

УДК 517.5 + 513.88

Оценки оператора Кордобы – Фернандеса в пространствах Марцинкевича

Бережной Е.И.¹, Гладких Д.С.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: ber@uniyar.ac.ru

dgladkikh@uniyar.ac.ru

получена 22 октября 2009

Ключевые слова: жадные алгоритмы, пространство Марцинкевича, оценки операторов

В работах А. Кордобы и П. Фернандеса о расходимости жадных алгоритмов в пространствах Лебега ключевую роль играл некоторый максимальный оператор $P_n^*(x)$. В настоящей статье рассмотрены оценки $P_n^*(x)$ в пространствах Марцинкевича.

В пионерской работе [1] о расходимости жадных алгоритмов в пространствах Лебега L^p при $1 \leq p < 2$ ключевую роль играл следующий максимальный оператор

$$P_n^*(x) = \max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{\substack{p \text{ простое} \\ n < p \leq n+j}} e^{2\pi i p x} \right|.$$

В настоящей работе будут приведены оценки снизу нормы оператора $P_n^*(x)$ в пространствах Марцинкевича. Приведем необходимые определения.

Пусть I есть единичный отрезок в $\mathbf{R}$ с обычной мерой Лебега. Для $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ через $\lambda(f, \gamma)$ обозначим функцию распределения функции f : $\lambda(f, \gamma) = \mu(\{\tau : |f(\tau)| > \gamma\})$, а через f^* ее перестановку в невозрастающем порядке: $f^*(\tau) = \inf\{s > 0 : \lambda(f, s) < \tau\}$. Банахово пространство X , состоящее из измеримых функций, называется идеальным [2], если из $g \in X$, измеримости f и выполнения п.в. неравенства $|f(\tau)| \leq |g(\tau)|$, следует, что $f \in X$ и $\|f\|_X \leq \|g\|_X$. Идеальное пространство называется симметричным, если для $f, g \in X$ из выполнения при всех $\gamma \in \mathbf{R}_+$ неравенства $\lambda(f, \gamma) \leq \lambda(g, \gamma)$ следует, что $\|f\|_X \leq \|g\|_X$. Классическими примерами симметричных пространств являются пространства Лебега L^p , ($p \geq 1$), пространства Лоренца, Марцинкевича и т.п. (см., например, [2, 3]).

Поскольку пространства Марцинкевича $M(\varphi)$ будут использованы в работе, дадим их аккуратное определение. Обозначим через W множество вогнутых функций

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, код проекта 08-01-00669.

$\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}_+$, каждая из которых непрерывна, строго возрастает и обладает свойствами

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{-1} \varphi(\tau) = \infty.$$

В частности, для всех $0 < \alpha < 1$ функции $\varphi_\alpha(t) = t^\alpha$ являются элементами множества W . С каждой функцией $\varphi \in W$ связана функция $\tilde{\varphi}(\tau) = \frac{\tau}{\varphi(\tau)}$. Операция $\tilde{\varphi}$ является инволюцией на классе W .

Пространство Марцинкевича $M(\varphi)$ состоит из тех f , для которых конечна норма

$$\|f\|_{M(\varphi)} = \sup_{0 < t < 1} \frac{\varphi(t)}{t} \int_0^t f^*(\tau) d\tau = \sup_{D \subset I} \left\{ \frac{\varphi(\mu(D))}{\mu(D)} \int_D |f(\tau)| d\tau \right\}.$$

Для доказательства основного результата нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения из теории симметричных пространств.

Лемма 1. Пусть X - симметричное пространство. Пусть заданы два набора дизъюнктивных множеств $\{I_j\}$ и $\{D_j\}$ ($j \in J$), причем для некоторого $n_0 \in \mathbf{N}$ для любого $j \in J$ выполнены неравенства

$$\mu(I_j) \leq \mu(D_j) \leq n_0 \mu(I_j). \quad (1)$$

Тогда для любой числовой последовательности $\{a_j\}$ ($j \in J$) справедливо неравенство

$$\left\| \sum_{j \in J} a_j \chi(I_j) \right\|_X \leq \left\| \sum_{j \in J} a_j \chi(D_j) \right\|_X \leq n_0 \left\| \sum_{j \in J} a_j \chi(I_j) \right\|_X. \quad (2)$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что правая часть в (2) конечна. Положим

$$f_1(t) = \sum_{j \in J} a_j \chi(I_j), \quad f_2(t) = \sum_{j \in J} a_j \chi(D_j).$$

Тогда для функции распределения функции f_1 будем иметь равенство

$$\lambda(f_1, \gamma) = \mu(\{\tau : |f_1(\tau)| > \gamma\}) = \mu\left(\bigcup_{j \in J_\gamma} I_j\right),$$

где $J_\gamma = \{j \in J : |a_j| > \gamma\}$, а для функции распределения функции f_2 соответственно будет выполнено равенство

$$\lambda(f_2, \gamma) = \mu\left(\bigcup_{j \in J_\gamma} D_j\right),$$

где объединение берется по тому же самому множеству индексов J_γ .

