализ проделан в работе автора [15], из результатов которой вытекает важное следствие: если в системе (1), (2) на отрезке при $\mu \rightarrow 0$ наблюдается диффузионный хаос, то его ляпуновская размерность неограниченно растет. Отметим также численный анализ уравнения Гинзбурга – Ландау, выполненный в [4, 16, 17] для периодических краевых условий.

Более того, становится понятной роль каждого из двух типов диффузионного хаоса в динамике биологической параболической системы (1), (2) при уменьшении параметра μ . Действительно, как показано в статье [18] на типовом примере уравнения Хатчинсона с диффузией, при относительно больших значениях параметра μ в биологической системе наряду с устойчивым однородным циклом имеется некоторое количество устойчивых пространственно неоднородных режимов — так называемых режимов самоорганизации. При уменьшении же μ каждый из режимов самоорганизации порождает свой маломодовый странный аттрактор, а затем все эти аттракторы объединяются в некий единый мультиаттрактор высокой размерности, т. е. возникает многомодовый хаос.

Достаточно ясно, что исследование многомодового хаоса возможно только посредством численного эксперимента. На этом пути, однако, возникает существенная трудность, связанная с тем, что при $\mu \rightarrow 0$ для получения достоверной информации об аттракторах системы (1), (2) необходимо использовать ее разностные аппроксимации со все более мелким шагом по пространственной переменной. В связи с этим становится актуальной проблема нахождения такой конечномерной феноменологической модели краевой задачи (1), (2), которая, во-первых, уже не содержит малого параметра; во-вторых, отражает основные особенности исходной системы при $\mu \rightarrow 0$. Требуемая феноменологическая модель была предложена в статье [10]. Перейдем к описанию этой модели и ее свойств.

1. Динамика фазовых систем слабо связанных осцилляторов

1.1. Постановка задачи

Для краевой задачи (1), (2) уточним предположения относительно параметров и краевых условий. Рассмотрим краевую задачу

$$\dot{u} = \varepsilon \mu D u'' + (A_0 + \varepsilon A_1)u + F(u), \quad (4)$$

с краевыми условиями непроницаемости

$$u'(t, 0) = u'(t, 1) = 0. \quad (5)$$

Здесь $u(t, x) \in \mathbb{R}^2$ при $t \geq 0$, $x \in [0, 1]$, $0 < \varepsilon$, $\mu \ll 1$, $D = \text{diag} \{d_1, d_2\}$, $d_1, d_2 > 0$, $d_1 + d_2 = 1$, точкой обозначена производная по t , штрихом – по x . Ниже предполагаем, что $A_0 a = i\omega a$, $A_0^* b = -i\omega b$, $\omega > 0$, $(a, b) = 1$, F – гладкая нелинейная вектор-функция, имеющая в нуле порядок малости выше первого. В дальнейшем полагаем,

что $\tau'_0 > 0$, где $\lambda'_0 = \tau'_0 + i\omega' = (A_1 a, b)$ и $\operatorname{Re} d < 0$, где $d = d_0 + i\omega c_0$ – первая ляпуновская величина обыкновенного дифференциального уравнения (4) при $\varepsilon = 0$. При этих двух допущениях дифференциальное уравнение в $\mathbb{R}^2$

$$\dot{v} = A_0 v + \varepsilon A_1 v + F(v)$$

имеет орбитально экспоненциально устойчивый цикл $v_*(t, \varepsilon)$ с амплитудой порядка $\sqrt{\varepsilon}$, являющийся одновременно однородным циклом краевой задачи (4), (5).

Представляет интерес задача о структуре и инвариантных числовых характеристиках аттрактора этой динамической системы.

1.2. Построение системы фазовых уравнений

В целях упрощения уравнения (4) заменим в нем оператор дифференцирования по пространственной переменной на разностный аналог. В результате получим систему диффузионно связанных близких осцилляторов, число которых соответствует числу промежутков разбиения области определения пространственной переменной. Будем считать, что нелинейная функция правой части уравнения (4) допускает разложение $F(u) = F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + O(\|u\|^4)$, где функции F_2 и F_3 линейны по своим аргументам. Уравнение (4) после этого превратится в систему следующего вида:

$$\dot{u}_j = \mu \varepsilon D(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) + (A_0 + \varepsilon A_1)u_j + F_2(u_j, u_j) + F_3(u_j, u_j, u_j) + O(\|u_j\|^4), \quad (6)$$

где $u_j(t) \in \mathbb{R}^2$, $j = 1, \dots, n$, n – число промежутков, на которые разбит отрезок $[0, 1]$, $D \cdot n^2$ снова обозначено D . Для переменных u_0 и u_{n+1} выполнены граничные условия непроницаемости

$$u_0 = u_1, \quad u_{n+1} = u_n. \quad (7)$$

Система (6), (7) допускает синхронные решения, т. е. решения вида $u_1 = u_2 = \dots = u_n = v(t)$, и имеет, в частности, синхронный гармонический цикл

$$u_1 = u_2 = \dots = u_n = v_*(t, \varepsilon),$$

являющийся аналогом однородного цикла $u(t, x) = v_*(t, \varepsilon)$ задачи (4).

Таким образом, как и в случае краевой задачи (4), естественно возникает вопрос о существовании и устойчивости у системы (6) при условии (7) «пространственно неоднородных», а точнее говоря, асинхронных стационарных режимов.

В статье [19], в которой развит специальный вариант асимптотического метода Крылова – Боголюбова – Митропольского, указан такой способ конструктивного построения замены переменных

$$u_j = \xi_j \left(\exp(i\omega\tau_j) a + \exp(-i\omega\tau_j) \bar{a} \right) + \sum_{k,l=1}^n \xi_k \xi_l u_{klj} + \dots \quad (8)$$

где u_{klj} — векторные тригонометрические полиномы аргументов $\omega\tau_1, \dots, \omega\tau_n$, что в результате этой замены на третьем шаге выполнения алгоритма после отбрасывания слагаемых высшего порядка малости система (6) преобразуется к виду

$$\dot{\xi}_j = \varepsilon \tau'_0 \xi_j + d_0 \xi_j^3 + \varepsilon \mu g [\xi_{j+1} \cos(\tau_{j+1} - \tau_j + \gamma) - 2\xi_j \cos \gamma + \xi_{j-1} \cos(\tau_{j-1} - \tau_j + \gamma)], \quad (9)$$

$$\omega \dot{\tau}_j = \omega + \varepsilon \omega'_0 + c_0 \xi_j^2 + \varepsilon \mu g \left[\frac{\xi_{j+1}}{\xi_j} \sin(\tau_{j+1} - \tau_j + \gamma) - 2 \sin \gamma + \frac{\xi_{j-1}}{\xi_j} \sin(\tau_{j-1} - \tau_j + \gamma) \right]. \quad (10)$$

Здесь $j = 1, 2, \dots, n$, $\tau'_0 + i\omega'_0 = (A_1 a, b)$, константы g и γ определяются матрицей связи D и равны $g = |(Da, b)|$, $\gamma = \arg(Da, b)$, соответственно, а ляпуновская величина $d_0 + i\omega c_0$ находится по формуле

$$d_0 + i\omega c_0 = (F_3(\bar{a}, a, a) + F_3(a, \bar{a}, a) + F_3(a, a, \bar{a}) + F_2(a, v_0) + F_2(v_0, a) + F_2(v_1, \bar{a}) + F_2(\bar{a}, v_1), b),$$

