Модел. и анализ информ. систем. Т. **21**, № **4** (2014) 35–46

УДК 512.7

О пространстве путей на полных пересечениях в грассманианах

Ермакова С. М.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

e-mail: svetlana.ermakova1802@gmail.com

получена 4 августа 2014

Ключевые слова: грассманиан, векторное расслоение, многообразие Фано прямых

В данной работе мы изучаем многообразие Фано прямых на полном пересечении грассманиана $G(n, 2n)$ с гиперповерхностями степени $d_1, ..., d_s$. Путем длины l на таком многообразии мы называем связную кривую, состоящую из l прямых. Главным результатом работы является факт, что при $2\sum_i(d_i+1) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ пространство путей длины n, соединяющих любые две точки полного пересечения, связно и непусто. Для доказательства этого результата мы показываем, что на грассманиане $G(n, 2n)$ пространство путей длины n, соединяющих две общие точки, изоморфно прямому произведению $F_n \times F_n$ двух полных пространств n-мерных флагов. Затем строим на $F_n \times F_n$ глобально порожденное векторное расслоение $\mathcal{E}$ с выделенным сечением s, таким что нули s задают пространство путей длины n, соединяющих x и y и лежащих в пересечении гиперповерхностей степеней d_1,...,d_k. Используя явное представление расслоения $\mathcal{E}$ в виде прямой суммы линейных, мы показываем, что нули общего, а следовательно, и любого сечения $\mathcal{E}$ образуют непустое, связное подмногообразие в $F_n \times F_n$.

Помимо геометрического интереса, ценность доказанного результата состоит в том, что мы используем его в будущих работах для обобщения теорем о расщепимости расслоений конечного ранга на инд-многооразиях.

1. Введение

В данной работе все векторные пространства и алгебраические многообразия определены над алгебраически замкнутым полем характеристики 0.

Введем основные понятия.

Определение 1. *Пусть X – проективное многообразие с обильным пучком $\mathcal{O}_X(1)$. Назовем* ***проективным пространством*** *в X такое многообразие $M \simeq \mathbb{P}^r$ в X, что $\mathcal{O}_X(1)|_M \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$. В случае, если M одномерно, назовем его проективной прямой в X или просто прямой в X.*

Определение 2. ***Путь p(x,y)*** *длины k на многообразии X, соединяющий точки x, y, – это набор точек $x = x_0, x_1, ..., x_k = y$ в X и набор проективных прямых $l_0, ..., l_{k-1}$ в X, таких что $x_i, x_{i+1} \in l_i$. Прямые l_i такого пути будем называть* ***звеньями*** *этого пути.*

Несложно показать, что пространство путей фиксированной длины, соединяющих две фиксированные точки на многообразии X, имеет естественную структуру проективного многообразия. Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть X является полным пересечением грассманиана $G(n, 2n)$, вложенного по Плюккеру, с набором гиперповерхностей степеней $d_1, ..., d_s$. Положим $\mathcal{O}_X(1) \cong \mathcal{O}_{G(n,2n)}(1)$. Если $2\sum_i(d_i + 1) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, то многообразие путей длины n, соединяющих любые две точки в X, непусто и связно.*

Помимо непосредственного геометрического интереса, ценность данной теоремы состоит в том, что мы используем ее в будущих работах для обобщения теорем о расщепимости расслоений конечного ранга на инд-многообразиях, доказанных Бартом и Ван де Веном в [2], Тюриным в [3], Сато в [4], Дониным и Пенковым в [5] и Пенковым и Тихомировым для различных классов инд-многообразий в [6, 7, 8, 9].

Благодарности: Я выражаю признательность моему научному руководителю А.С. Тихомирову, а также Дмитрию Панову, Artie Prendergast-Smith и David Speyer.