Поскольку все множества $\{I_j\}$ и $\{D_j\}$ дизъюнктивны, то справедливы равенства

$$\lambda(f_1, \gamma) = \mu\left(\bigcup_{j \in J_\gamma} I_j\right) = \sum_{j \in J_\gamma} \mu(I_j), \quad (3)$$

$$\lambda(f_2, \gamma) = \mu\left(\bigcup_{j \in J_\gamma} D_j\right) = \sum_{j \in J_\gamma} \mu(D_j). \quad (4)$$

Из левого неравенства в (1) и (3 - 4) следует левое неравенство в (2).

Для доказательства правого неравенства в (2) поступим следующим образом. Для каждого $j \in J_\gamma$ положим $k_j = \left[\frac{\mu(D_j)}{\mu(I_j)} \right]$ ($[\alpha]$ - целая часть числа α) и разобьем

множество D_j на k_j дизъюнктивных множеств $\{D_{ji}\}$ меры $\mu(I_j)$ и оставшееся множество $D_j \setminus \bigcup_{i=1}^{k_j} D_{ji}$, причем оставшееся множество $D_j \setminus \bigcup_{i=1}^{k_j} D_{ji}$ разобьем на множества $\{D_{ji}\}$ $i = k_j + 1, \dots, n_0$ одинаковой (может быть, даже нулевой) меры.

Положим $g_i(t) = \sum_{j \in J} a_j \chi(D_{ji})$, $i = 1, \dots, n_0$.

Прямо из определения функций и симметричности пространства X следует, что при всех $i = 1, \dots, n_0$ выполняются соотношения

$$\sum_{i=1}^{n_0} g_i(t) \equiv f_2(t), \quad \|g_i|X\| \leq \|f_1|X\|.$$

Поэтому

$$\|f_2|X\| = \left\| \sum_{i=1}^{n_0} g_i|X \right\| \leq \sum_{i=1}^{n_0} \|g_i|X\| \leq \sum_{i=1}^{n_0} \|f_1|X\| = n_0 \|f_1|X\|,$$

откуда и следует второе неравенство в (2).

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть задано пространство Марцинкевича $M(\varphi)$. Пусть задан набор дизъюнктивных множеств $\{I_j\}$ одинаковой конечной меры, $(j \in \overline{1, j_0})$. Тогда найдутся абсолютные константы c_1 и c_2 такие, что для любой невозрастающей положительной числовой последовательности $\{a_j\}$ ($j \in \overline{1, j_0}$) справедливы неравенства

$$c_1 \left\| \sum_{i=1}^{j_0} a_j \chi(I_j) |M(\varphi) \right\| \leq \sup_{j \in \overline{1, j_0}} \frac{\varphi(j\mu(I_1))}{j} \sum_{i=1}^j a_j \leq c_2 \left\| \sum_{i=1}^{j_0} a_j \chi(I_j) |M(\varphi) \right\|. \quad (5)$$

Доказательство. Положим $d_0 = \mu(I_1)$. Зафиксируем невозрастающую положительную числовую последовательность $\{a_j\}$ ($j \in \overline{1, j_0}$), образуем интервалы $D_j = ((j-1)d_0, jd_0)$ ($j \in \overline{1, j_0}$) и построим две функции

$$f_1(t) = \sum_{j=1}^{j_0} a_j \chi(I_j), \quad f_2(t) = \sum_{j=1}^{j_0} a_j \chi(D_j).$$

Поскольку пространство X является симметричным, то справедливо равенство $\|f_1|X\| = \|f_2|X\|$. Поэтому

$$\|f_1|X\| = \sup_{t>0} \frac{\varphi(t)}{t} \int_0^t f_2(s) ds. \quad (6)$$

Для оценки правой части в (6) рассмотрим два случая.