где $v_0 = -A_0^{-1} (F_2(a, \bar{a}) + F_2(\bar{a}, a))$, $v_1 = (2i\omega E - A_0)^{-1} F_2(a, a)$. Кроме того, из краевых условий (7) имеем

$$\xi_0 = \xi_1, \quad \xi_{n+1} = \xi_n, \quad \tau_0 = \tau_1, \quad \tau_{n+1} = \tau_n. \quad (11)$$

Выполним в системе (9), (10) нормирующие замены $\xi_j/\sqrt{\varepsilon} \rightarrow \xi_j$, $\varepsilon t \rightarrow t$ и перейдем к системе медленных движений

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_j &= \tau'_0 \xi_j + d_0 \xi_j^3 + \mu g [\xi_{j+1} \cos(\alpha_j + \gamma) - 2\xi_j \cos \gamma + \xi_{j-1} \cos(\alpha_{j-1} - \gamma)], \\ \dot{\alpha}_j &= c_0 (\xi_{j+1}^2 - \xi_j^2) + \mu g \left[\frac{\xi_{j+2}}{\xi_{j+1}} \sin(\alpha_{j+1} + \gamma) - \frac{\xi_{j+1}}{\xi_j} \sin(\alpha_j + \gamma) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\xi_j}{\xi_{j+1}} \sin(\alpha_j - \gamma) + \frac{\xi_{j-1}}{\xi_j} \sin(\alpha_{j-1} - \gamma) \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где $\alpha_j = \omega(\tau_{j+1} - \tau_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Следует отметить, что к уравнению (4) может быть сначала применен метод квазинормальных форм, в частности, как показано в [20], решения краевой задачи (4) с точностью до $\varepsilon^{3/2}$ приближаются решениями нормализованной системы

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \mu(Da, b) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \lambda'_0 \xi + d\xi |\xi|^2, \quad (13)$$

с краевыми условиями

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}(\tau, 0) = \frac{\partial \xi}{\partial x}(\tau, 1) = 0, \quad (14)$$

где $\tau = \varepsilon t$, а для решений краевой задачи (4) имеет место асимптотическое разложение

$$u(t, \tau, x) = \sqrt{\varepsilon} \left(\xi(\tau, x) e^{i\omega t} a + \bar{\xi}(\tau, x) e^{-i\omega t} \bar{a} \right) + \dots$$

Применение конечно-разностных аппроксимаций по пространственной переменной к краевой задаче (13), (14) и последующий переход к полярным координатам

также приводят к формулам (9), (10). Легко видеть, что уравнение (13) представляет собой вариант уравнения Гинзбурга – Ландау (3) с пространственной переменной, определенной на отрезке $[0, 1]$.

При $\mu = 0$ система (12) имеет глобально экспоненциально устойчивое интегральное многообразие

$$\eta_j = \left(-\frac{\tau'_0}{\text{Red}} \right)^{1/2}, \quad j = 1, \dots, n,$$

поведение траекторий на котором описывают следующие уравнения:

$$\dot{\alpha}_j = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Из общих утверждений монографии [21] следует, что при всех малых μ она имеет аналогичное глобально экспоненциально устойчивое интегральное многообразие, задаваемое равенствами

$$\eta_j = \left(-\frac{\tau'_0}{\text{Red}} \right)^{1/2} \left(1 + \mu \varphi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \mu) \right), \quad j = 1, \dots, n, \quad (15)$$

где φ_j — гладкие по совокупности переменных 2π -периодические по α_k функции. Для дальнейшего важно, что в силу структуры правых частей системы (12) для них справедливы асимптотические формулы

$$\varphi_j = \frac{g}{\tau'_0} \left(\cos(\alpha_{j+1} + \gamma) - 2 \cos \gamma + \cos(\alpha_{j-1} - \gamma) \right) + O(\mu). \quad (16)$$

В самом деле, если учесть равенства (15), (16) в системе (12), с точностью до слагаемых порядка μ получаем уравнения

$$\dot{\alpha}_j = 2 \sin \alpha_j - \sin \alpha_{j-1} - \sin \alpha_{j+1} + \kappa (\cos \alpha_{j-1} - \cos \alpha_{j+1}), \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (17)$$

с граничными условиями

$$\alpha_0 = \alpha_n = 0. \quad (18)$$

Здесь

$$\kappa = \frac{x_0 + b_0}{x_0 b_0 - 1}, \quad x_0 = -\frac{\text{Im}(Da, b)}{\text{Re}(Da, b)}, \quad b_0 = \frac{c_0}{d_0}. \quad (19)$$

Поведение решений динамических систем (9), (10), (11) на многообразии (15) определяется по грубым устойчивым режимам системы (17), (18).

Суммируем изложенное выше в виде следующего утверждения.

Теорема 1. *Существуют такие достаточно малые положительные числа ε_0, μ_0 и не зависящее от них положительное число r_0 , что при $0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon, 0 < \mu \leq \mu_0$ система (6), (7) имеет n -мерный инвариантный тор, к которому при $t \rightarrow \infty$ стремятся все решения с ненулевыми начальными условиями из шара радиуса r_0 с центром в нуле. Характер поведения решений на этом торе с точностью до слагаемых порядка μ описывается системой фазовых уравнений (17), (18).*

1.3. Динамические свойства фазовой системы в случае трех и четырех осцилляторов

Аналитическое исследование системы (17), (18) легко проделать при $n = 2, 3$. При $n = 4$ качественное исследование системы (17), (18) сопряжено с определенными трудностями, а при $n > 4$ возможен лишь численный анализ.

Рассмотрим динамику (17), (18) при $n = 3$ и $n = 4$ для различных значений параметра κ . Пусть сначала $n = 3$, тогда система (17), (18) примет вид

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= 2 \sin \alpha_1 - \sin \alpha_2 + \kappa(1 - \cos \alpha_2), \\ \dot{\alpha}_2 &= 2 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 + \kappa(\cos \alpha_1 - 1).\end{aligned}\quad (20)$$

Нетрудно убедиться, что с точностью до периода данная система имеет наряду с тривиальным $(0, 0)$ следующие состояния равновесия:

$$(-\gamma_1, \gamma_1), \text{ где } \gamma_1 = 2 \arcsin(3(9 + \kappa^2)^{-1/2}), \quad (21)$$

$$(\gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4 + \pi, \gamma_2 - \gamma_3), (\gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4, \gamma_2 + \gamma_3 + \pi), \quad (22)$$

где $\gamma_2 = \arcsin(\kappa(\kappa^2 + 1)^{-3/2}(\kappa^2 - 3))$, $\gamma_3 = \arcsin(\kappa(\kappa^2 + 1)^{-1/2})$, $\gamma_4 = 2 \arcsin((\kappa^2 + 1)^{-1/2})$.

Сразу отметим, что состояния равновесия (21) существуют лишь при $|\kappa| \leq 3/\sqrt{7}$. Из условий устойчивости этих состояний получаем:

1. Для любого положительного значения параметра κ нулевое состояние равновесия является неустойчивым узлом, а состояния равновесия вида (22) – седлами.
2. Состояние равновесия вида (21) существует при $0 < \kappa < 3/\sqrt{7}$ и представляет собой устойчивый узел.

Отметим одно простое свойство системы (20), позволяющее найти сепаратрису, идущую из нулевого состояния равновесия в точку вида (21).