Пусть сначала $0 < t \leq d_0$. Тогда

$$\sup_{0 < t \leq d_0} \frac{\varphi(t)}{t} \int_0^t f_2(s) ds = \sup_{0 < t \leq d_0} \frac{\varphi(t)}{t} a_1 t = a_1 \varphi(d_0). \quad (7)$$

Пусть теперь $kd_0 < t \leq (k+1)d_0$ с $k \geq 1$. Для получения оценки сверху заметим, что из условия $\varphi \in W$ следует, что сама функция $\varphi(t)$ не убывает, а отношение $\frac{\varphi(t)}{t}$ не возрастает. Поэтому выполняется неравенство

$$\begin{aligned}
\sup_{kd_0 < t \leq (k+1)d_0} \frac{\varphi(t)}{t} \int_0^t f_2(s) ds &\leq \sup_{kd_0 < t \leq (k+1)d_0} \frac{\varphi(t)}{t} d_0 \sum_1^{k+1} a_i \leq \\
\frac{\varphi(kd_0)}{kd_0} d_0 \sum_1^{k+1} a_i &= \frac{k+1}{k} \frac{\varphi(kd_0)}{\varphi((k+1)d_0)} \frac{\varphi((k+1)d_0)}{k+1} \sum_1^{k+1} a_i \leq \\
(1 + \frac{1}{k}) \frac{\varphi((k+1)d_0)}{k+1} \sum_1^{k+1} a_i &\leq 2 \frac{\varphi((k+1)d_0)}{k+1} \sum_1^{k+1} a_i.
\end{aligned} \tag{8}$$

Учитывая равенство (7) и неравенство (8), будем иметь

$$\|f_1|X\| \leq 2 \sup_{k=0,1,\dots,j_0-1} \frac{\varphi((k+1)d_0)}{k+1} \sum_1^{k+1} a_i.$$

Таким образом левое неравенство в (5) доказано, и можно положить $c_1 = \frac{1}{2}$.

Получим теперь правое неравенство в (5). Снова рассмотрим случай $kd_0 < t \leq (k+1)d_0$ с $k \geq 1$. Тогда из условия $\varphi \in W$ и неравенства $a_k \geq a_{k+1} \geq 0$ следует соотношение

$$\begin{aligned}
\sup_{kd_0 < t \leq (k+1)d_0} \frac{\varphi(t)}{t} \int_0^t f_2(s) ds &\geq \sup_{kd_0 < t \leq (k+1)d_0} \frac{\varphi(t)}{t} d_0 \sum_1^k a_i \geq \\
\frac{\varphi((k+1)d_0)}{k+1} \sum_1^k a_i &\geq \frac{1}{2} \frac{\varphi((k+1)d_0)}{k+1} \sum_1^{k+1} a_i.
\end{aligned} \tag{9}$$

Учитывая равенство (7) и неравенство (9), будем иметь

$$\|f_1|X\| \geq \frac{1}{2} \sup_{k=1,\dots,j_0} \frac{\varphi(kd_0)}{k} \sum_1^k a_i. \tag{10}$$

Таким образом, в (5) можно положить $c_2 = 2$.

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть задано пространство Марцинкевича $M(\varphi)$. Пусть задан набор дизъюнктивных множеств $\{I_i\}$ одинаковой конечной меры $d_0 = \mu(I_1)$, ($i \in \overline{1, j_0}$) и фиксировано число $b > 0$. Тогда для любой невозрастающей положительной числовой последовательности $\{a_i\}$ ($i \in \overline{1, j_0}$) справедливо неравенство

$$\inf \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{j_0} a_i \chi(I_i) \right\|_{M(\varphi)} : \sum_{i=1}^{j_0} a_i^2 \geq b^2 \right\} \geq c_3 \frac{b}{\sqrt{\sum_{i=1}^{j_0} \left(\frac{1}{\varphi(id_0)} \right)^2}}, \tag{11}$$

где c_3 не зависит от последовательности $\{a_i\}$ и j_0 .

Доказательство.

Для удобства наборы $(a_1, \dots, a_{j_0})$ из множества

$$\{(a_1, \dots, a_{j_0}) : a_k \geq 0, a_k \downarrow, \sum_{i=1}^{j_0} a_i^2 \geq b^2\}$$

будем называть допустимыми.