Лемма 1. *Прямая $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ является инвариантным множеством системы (20).*

Доказательство осуществляется прямой подстановкой выражения $\alpha_1 = -\alpha_2$ в систему (20). В результате оба уравнения (20) превращаются в соотношение:

$$\dot{\alpha}_1 = 3 \sin \alpha_1 + \kappa(1 - \cos \alpha_1).$$

Отметим, что данное уравнение имеет два состояния равновесия: неустойчивое $\alpha_1 = 0$ и устойчивое $\alpha_1 = -\gamma_1$.

Суммируя, можно утверждать, что при значениях параметра $0 < \kappa < 3/\sqrt{7}$ на фазовом торе системы (20) имеется единственное глобально устойчивое состояние равновесия вида (21).

Изменение параметра κ приводит к тому, что при $\kappa = 3/\sqrt{7}$ состояния равновесия (22) сливаются с (21) и отбирают у него устойчивость. В результате указанной бифуркации у системы (20) при $\kappa > 3/\sqrt{7}$ остается только глобально орбитально асимптотически устойчивый однообходный цикл, существование которого обусловлено 2π -периодичностью системы (20) по α_1 и α_2 .

В случае четырех взаимодействующих осцилляторов фазовая система (17), (18) приобретает вид

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= 2 \sin \alpha_1 - \sin \alpha_2 + \kappa(1 - \cos \alpha_2), \\ \dot{\alpha}_2 &= 2 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 - \sin \alpha_3 + \kappa(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_3), \\ \dot{\alpha}_3 &= 2 \sin \alpha_3 - \sin \alpha_2 + \kappa(\cos \alpha_2 - 1).\end{aligned}\quad (23)$$

При определении состояний равновесия системы (23) центральное значение имеет уравнение

$$\sin((\alpha_1 + \alpha_3)/2) \cdot \cos(\gamma_3 - (\alpha_1 - \alpha_3)/2) = 0, \quad (24)$$

где, как и прежде, $\gamma_3 = \arcsin(\kappa(\kappa^2 + 1)^{-1/2})$, получающееся после сложения всех правых частей системы (23). Учитывая 2π -периодичность переменных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ системы (23), из условия $\sin((\alpha_1 + \alpha_3)/2) = 0$ получаем следующие состояния равновесия:

$$(0, 0, 0), \quad (25)$$

$$(\pi, 0, \pi), \quad (26)$$

$$(-\arcsin(\kappa), \pi, \arcsin(\kappa)), \quad (27)$$

$$(\pi + \arcsin(\kappa), \pi, \pi - \arcsin(\kappa)), \quad (28)$$

последние два из которых существуют лишь при $|\kappa| \leq 1$. Анализ матрицы устойчивости позволяет заключить, что тривиальное решение системы при любых значениях κ – неустойчивый узел, состояние равновесия (26), соответствующее колебаниям в противофазе – седло-узел, состояние равновесия (27) – также седло-узел и, наконец, точка (28) является устойчивым узлом при $0 < \kappa < \sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}$ и седло-узлом при $\sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2} < \kappa < 1$, напомним, что при $\kappa > 1$ этого состояния равновесия не существует.

Все состояния равновесия, получающиеся в результате обнуления второго сомножителя уравнения (24), оказываются неустойчивыми, и их вид здесь приводиться не будет.

Система (23), так же как и (20), имеет инвариантные множества, позволяющие прояснить характер расположения траекторий системы. В частности, выполнено следующее простое утверждение:

Лемма 2. *Прямая $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = \pi$ является инвариантным множеством системы (23).*

Как и в двумерном случае, подстановка $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = \pi$, превращает все уравнения системы (23) в одно соотношение:

$$\dot{\alpha}_1 = 2 \sin \alpha_1 + 2\kappa,$$

которое имеет два состояния равновесия: неустойчивое $\alpha_1 = -\arcsin(\kappa)$ и устойчивое $\alpha_1 = \pi - \arcsin(\kappa)$.

Суммируя сказанное, можно утверждать, что состояние равновесия (28) является единственным устойчивым режимом исследуемой динамической системы при $0 < \kappa < \sqrt{(\sqrt{5} - 1)}/2$.

Увеличение κ приводит к усложнению динамики. Численный анализ системы (23) показал, что при $\kappa > \sqrt{(\sqrt{5} - 1)}/2$ возникают устойчивые однообходные циклы, которые, по-видимому, остаются единственными устойчивыми режимами системы (23) при всех κ за исключением промежутка (κ_1, κ_2) , где $\kappa_1 \approx 1.13, \kappa_2 \approx 1.20$. В этом промежутке поведение решений системы носит неупорядоченный характер с относительно малым старшим ляпуновским показателем. Вычисленные в средней точке промежутка $\kappa_1 = 1.165$ значения ляпуновских показателей оказались равными $\lambda_1 \approx 0.0137, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \approx -2.118$.

1.4. Численные оценки старшего ляпуновского показателя и ляпуновской размерности фазовой системы при $n > 4$

При достаточно большом κ и $n > 4$ система (17), (18) может демонстрировать неупорядоченное поведение решений. В связи с этим перейдем к численной оценке ляпуновских экспонент и ляпуновской размерности d_L притягивающего множества изучаемой системы для различных n и κ . Для определения величины d_L будем пользоваться стандартной формулой

$$d_L = j + \sum_{i=1}^j \frac{\lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}, \quad (29)$$

где λ_i – выписанные в порядке возрастания ляпуновские экспоненты, а j – такой номер, что

$$\sum_{i=1}^j \lambda_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0.$$

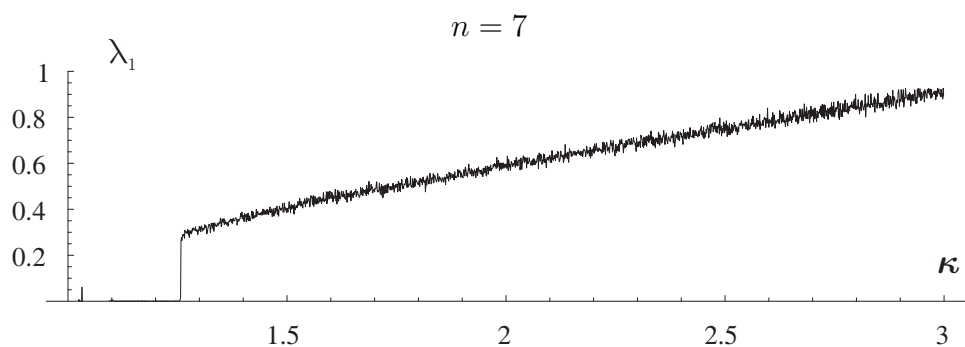
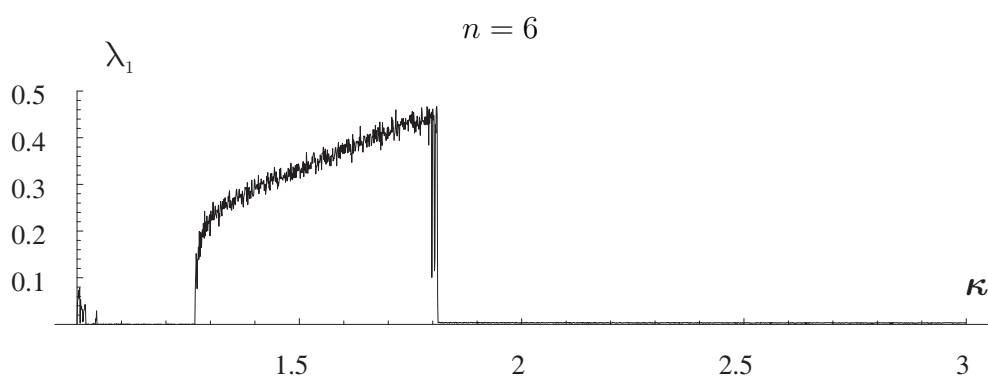
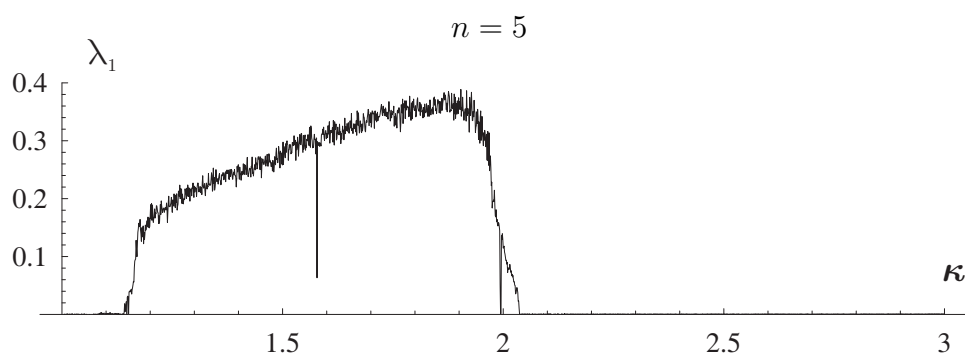
Положительность старшего ляпуновского показателя часто рассматривается как признак хаотических колебаний, поэтому представляет интерес определение зависимости этого показателя от параметра. Следует отметить, что отрицательность величины λ_1 свидетельствует о том, что решение системы приближается к устойчивому состоянию равновесия, если же λ_1 близко к нулю, то решения изучаемой системы в ситуации общности положения приближаются к орбитально асимптотически устойчивому циклу. Ниже представлены графики зависимостей λ_1 от κ при $n = 5, \dots, 10$. Численное определение ляпуновских показателей было произведено с помощью программы Tracer3.7 (см. [22]).