Образуем два функционала

$$f_1(a_1, \dots, a_{j_0}) = \left\| \sum_{i=1}^{j_0} a_i \chi(I_i) \right\| M(\varphi), \quad f_2(a_1, \dots, a_{j_0}) = \sup_{k \in \overline{1, j_0}} \frac{\varphi(kd_0)}{k} \sum_{i=1}^k a_i.$$

Согласно предыдущей лемме неравенство (11) эквивалентно неравенству

$$\inf \left\{ \sup_{k \in \overline{1, j_0}} \frac{\varphi(kd_0)}{k} \sum_{i=1}^k a_i : \sum_{i=1}^{j_0} a_i^2 \geq b^2 \right\} \geq c_4 \frac{b}{\sqrt{\sum_{i=1}^{j_0} \left(\frac{1}{\varphi(id_0)} \right)^2}}.$$

Из монотонности набора $\{a_{j_0}\}$ следует элементарное неравенство

$$\sup_{k \in \overline{1, j_0}} \frac{\varphi(kd_0)}{k} \sum_{i=1}^k a_i \geq \sup_{k \in \overline{1, j_0}} \varphi(kd_0) a_k.$$

Поэтому для доказательства неравенства (11) достаточно доказать неравенство

$$\inf \left\{ \sup_{k \in \overline{1, j_0}} \varphi(kd_0) a_k : \sum_{i=1}^{j_0} a_i^2 \geq b^2 \right\} \geq c_4 \frac{b}{\sqrt{\sum_{i=1}^{j_0} \left(\frac{1}{\varphi(id_0)} \right)^2}}, \quad (12)$$

где c_4 не зависит от последовательности $\{a_i\}$ и j_0 .

Образуем функционал

$$f_3(a_1, \dots, a_{j_0}) = \sup_{k \in \overline{1, j_0}} \varphi(kd_0) a_k.$$

Функционал $f_3(a_1, \dots, a_{j_0})$ непрерывен по совокупности переменных и удовлетворяет условию

$$\lim_{\max\{a_1, \dots, a_{j_0}\} \rightarrow \infty} f_3(a_1, \dots, a_{j_0}) = \infty.$$

Поэтому на допустимом множестве функционал $f_3(a_1, \dots, a_{j_0})$ достигает минимума. Пусть этот минимум достигается в точке $(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{j_0}})$. Положим

$$M = f_3(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{j_0}}).$$

Покажем, что без изменения значения функционала можно считать, что для всех $i = 1, \dots, j_0$ выполняются равенства

$$\overline{a_i} = \overline{a_1} \frac{\varphi(d_0)}{\varphi(id_0)}. \quad (13)$$

Действительно, если выполнены соотношения

$$\overline{a_1} \varphi(d_0) = \overline{a_2} \varphi(2d_0) = \dots = \overline{a_k} \varphi(kd_0) > \overline{a_{k+1}} \varphi((k+1)d_0),$$

то, полагая

$$\tilde{a}_{k+1} = \overline{a_k} \frac{\varphi(kd_0)}{\varphi((k+1)d_0)},$$

получим, что набор $(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}, \tilde{a}_{k+1}, \overline{a_{k+2}}, \dots, \overline{a_{j_0}})$ допустим и справедливо равенство

$$f_3(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_k}, \tilde{a}_{k+1}, \overline{a_{k+2}}, \dots, \overline{a_{j_0}}) = M. \quad (14)$$

Если выполнены соотношения

$$\overline{a_1}\varphi(d_0) = \overline{a_2}\varphi(2d_0) = \dots = \overline{a_k}\varphi(kd_0) < \overline{a_{k+1}}\varphi((k+1)d_0),$$

то, полагая для всех $i = 1, 2, \dots, k$

$$\tilde{a}_i = \overline{a_{k+1}} \frac{\varphi((k+1)d_0)}{\varphi(id_0)},$$

получим, что набор $(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_k, \overline{a_{k+1}}, \dots, \overline{a_{j_0}})$ допустим и справедливо равенство

$$f_3(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_k, \overline{a_{k+1}}, \dots, \overline{a_{j_0}}) = M. \quad (15)$$

Соотношения (14) – (15) и позволяют считать, что выполнены равенства (13).

Из равенств (13) и условия допустимости следует, что выполнены соотношения

$$M = \overline{a_1}\varphi(d_0); \quad \overline{a_1}^2 \sum_{i=1}^{j_0} \left(\frac{\varphi(d_0)}{\varphi(id_0)} \right)^2 \geq b^2.$$

Из этих соотношений следует неравенство (12) и неравенство (11) соответственно.

Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $\varphi \in W$. Пусть заданы натуральные числа k и l и число $d_0 > 0$. Тогда справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{\varphi(id_0)} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{lk} \left(\frac{1}{\varphi(id_0)} \right)^2 \leq l \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{\varphi(id_0)} \right)^2.$$

Доказательство леммы для $l = 2$ следует из элементарного неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2k} \left(\frac{1}{\varphi(id_0)} \right)^2 &= \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{\varphi(id_0)} \right)^2 + \sum_{i=K+1}^{2k} \left(\frac{1}{\varphi(id_0)} \right)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{\varphi(id_0)} \right)^2 + \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{\varphi((k+i)d_0)} \right)^2 \leq \\ &= \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{\varphi(id_0)} \right)^2 + \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{\varphi(id_0)} \right)^2 \leq 2 \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{\varphi(id_0)} \right)^2. \end{aligned}$$

В общем случае доказательство аналогично.

Лемма доказана.

Зафиксируем простое число $q : \sqrt{N} \leq q < \sqrt{2N}$. Для каждого $a \in \overline{1, q-1}$ образуем интервал Фарей $I_{a,q} = (\frac{a}{q} - \frac{1}{8q^2}, \frac{a}{q} + \frac{1}{8q^2})$ и построим множество $E_q = \cup_{a=1}^{q-1} I_{a,q}$. Положим

$$E_N = \bigcup_{\substack{q \text{ простое} \\ \sqrt{N} \leq q < \sqrt{2N}}} E_q.$$

Для дальнейшего нам потребуется один факт из работы Кордобы и Фернандеса [1].

Лемма А. Пусть для натурального числа q выполняется неравенство $q \geq \sqrt{N}$. Если $|x - y| \leq \frac{1}{8q^2}$, то выполняется неравенство

$$P_N^*(x) \leq c_5 P_N^*(y)$$

с константой c_5 , не зависящей от x, y и N .

В частности, из этой леммы следует, что если длина отрезка $I = [a, b]$ не превосходит $\frac{1}{4q^2}$ с $q \geq \sqrt{N}$, то для любого $x \in [a, b]$ справедливы соотношения

$$\frac{1}{c_5} P_N^*(x) \leq P_N^*\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq c_5 P_N^*(x), \quad (16)$$

с константой c_5 , не зависящей от отрезка и N .

Лемма 5. Пусть X – идеальное пространство. Тогда справедливо неравенство

$$\|P_N^*|X|\| \geq \frac{1}{c_5} \left\| \sum_{\substack{q \text{ простое} \\ \sqrt{N} \leq q < \sqrt{2N}}} \sum_{a=1}^{q-1} \chi(I_{a,q}) P_N^*\left(\frac{a}{q}\right) |X| \right\|, \quad (17)$$

(константа c_5 взята из леммы А.)

Доказательство. Действительно, пользуясь идеальностью пространства X , получим справедливость неравенства

$$\begin{aligned} \|P_N^*|X|\| &\geq \|\chi(E_N) P_N^*|X|\| = \|\chi\left(\bigcup_{\substack{q \text{ простое} \\ \sqrt{N} \leq q < \sqrt{2N}}} E_q\right) P_N^*|X|\| = \\ &= \|\chi\left(\bigcup_{\substack{q \text{ простое} \\ \sqrt{N} \leq q < \sqrt{2N}}} \cup_{a=1}^{q-1} I_{a,q}\right) P_N^*|X|\|. \end{aligned}$$

Поскольку интервалы $I_{a,q}$ не пересекаются и расстояние от любой точки каждого интервала до центра не превосходит $\frac{1}{8q^2}$, то согласно лемме А для всякого интервала $I_{a,q}$ для каждого $x \in I_{a,q}$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{c_5} P_N^*\left(\frac{a}{q}\right) \leq P_N^*(x) \leq c_5 P_N^*\left(\frac{a}{q}\right).$$

Поэтому из идеальности пространства X следует неравенство

$$\|\chi\left(\bigcup_{\substack{q \text{ простое} \\ \sqrt{N} \leq q < \sqrt{2N}}} \cup_{a=1}^{q-1} I_{a,q}\right) P_N^*|X|\| \geq \frac{1}{c_5} \|\chi\left(\bigcup_{\substack{q \text{ простое} \\ \sqrt{N} \leq q < \sqrt{2N}}} \cup_{a=1}^{q-1} I_{a,q}\right) P_N^*\left(\frac{a}{q}\right) |X|\| =$$

$$\frac{1}{c_5} \left\| \sum_{\substack{q \text{ простое} \\ \sqrt{N} \leq q < \sqrt{2N}}} \sum_{a=1}^{q-1} \chi(I_{a,q}) P_N^* \left(\frac{a}{q} \right) \right\| X \right\|.$$

Таким образом, (17) доказано.