Графики зависимостей построены при $1 < \kappa < 4$. Такие значения параметра выбраны, поскольку при $0 < \kappa < 1$ система (17), (18) имеет устойчивое состояние равновесия, а при $\kappa > 4$ и $n = 6, \dots, 9$ единичные расчеты показали примерно ту же зависимость от κ , что и на изученном промежутке.

Представленные графики позволяют судить об общей динамике системы (17), (18) при изменении κ .

Для n , равных пяти и шести (см. рис. 1, 2), сценарий фазовых перестроек следующий:

- 1) при достаточно малых κ глобально устойчиво ненулевое состояние равновесия системы;
- 2) при увеличении κ возникает устойчивый цикл (намотка на торе);
- 3) цикл теряет устойчивость с возникновением хаотических колебаний;
- 4) в зоне хаотических колебаний наблюдаются окна периодичности;
- 5) наконец, при достаточно больших κ снова устойчивым оказывается многообходный цикл.



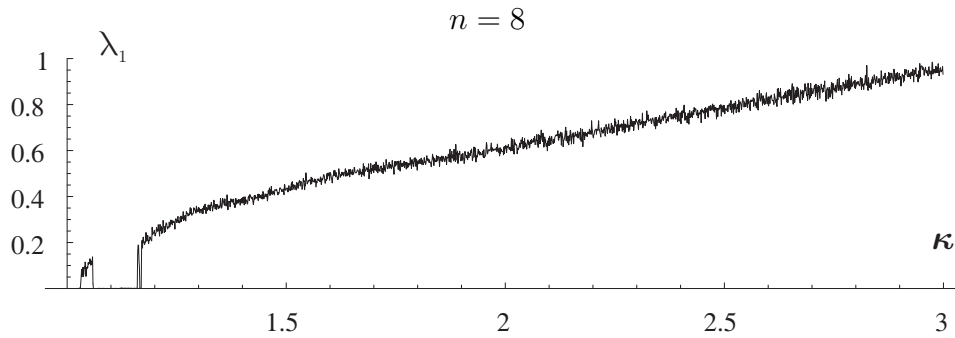


Рис. 4.

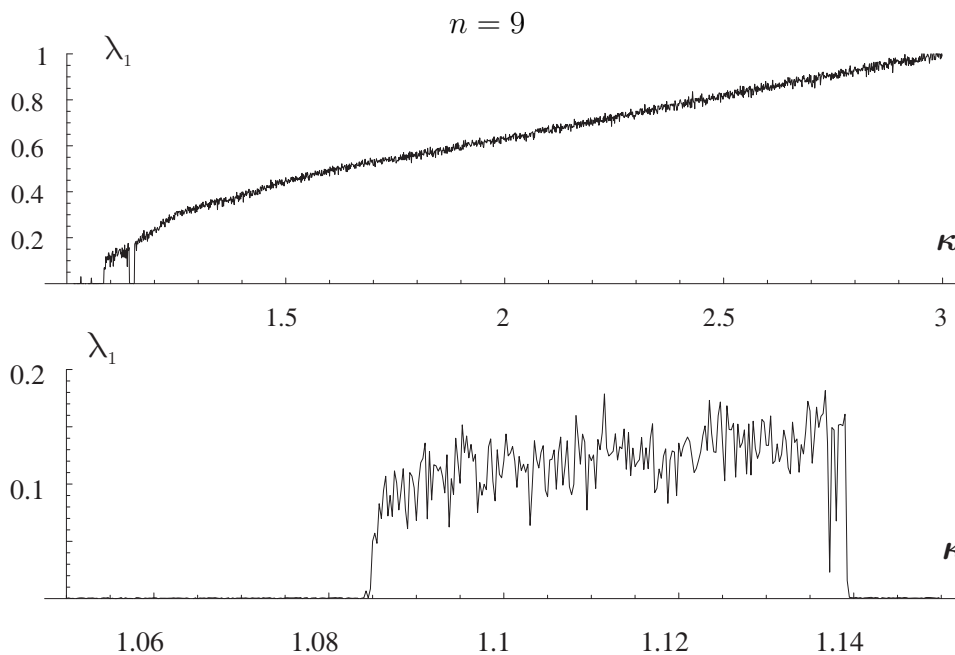


Рис. 5.

В случае если $n > 6$ при сохранении первых четырех пунктов приведенного сценария пятый существенно меняется (см. рис. 3 – 5). Как оказалось, увеличение κ в этих случаях не приводит к потере хаотических колебаний и возникновению циклов. Остановимся несколько подробнее на области значений κ , соответствующей переходу от регулярных колебаний к хаотическим. На рис. 5 представлены два графика для $n = 9$. На верхнем из них, как и в других случаях, представлена зависимость $\lambda_1(\kappa)$ на промежутке от $\kappa = 1$ до $\kappa = 4$, а на нижнем рисунке представлен промежуток от $\kappa = 1.05$ до $\kappa = 1.15$. Из этого графика видно, что в процессе перехода от периодических колебаний к хаотическим имеются многочисленные окна периодичности. Для других значений n окрестность точки перехода на графике зависимости λ_1 от κ имеет аналогичную структуру.

Рассмотрим теперь зависимость ляпуновской размерности d_L от числа осцилляторов n . Численные оценки этой величины, выполненные при различных значениях κ , приведены в следующей таблице:

Таблица 1.

	$\kappa = 1$	$\kappa = 1.5$	$\kappa = 2$	$\kappa = 2.5$	$\kappa = 3$	$\kappa = 3.5$	$\kappa = 4$
$n = 5$	0	3.042	2.558	1	1	1	1
$n = 6$	1.025	4.028	3.02	1	1	1	1
$n = 7$	1	4.729	4.997	5.049	5.101	5.134	5.207
$n = 8$	1	5.401	5.74	5.869	5.99	6.054	6.125
$n = 9$	0	6.127	6.521	6.735	6.913	6.965	7.046
$n = 10$	1	6.766	7.259	7.527	7.667	7.8	7.940
$n = 11$	1	7.383	8.05	8.362	8.505	8.657	8.809
$n = 12$	1	8.002	8.741	9.132	9.337	9.502	9.639
$n = 13$	1	8.502	9.395	9.926	10.164	10.31	10.481
$n = 14$	1	9.032	10.116	10.638	10.923	11.173	11.302
$n = 15$	1	9.564	10.74	11.349	11.691	11.946	12.145
$n = 16$	1	10.079	11.375	12.062	12.439	12.725	12.997
$n = 17$	1	10.572	12.011	12.753	13.203	13.506	13.74
$n = 18$	2.202	10.944	12.618	13.425	13.925	14.277	14.509
$n = 19$	1	11.35	13.244	14.076	14.636	15.055	15.322
$n = 20$	1	11.83	13.74	14.767	15.328	15.746	16.106

В графы таблицы вносился ноль, если у системы имеется устойчивое состояние равновесия, и единица, если устойчивый цикл. Зависимость d_L от n близка к линейной, о чем свидетельствуют приведенные ниже формулы, полученные по данным таблицы 1 при $7 \leq n \leq 20$ из условий наилучшего среднеквадратического приближения.

$$\begin{aligned}
 d_L(n) &\approx 0.5416 \cdot n + 1.279 \pm 0.48 && \text{при } \kappa = 1.5, \\
 d_L(n) &\approx 0.6762 \cdot n + 0.481 \pm 0.25 && \text{при } \kappa = 2, \\
 d_L(n) &\approx 0.7456 \cdot n + 0.053 \pm 0.24 && \text{при } \kappa = 2.5, \\
 d_L(n) &\approx 0.785512 \cdot n - 0.189 \pm 0.16 && \text{при } \kappa = 3, \\
 d_L(n) &\approx 0.8159 \cdot n - 0.383 \pm 0.14 && \text{при } \kappa = 3.5, \\
 d_L(n) &\approx 0.8349 \cdot n - 0.46 \pm 0.11 && \text{при } \kappa = 4.
 \end{aligned}$$

В полученных формулах точность приближения увеличивается с ростом κ . Отметим, кроме того, что для $n = 7, \dots, 20$ значения d_L , представленные в таблице 1, медленно растут с увеличением κ .

Подводя итоги данного пункта работы, отметим, что в случае, если область изменения пространственной переменной – отрезок, нами показано, что с уменьшением диффузии размерность аттрактора фазовой системы растет. Это позволяет считать, что и у исходной краевой задачи происходит рост размерности притягивающего множества.

Непосредственный численный анализ краевых задач типа «реакция – диффузия» при достаточно малой диффузии показывает наличие у них сложных пространственно неоднородных режимов, перейдем теперь к задаче расчета их ляпуновских показателей и размерностных характеристик.

2. Численный анализ разностных аппроксимаций уравнения Гинзбурга – Ландау при стремлении коэффициента диффузии к нулю

2.1. Построение разностных аппроксимаций

В данном разделе с помощью численного анализа изучается вопрос об аттракторах уравнения Гинзбурга – Ландау (13)

$$\dot{w} = \mu(1 - ia)w'' + w - (1 + ib)w|w|^2, \quad (30)$$

на отрезке $[0, 1]$ изменения пространственной переменной x с условиями Неймана на границах

$$w'(t, 0) = w'(t, 1) = 0. \quad (31)$$

Здесь $w(t, x)$ — комплекснозначная функция своих аргументов, точкой обозначена производная по t , а штрихом — по x .

Предполагается, что $\mu \rightarrow 0$, $\mu > 0$, а все остальные параметры имеют порядок единицы. Отметим, что уравнение (30) может быть получено из (13) при условии, что $\tau'_0 > 0$ и $\text{Re } d < 0$, с помощью нормирующих замен и переобозначения параметров системы.

Численный анализ краевой задачи типа (30), (31) многократно выполнялся для различных значений входящих параметров и коэффициента диффузии μ порядка единицы (см., например, [3, 4, 13, 16, 17, 23–25]). При $\mu \rightarrow 0$ вычислительный процесс осложняется необходимостью брать с уменьшением μ все более мелкие разбиения пространственной переменной x . Прделанные в предыдущем разделе асимптотические исследования показывают, что в ситуации, близкой к бифуркации Андронова – Хопфа, и достаточно малом μ для системы фазовых уравнений с ростом их размерности (числа учитываемых осцилляторов) увеличивается размерность соответствующего притягивающего множества. Именно поэтому при малых μ требуется увеличивать число точек разбиения пространственной переменной. Наша задача численными методами проиллюстрировать построения предыдущего раздела.

Краевая задача (30), (31), очевидным образом, имеет пространственно однородное периодическое решение

$$w(t, x) = \exp(-ib(t + \phi_*)), \quad (32)$$

где ϕ_* — произвольное число. При достаточно большом μ это решение орбитально асимптотически устойчиво, а при условии $ab > 1$ имеется критическое значение

$$\mu_{\text{кр}} = \frac{2(ab - 1)}{\pi^2(1 + a^2)} \quad (33)$$

такое, что при $\mu > \mu_{\text{кр}}$ пространственно однородное решение устойчиво, а при $\mu < \mu_{\text{кр}}$ — неустойчиво.

Всюду ниже считаем, что параметры a, b фиксированы и заданы, к примеру, равенствами

$$a = 0.5, \quad b = 8. \quad (34)$$

Отметим, что согласно формулам (19) данным значениям параметров соответствует величина $\kappa = 17/6$.

Для описания соответствующего численного эксперимента сначала, полагая $w = u + iv$, перейдем от уравнения для комплексного переменного w из (30) к системе

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \mu(u'' - av'') + u - (u - bv)(u^2 + v^2), \\ \dot{v} &= \mu(au'' + v'') + v - (bu + v)(u^2 + v^2),\end{aligned}\tag{35}$$

с краевыми условиями

$$u'(t, 0) = u'(t, 1) = v'(t, 0) = v'(t, 1) = 0.\tag{36}$$

Заменим, далее, в (35) частные производные по x приближенными равенствами

$$\begin{aligned}u_{xx}(t, x)|_{x=(j-\frac{1}{2})/N} &\approx N^2(u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)), \\ v_{xx}(t, x)|_{x=(j-\frac{1}{2})/N} &\approx N^2(v_{j+1}(t) - 2v_j(t) + v_{j-1}(t)),\end{aligned}$$

где N — произвольно фиксированное натуральное число,

$$u_j(t) = u(t, x)|_{x=(j-\frac{1}{2})/N}, \quad v_j(t) = v(t, x)|_{x=(j-\frac{1}{2})/N}, \quad j = 1, \dots, N.$$

В результате для переменных u_j, v_j приходим к конечномерной модели вида

$$\begin{aligned}\dot{u}_j &= \mu N^2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1} + a(v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1})) + \\ &\quad + u_j - (u_j - bv_j)(u_j^2 + v_j^2), \\ \dot{v}_j &= \mu N^2(v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1} - a(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1})) + \\ &\quad + v_j - (v_j + bu_j)(u_j^2 + v_j^2), \quad j = 1, \dots, N.\end{aligned}\tag{37}$$