Лемма доказана.

Обозначим через $P(a, b)$ число простых чисел p , удовлетворяющих условию $a \leq p \leq b$.

Пусть $\text{НОД}(r, m) = 1$. Через $\rho(N, m, r)$ обозначим количество простых чисел, равных или меньших N в арифметической прогрессии $m, m+r, m+2r, m+3r, \dots$

Положим $b_{N,q,r} = \rho(2N, q, r) - \rho(N, q, r)$.

Лемма 6. Пусть

$$S_N = \sum_{\substack{q \text{ простое} \\ \sqrt{N} \leq q < \sqrt{2N}}} \sum_{a=1}^{q-1} P_N^* \left(\frac{a}{q} \right)^2.$$

Тогда справедливо неравенство

$$S_N \geq c_6 \left(\frac{N^2}{(\log N)^3} \right), \quad (18)$$

где константа c_6 не зависит от N .

Доказательство. Для каждого a положим

$$Q \left(\frac{a}{q} \right) = \left| \sum_{r=1}^{q-1} e^{2\pi i r \frac{a}{q}} b_{N,q,r} \right|.$$

Покажем, что справедливо неравенство

$$P_N^* \left(\frac{a}{q} \right) \geq Q \left(\frac{a}{q} \right).$$

Действительно, будем иметь

$$\begin{aligned} P_N^* \left(\frac{a}{q} \right) &= \max_{1 \leq j \leq N} \left| \sum_{\substack{p \text{ простое} \\ N < p \leq N+j}} e^{2\pi i p \frac{a}{q}} \right| \geq \\ &= \left| \sum_{\substack{p \text{ простое} \\ N < p < 2N}} e^{2\pi i p \frac{a}{q}} \right| = \left| \sum_{r=1}^{q-1} \sum_{\substack{p \text{ простое} \\ N < p < 2N \\ r \equiv p \pmod{q}}} e^{2\pi i r \frac{a}{q}} \right| = \\ &= \left| \sum_{r=1}^{q-1} e^{2\pi i r \frac{a}{q}} [\rho(2N, q, r) - \rho(N, q, r)] \right| = Q \left(\frac{a}{q} \right). \end{aligned}$$

Поэтому для доказательства леммы достаточно доказать неравенство

$$\sum_{\substack{q \text{ простое} \\ \sqrt{N} \leq q < \sqrt{2N}}} \sum_{a=1}^{q-1} Q \left(\frac{a}{q} \right)^2 \geq c_6 \left(\frac{N^2}{(\log N)^3} \right). \quad (19)$$

Рассмотрим сумму

$$\begin{aligned} S(q) &= \sum_{a=1}^{q-1} Q\left(\frac{a}{q}\right)^2 = \sum_{a=1}^{q-1} \left| \sum_{r=1}^{q-1} e^{2\pi i r a/q} b_{N,q,r} \right|^2 = \\ &= \sum_{a=1}^{q-1} \left| \sum_{r=1}^{q-1} b_{N,q,r} \left(\cos \frac{2\pi r a}{q} + i \sin \frac{2\pi r a}{q} \right) \right|^2 = \\ &= (q-1) \sum_{r=1}^{q-1} b_{N,q,r}^2 + \sum_{r \neq s} b_{N,q,r} b_{N,q,s} \sum_{a=1}^{q-1} \cos \frac{2\pi a(r-s)}{q}. \end{aligned}$$

Поскольку $r-s < q$, то из элементарных преобразований следует равенство

$$\sum_{a=1}^{q-1} \cos \frac{2\pi a(r-s)}{q} = -1.$$

Поэтому справедливо соотношение

$$S(q) = (q-1) \sum_{r=1}^{q-1} b_{N,q,r}^2 - \sum_{r \neq s} b_{N,q,r} b_{N,q,s}.$$

Применяя элементарные неравенства

$$m \sum_{j=1}^m a_j^2 - \sum_{j \neq k} a_j a_k \geq \sum_{j=1}^m a_j^2 \geq \frac{1}{m} \left(\sum_{j=1}^m a_j \right)^2,$$

получим

$$S(q) = (q-1) \sum_{r=1}^{q-1} b_{N,q,r}^2 - \sum_{r \neq s} b_{N,q,r} b_{N,q,s} \geq \sum_{r=1}^{q-1} b_{N,q,r}^2 \geq \frac{1}{q-1} \left(\sum_{r=1}^{q-1} b_{N,q,r} \right)^2.$$

Нетрудно заметить, что выражение $\sum_{r=1}^{q-1} b_{N,q,r}$ не меньше числа простых чисел в промежутке $(N, 2N)$. Для оценки этого числа воспользуемся классической теоремой Чебышева о распределении простых в промежутке $[a, b]$ ([4] гл.17). Тогда получим

$$S(q) \geq \frac{1}{q-1} P^2(N, 2N) \geq c_7 \frac{1}{q-1} \left(\frac{N}{\log N} \right)^2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{\substack{q \text{ простое} \\ \sqrt{N} \leq q \leq \sqrt{2N}}} \sum_{a=1}^{q-1} P_N^* \left(\frac{a}{q} \right)^2 \geq \\ &\geq \sum_{\substack{q \text{ простое} \\ \sqrt{N} \leq q < \sqrt{2N}}} S(q) \geq c_7 \sum_{\substack{q \text{ простое} \\ \sqrt{N} \leq q < \sqrt{2N}}} \frac{1}{q-1} \left(\frac{N}{\log N} \right)^2 \geq \end{aligned}$$

$$c_7 \frac{1}{\sqrt{2N}-1} P(\sqrt{N}, \sqrt{2N}) \left(\frac{N}{\log N} \right)^2 \geq c_8 \frac{1}{\sqrt{N}} P(\sqrt{N}, \sqrt{2N}) \left(\frac{N}{\log N} \right)^2.$$

Для оценки числа $P(\sqrt{N}, \sqrt{2N})$ снова воспользуемся классической теоремой Чебышева о распределении простых в промежутке ([4], гл.17). Окончательно получим

$$S_N \geq c_9 \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\sqrt{N}}{\log \sqrt{N}} \left(\frac{N}{\log N} \right)^2 = c_9 \left(\frac{N^2}{(\log N)^3} \right).$$

Из последней формулы и следует неравенство (19) и, следовательно, неравенство (18).

Лемма доказана.

Теорема. Пусть задано пространство Марцинкевича $M(\varphi)$. Зафиксируем натуральное число N . Тогда существует константа c_0 , не зависящая от N и такая, что справедливо неравенство

$$\|P_N^*(\cdot)|M(\varphi)\| \geq c_0 \frac{N}{(\log N)^{3/2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{N}{\log N}\right]} \left(\frac{1}{\varphi\left(\frac{i}{4N}\right)} \right)^2 \right)^{-1/2}. \quad (20)$$

Доказательство. Согласно лемме 5 справедливо неравенство

$$\|P_N^*|M(\varphi)\| \geq \frac{1}{c_5} \left\| \sum_{\substack{q \text{ простое} \\ \sqrt{N} \leq q < \sqrt{2N}}} \sum_{a=1}^{q-1} \chi(I_{a,q}) P_N^*\left(\frac{a}{q}\right) |M(\varphi)\| \right\|. \quad (21)$$

Для всех промежутков $I_{a,q}$ справедливо равенство $\mu(I_{a,q}) = \frac{1}{4q^2}$ и поэтому для $\{q : \sqrt{N} \leq q < \sqrt{2N}\}$ справедливы соотношения

$$\frac{1}{8N} \leq \mu(I_{a,q}) \leq \frac{1}{4N}. \quad (22)$$

Для каждого промежутка $I_{a,q}$ построим новый промежуток $J_{a,q} = \left(\frac{a}{q} - \frac{1}{8N}, \frac{a}{q} + \frac{1}{8N}\right)$. Тогда из конструкции набора интервалов Фарея $\{I_{a,q}\}$ следует дизъюнктность набора множеств $\{J_{a,q}\}$. Поэтому, согласно лемме 1, найдется константа c_{11} такая, что выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{\substack{q \text{ простое} \\ \sqrt{N} \leq q < \sqrt{2N}}} \sum_{a=1}^{q-1} \chi(I_{a,q}) P_N^*\left(\frac{a}{q}\right) |M(\varphi)\| \right\| \geq \\ & c_{11} \left\| \sum_{\substack{q \text{ простое} \\ \sqrt{N} \leq q < \sqrt{2N}}} \sum_{a=1}^{q-1} \chi(J_{a,q}) P_N^*\left(\frac{a}{q}\right) |M(\varphi)\| \right\|. \end{aligned} \quad (23)$$