Для системы (37) выполнены краевые условия

$$u_0 = u_1, \quad v_0 = v_1, \quad u_{N+1} = u_N, \quad v_{N+1} = v_N.\tag{38}$$

Сразу отметим, что в системе (37), (38) имеется унаследованная от краевой задачи (30), (31) симметрия, состоящая в инвариантности относительно замены переменных

$$u_j \rightarrow u_{N-j+1}, \quad v_j \rightarrow v_{N-j+1}, \quad j = 1, \dots, N.\tag{39}$$

Кроме того, система (37), (38), так же как и исходная (30), (31), имеет пространственно однородный цикл

$$u_k(t) = \cos(bt + \phi_*), \quad v_k(t) = -\sin(bt + \phi_*),\tag{40}$$

который глобально экспоненциально устойчив при $\mu > \mu_{\text{кр}}(N)$ и неустойчив при $\mu < \mu_{\text{кр}}(N)$, где

$$\mu_{\text{кр}}(N) = \frac{ab - 1}{2(1 + a^2)N^2 \sin^2(\pi/2N)}.\tag{41}$$

При фиксированных в соответствии с (34) значениях параметров a, b имеем по формуле (33) $\mu_{\text{кр}} \approx 0.48634$, в свою очередь при $N = 20$ по формуле (41) получаем

$\mu_{кр}(20) \approx 0.487343$. Нетрудно видеть, что величины $\mu_{кр}$ и $\mu_{кр}(20)$ отличаются друг от друга лишь в третьем знаке. Это означает, что при μ близких к $\mu_{кр}$ разностная модель (37), (38) вполне адекватно описывает исходную краевую задачу. Уменьшение величины $\mu < \mu_{кр}(N)$ приводит к появлению в результате бифуркации типа вилки пары орбитально асимптотически устойчивых симметричных друг другу в смысле замены (39) пространственно неоднородных циклов. Дальнейшие фазовые перестройки системы (37), (38) можно проследить лишь численными методами, к обзору результатов которых мы и переходим.

2.2. Результаты численного счета

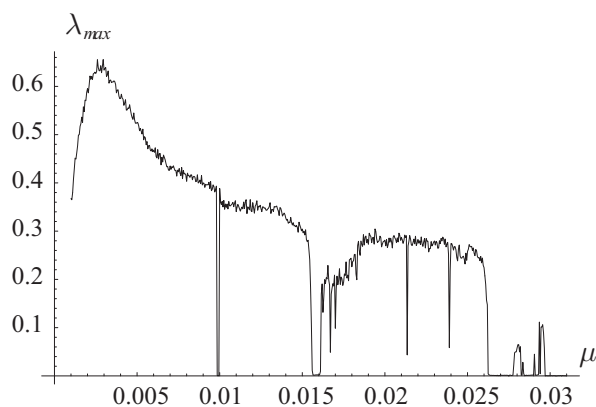
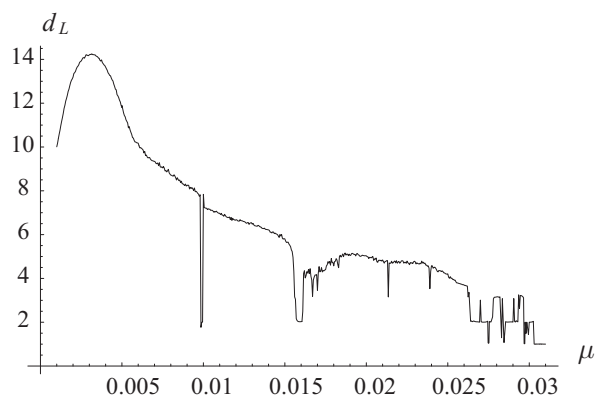
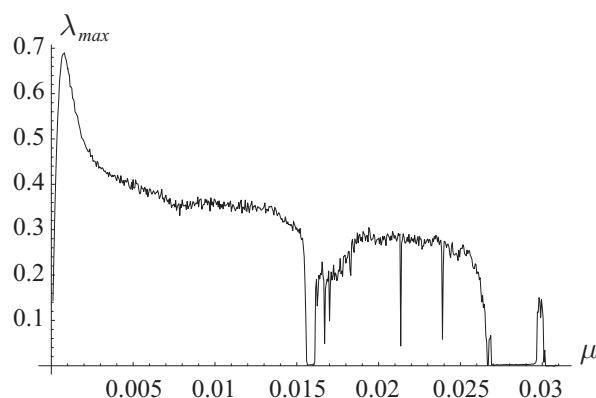
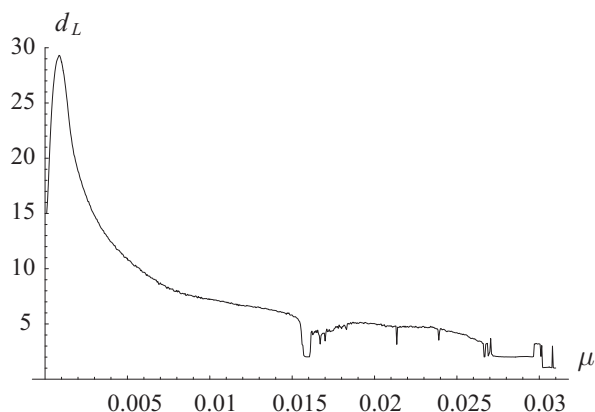
Опишем сначала фазовые перестройки, происходящие с системой (37), (38) после разрушения пространственно однородного цикла. Симметричные циклы, возникшие в результате потери устойчивости однородного режима, остаются аттракторами системы (37), (38) вплоть до значения $\mu \approx 0.1183$ (вычислено для $N = 20$), при котором они объединяются в один самосимметричный пространственно неоднородный цикл. Затем при $\mu \approx 0.0351$ этот цикл теряет устойчивость и от него ответвляется пара симметричных друг другу устойчивых циклов. Эти циклы колебательным образом теряют устойчивость при $\mu \approx 0.0338$ ($N = 20$), в результате чего возникает два устойчивых двумерных инвариантных тора. Устойчивыми движениями на полученных торах могут быть как квазипериодические, так и периодические колебания. Наконец, при $\mu \approx 0.033$ ($N = 20$) торы разрушаются и возникают хаотические колебания.

Для $N = 10$ и $N = 20$ на промежутке изменения μ от 0.03 до нуля с шагом 0.0005 был вычислен спектр ляпуновских экспонент и на их основе ляпуновская размерность аттрактора системы (37), (38). На рис. 6, 7 представлены графики зависимости от μ старшего ляпуновского показателя $\lambda_{max}(\mu)$ и ляпуновской размерности $d_L(\mu)$ при $N = 10$, а на рис. 8, 9 — при $N = 20$.

На промежутке изменения параметра μ от 0.03 до примерно 0.015 графики зависимостей имеют многочисленные провалы, соответствующие окнам периодичности или квазипериодичности, значение λ_{max} при этом обращается в нуль, а d_L равно единице в случае циклов и двум в случае двумерных торов.

Графики зависимости $d_L(\mu)$ при $0.003 < \mu < 0.01$ для $N = 10$ и при $0.001 < \mu < 0.015$ для $N = 20$ близки к гиперболической, что, очевидным образом, соответствует выводам предыдущего пункта о росте размерности аттрактора системы (17), (18) с ростом ее размерности. Выбор μ на промежутке от 0 до 0.003 при $N = 10$ и от 0 до 0.001 при $N = 20$ приводит к тому, что соответствующая система (37), (38) уже не может адекватно описывать исходную краевую задачу (35), (36). Отметим, что при $N = 20$, как и следовало ожидать, промежуток близкого к гиперболическому изменения величины $d_L(\mu)$ шире, чем при $N = 10$. Максимальное значение размерности аттрактора достигается при $N = 10$ в точке $\mu \approx 0.00305$ и приблизительно равно 14.23, а при $N = 20$ — в точке $\mu \approx 0.00085$ и $d_L(0.00085) \approx 29.32$.

Для того, чтобы убедиться в том, что с ростом N разностные модели (37), (38) имеют аттракторы с близкими показателями, были выполнены расчеты при фиксированных $\mu = 0.02, 0.01, 0.005, 0.002$ и изменении величины N от 5 до 30. На рис. 10–17 представлены графики зависимостей $\lambda_{max}(N)$ и $d_L(N)$ при указанных выше зна-

Рис. 6. $\lambda_{max}(\mu)$ при $N = 10$ Рис. 7. $d_L(\mu)$ при $N = 10$ Рис. 8. $\lambda_{max}(\mu)$ при $N = 20$ Рис. 9. $d_L(\mu)$ при $N = 20$

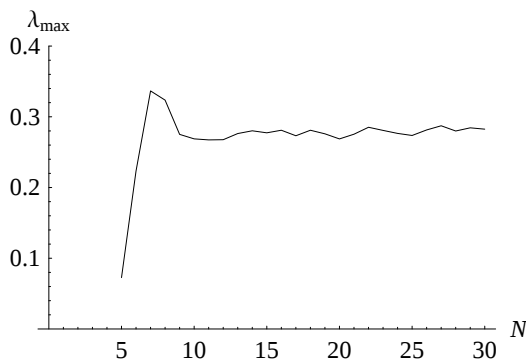
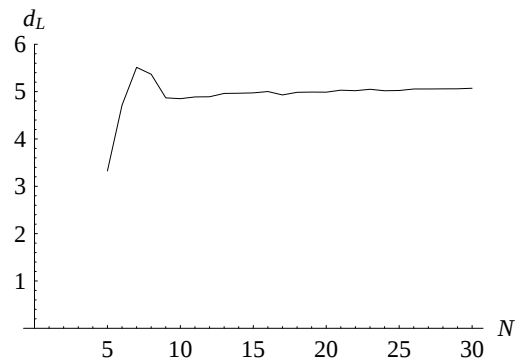
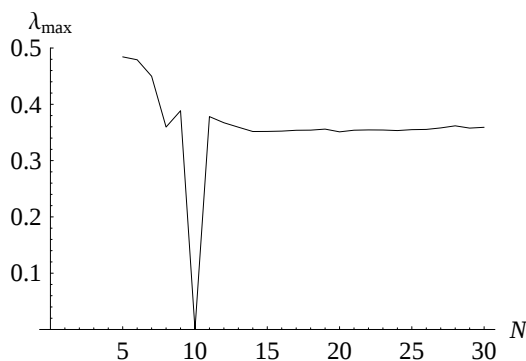
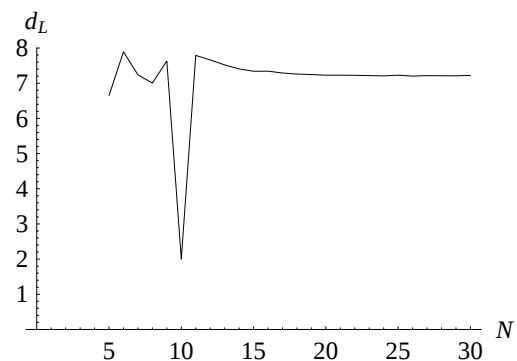
чениях параметра μ . Нетрудно видеть, что увеличение N приводит к стабилизации величин $\lambda_{max}(N)$ и $d_L(N)$. При этом меньшим значениям параметра μ соответствуют большие предельные значения оцениваемых величин. Отметим также, что если в первых двух случаях ($\mu = 0.02$ и $\mu = 0.01$) значения $\lambda_{max}(N)$ и $d_L(N)$ стабилизируются на достаточно широком промежутке изменения N (начиная с $N = 15$), то в случае $\mu = 0.005$ этот промежуток существенно уже ($20 \leq N \leq 30$), а при $\mu = 0.002$ для получения приближений предельного по N значения необходимы дальнейшие вычисления с большим N .

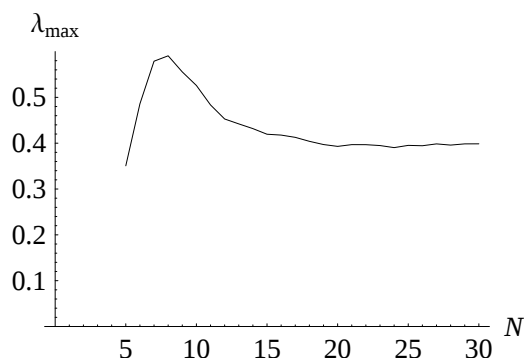
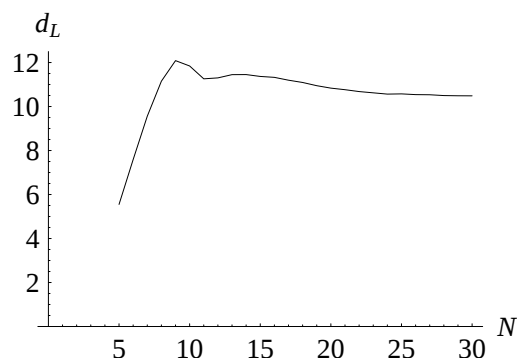
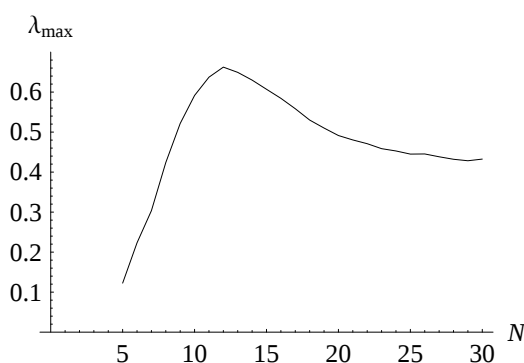
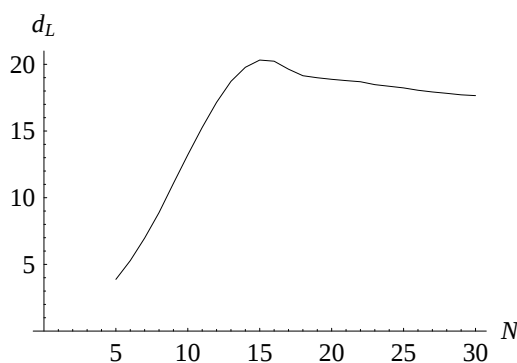
Коротко остановимся на применяемых численных методах и точности вычислений. Для оценки ляпуновских экспонент использовался стандартный метод Беннетина (см. [26–28]) и метод динамической перенормировки [29]. В данной ситуации метод динамической перенормировки не имеет существенных преимуществ и использовался для выборочной проверки основного массива результатов, полученных стандартным способом.

Для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (37), (38) ис-

пользовались методы Рунге – Кутты в их реализации Дорманда и Принса (8.3) [30] с контролем точности на шаге, шаг при этом был ограничен сверху величиной 0.001.