Обозначим через j_0 число ненулевых слагаемых в сумме

$$\sum_{\substack{q \text{ простое} \\ \sqrt{N} \leq q < \sqrt{2N}}} \sum_{a=1}^{q-1} \chi(J_{a,q}) P_N^* \left(\frac{a}{q} \right) \quad (24)$$

и упорядочим по убыванию стоящие при ненулевых слагаемых в (24) коэффициенты $P_N^* \left(\frac{a}{q} \right)$, образовав новую последовательность $\{b_i\}_{i=1}^{j_0}$. Построим новые промежутки $J_i = \left(\frac{i-1}{8N}, \frac{i}{8N} \right)$. Мера всех непустых множеств $J_{a,q}$ одинакова и равна $\frac{1}{4N}$. Такова же мера и промежутков J_i . Поэтому из построений и симметричности пространства $M(\varphi)$ будем иметь

$$\left\| \sum_{\substack{q \text{ простое} \\ \sqrt{N} \leq q < \sqrt{2N}}} \sum_{a=1}^{q-1} \chi(J_{a,q}) P_N^* \left(\frac{a}{q} \right) |M(\varphi)| \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{j_0} b_i \chi(J_i) |M(\varphi)| \right\|. \quad (25)$$

Из леммы 6 следует неравенство

$$\sum_{i=1}^{j_0} b_i^2 \geq c_6 \frac{N^2}{(\log N)^3}. \quad (26)$$

Из (26) и леммы 3 с учетом равенства $d_0 = \frac{1}{4N}$ получим неравенство

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{j_0} b_i \chi(J_i) |M(\varphi)| \right\| &\geq c_3 \sqrt{c_6} \left(\frac{N^2}{(\log N)^3} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^{j_0} \left(\frac{1}{\varphi(id_0)} \right)^2} \right)^{1/2} = \\ &= c_{12} \frac{N}{(\log N)^{3/2}} \cdot \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{j_0} \left(\frac{1}{\varphi(id_0)} \right)^2} \right)^{1/2} = c_{12} \frac{N}{(\log N)^{3/2}} \cdot \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{j_0} \left(\frac{1}{\varphi(\frac{i}{4N})} \right)^2} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (27)$$

Оценим теперь число ненулевых слагаемых j_0 в сумме (24). Прямой подсчет показывает, что справедливы неравенства

$$(\sqrt{N} - 1) \cdot P(\sqrt{N}, \sqrt{2N}) \leq j_0 \leq (\sqrt{2N} - 1) \cdot P(\sqrt{N}, \sqrt{2N}).$$

Поэтому согласно теореме Чебышева о распределении простых чисел ([4], гл.17) для некоторой константы C справедливы неравенства

$$\frac{1}{C} \sqrt{N} \frac{\sqrt{N}}{\log N} \leq j_0 \leq C \sqrt{N} \frac{\sqrt{N}}{\log N}.$$

Согласно лемме 4 выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^{j_0} \left(\frac{1}{\varphi(\frac{i}{4N})} \right)^2 \simeq \sum_{i=1}^{\left[\frac{N}{\log N} \right]} \left(\frac{1}{\varphi(\frac{i}{4N})} \right)^2.$$

Поэтому

$$\left\| \sum_{i=1}^{j_0} b_i \chi(J_i) |M(\varphi)| \right\| \geq c_{13} \frac{N}{(\log N)^{3/2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{N}{\log N} \right]} \left(\frac{1}{\varphi\left(\frac{i}{4N}\right)} \right)^2 \right)^{-1/2},$$

из которого и следует неравенство (20).

Теорема доказана.

Список литературы

1. *Cordoba A., Fernandez P.* Convergence and divergence of decreasing rearranged Fourier series // SIAM J.Math. Anal., 1998. Vol. 29. No. 5. P. 1129-1139.
2. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1977.
3. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. I, II. Berlin: Springer, 1979.
4. *Монтгомери Г.* Мультипликативная теория чисел. М.: Мир, 1974.

Estimates of the Cordoba – Fernandez operator in Marcinkiewicz spaces

Berezhnoi Y.I., Gladkikh D.S.

Keywords: greedy algorithms, Marcinkiewicz space, estimate of operators

In the A. Cordoba and P. Fernandez research of the divergence of greedy algorithms in Lebesgue spaces some maximum operator $P_n^*(x)$ played the key role. This article reviews the assessment $P_n^*(x)$ in Marcinkiewicz spaces.

Сведения об авторах:

Бережной Евгений Иванович,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
доктор физ.-мат. наук, профессор;

Гладких Денис Сергеевич,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
аспирант