При вычислении ляпуновских величин методом Беннетина большое значение имеет определение промежутков изменения независимой переменной t , через которые производятся перенормировки текущих значений систем в вариациях вдоль траектории на аттракторе. Учитывая, что пространственно однородное решение (40) системы (37), (38) имеет период $T = 2\pi/b$, выберем эту величину в качестве исходного значения параметра перенормировки. При возникновении в колебательных режимах системы (37), (38) высокочастотных составляющих будем уменьшать его подходящим образом. Продолжительность вычислений в численном эксперименте с фиксированным N и различными μ выбиралась равной $5000 \cdot T$ так, что среднее квадратичное отклонение всех ляпуновских показателей, вычисленное по последним пятистам точкам, оказывалось меньшим 10^{-3} . Во втором эксперименте вычисления производились на промежутке $10000 \cdot T$, соответственно отклонение показателей от среднего оказалось меньше 10^{-4} .

Рис. 10. $\lambda_{max}(N)$ при $\mu = 0.02$ Рис. 11. $d_L(N)$ при $\mu = 0.02$ Рис. 12. $\lambda_{max}(N)$ при $\mu = 0.01$ Рис. 13. $d_L(N)$ при $\mu = 0.01$

Рис. 14. $\lambda_{\max}(N)$ при $\mu = 0.005$ Рис. 15. $d_L(N)$ при $\mu = 0.005$ Рис. 16. $\lambda_{\max}(N)$ при $\mu = 0.002$ Рис. 17. $d_L(N)$ при $\mu = 0.002$

Заключение

Асимптотические методы, применяемые при анализе систем (6), (7), дают укороченные системы фазовых уравнений (17), (18). Относительно грубых решений этих систем доказана теорема 1 о соответствии, однако в случае, когда нормализованные системы имеют хаотический аттрактор, доказательство такого утверждения сопряжено с существенными трудностями, если вообще возможно, поскольку соответствующий аттрактор может оказаться не гиперболическим. Именно поэтому в такой ситуации необходим численный эксперимент. Важно заметить, что результаты, полученные в 1.4, полностью соответствуют численному эксперименту из пункта 2.2.

Основной вывод по результатам данной главы состоит в том, что при уменьшении коэффициента диффузии μ в задаче (30), (31) возникают хаотические колебательные режимы растущей ляпуновской размерности. Асимптотический анализ при этом позволяет в некоторых случаях прояснить структуру бифурцирующих режимов.

Список литературы

1. *Абарбанель Г. Д., Рабинович М. И., Селверстон А., Баженов М. В., Хуэрта Р., Суццж М. М., Рубчинский Л. Л.* Синхронизация в нейронных ансамблях // Усп. физ. наук. 1996. Т. 166, № 4. С. 363 – 390.
2. *Анищенко В. С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
3. *Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М.* Динамическая модель пространственного развития турбулентности // Письма в ЖЭТФ. 1984. Т. 39, № 12. С. 561 – 564.
4. *Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И.* Автоструктуры. Хаотическая динамика ансамблей // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. М.: Наука, 1987. С. 7 – 44.
5. *Rabinovich M. I., Varona P., Selverston A. I., Abarbanel H. D. I.* Dynamical principles in neuroscience // Rev. Mod. Phys. 2006. V. 78. P. 1213 – 1265.
6. *Ланда П. С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997.
7. *Неймарк Ю. И., Ланда П. С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
8. *Каценко С. А.* Пространственные особенности высококомодовых бифуркаций двухкомпонентных систем с малой диффузией // Диф. уравнения. 1989. Т. 25, № 2. С. 262 – 270.
9. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Хаотическая буферность в цепочках связанных осцилляторов // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 1. С. 41 – 49.
10. *Колесов А. Ю.* Описание фазовой неустойчивости системы гармонических осцилляторов, слабо связанных через диффузию // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 1. С. 831 – 835.
11. *Lorenz E. N.* Deterministic nonperiodic flow // J. Atmos. Sci. 1963. V. 20. P. 130 – 141.
12. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence // Comm. Math. Phys. 1971. V. 20. P. 167 – 192.
13. *Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.* О классификации решений системы нелинейных диффузионных уравнений в окрестности точки бифуркации // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. ВИНТИ, 1987. Т. 28. С. 207 – 313.
14. *Глызин С. Д.* Сценарии фазовых перестроек одной конечноразностной модели уравнения “реакция – диффузия” // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 6. С. 805 – 811.

15. *Глызин С. Д.* Численное обоснование гипотезы Ландау - Колесова о природе турбулентности // Математические модели в биологии и медицине / Ин-т математики и кибернетики АН Лит. ССР. Вильнюс. 1989. Вып. 3. С. 31 – 36.
16. *Аронсон И. С., Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И.* Развитие хаоса в ансамблях динамических структур // ЖЭТФ. 1985. Т. 89, № 1. С. 92 – 105.
17. *Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М.* О рождении многомерного хаоса в активных решетках // ДАН СССР. 1984. Т. 279, № 3. С. 596 – 602.
18. *Колесов Ю. С., Майоров В. В.* Пространственная и временная самоорганизация в одновидовом биоценозе // Динамика биологических популяций. Горький: ГГУ, 1986. С. 3 – 13.
19. *Колесов Ю. С.* Математические модели экологии // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: ЯрГУ, 1979. С. 3 – 40.
20. *Колесов Ю. С.* Метод квазинормальных форм в задаче об установившихся режимах параболических систем с малой диффузией // Укр. матем. журн. 1987. Т. 39, № 1. С. 28 – 34.
21. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973.
22. *Глызин Д. С.* Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2008611464. Пакет программ для анализа динамических систем "Tracer". Заявка № 2008610548 от 14.02.2008 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 24.03.2008 г.
23. *Рабинович М. И., Суцук М. М.* Регулярная и хаотическая динамика структур в течениях жидкости // Усп. физ. наук. 1990. Т. 160, вып. 1. С. 3 – 64.
24. *Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.* Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука, 1992.
25. *Анищенко В. С., Окрокверцтов Г. А., Стрелкова Г. И.* Статистические свойства динамического хаоса // Усп. физ. наук. 2005. Т. 175, №2. С. 163 – 179.
26. *Benettin G., Galgani L., Strelcyn J. M.* Kolmogorov entropy and numerical experiments // Phys. Rev. 1976. V. A14. P. 2338–2345.
27. *Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A.* Determining Lyapunov exponents from a time series // Physica D. 1985. V. D16. P. 285 – 317.
28. *Малинецкий Г. Г., Потанов А. Б.* О вычислении размерностей странных аттракторов // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т. 28, №7. С. 1021 – 1037.

29. Глызин Д. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 2. С. 268 – 273.
30. Dormand J. R., Prince P. J. A Family of Embedded Runge – Kutta Formulae // J. Comp. Appl. Math. 1980. V. 6. P. 19 – 26.

Difference approximations of “reaction – diffusion” equation on a segment

Glyzin S.D.

Keywords: chaotic attractor, autooscillations, autogenerator, Lyapunov’s dimension, bifurcations, invariant torus

The system of phase differences for a chain of diffuse weakly coupled oscillators on a stable integral manifold is constructed and analysed. It is shown by means of numerical methods that as the number of oscillators in the chain increases, the Lyapunov dimension growth is close to linear. The extensive computations performed for difference model of Ginsburg-Landau equation illustrate this result and determine the applicability limits for asymptotic methods.

Сведения об авторе:

Глызин Сергей Дмитриевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
доктор физико-математических наук