2. Первоначальные сведения и идея доказательства

Первым делом докажем следующее утверждение:

Лемма 1. *Пусть X – проективное многообразие, тогда пространство путей длины n, соединяющих любые две точки X, также является проективным многообразием.*

Доказательство. Пусть $F(X)$ – многообразие Фано прямых на X. Рассмотрим декартово произведение $X^{n+1} \times F(X)^n$, содержащее $n + 1$ копий многообразия X и n копий многообразия $F(X)$. Пространство всех путей длины n изоморфно пересечению k подмногообразий этого произведения, определенных следующим образом: прямая из i-го фактора $F(X)$ содержит точки из i-го и $(i + 1)$-го факторов X.

Аналогично доказывается и утверждение про пути, соединяющие две фиксированные точки на X.

$\square$

Следующий шаг – дать описание пространства путей длины n, соединяющих две общие точки на грассманиане $G(n, 2n)$. В этой статье мы всегда рассматриваем грассманиан как вложенный по Плюккеру и снабженный обильным пучком $\mathcal{O}(1)$, являющимся образующей группы Пикара.

Лемма 2. *Пусть U, V – два трансверсальных n-мерных векторных подпространства в W^{2n}. Обозначим через u и v соответствующие точки грассманиана $G(n, 2n)$ n-мерных подпространств $2n$-мерного пространства W^{2n}. Пространство $P_n(u, v)$ путей из n звеньев, соединяющих u и v на $G(n, 2n)$, изоморфно произведению двух пространств полных флагов $F(U) \times F(V)$.*

Доказательство. Построим изоморфизм $F(U) \times F(V) \to P_n(u, v)$. Пусть

$$U^1 \subset ... \subset U^{n-1} \subset U^n = U, \quad V^1 \subset ... \subset V^{n-1} \subset V^n = V$$

два полных флага. Тогда определим i-ю прямую в цепочке как множество всех n-мерных подпространств в $U^{n-i+1} \oplus V^i$, содержащих $U^{n-i} \oplus V^{i-1}$. Таким образом, мы получим связную цепочку прямых, где общей точкой i-й и $(i+1)$-й прямых является n-плоскость $U^{n-i} \oplus V^i$.

Таким образом, каждой точке $F(U) \times F(V)$ мы сопоставили цепочку из $P_n(u, v)$, а следовательно, получили инъективный морфизм $F(U) \times F(V) \to P_n(u, v)$. Докажем теперь, что морфизм является сюръективным.

Пусть $p(u, v)$ - путь длины n в $G(n, 2n)$, соединяющий точки u и v. Каждой вершине цепочки соответствует точка u_i грассманиана. Тогда имеем соответствие между точками u_i и n-мерными подпространствами U_i в W^{2n} для $0 \leq i \leq n$, и выполнено $U_0 = U$, $U_n = V$. Заметим, что для всякого i размерность пересечения n-плоскостей U_i и U_{i+1} не меньше $n-1$. Таким образом, мы получаем, что для всякого i имеются следующие неравенства:

$$\dim(U \cap U_i) \geq n - i, \quad \dim(V \cap U_i) \leq i.$$

Рассмотрим $n + 1$ число $d_i = dim(U \cap U_i)$ для $0 \leq i \leq n$. Разница $d_i - d_{i+1}$ может быть равна $\pm$ 1 или 0. Но для нашего случая должно быть $n+1$ число, от n до 0. И такая последовательность единственна: $n, n-1, n-2, ..., 1, 0$. Значит $d_i - d_{i+1} = 1$. Отсюда вытекает, что приведенные выше неравенства на самом деле обязаны быть равенствами, поэтому путь $p(u, v)$ лежит в образе морфизма, и, значит, морфизм сюръективен.

Наконец, чтобы доказать, что морфизм является изоморфизмом, достаточно проверить, что его образ является гладким подмногообразием пространства всех цепочек длины n в $G(n, 2n)$, которое само является гладким. Гладкость образа вытекает из того, что группа $GL(U) \times GL(V)$ действует на пространстве всех цепочек, и образ морфизма представляет собой замкнутую орбиту этого действия.

□

Таким образом, на грассманиане $G(n, 2n)$ пространство путей длины n, соединяющих две общие точки, изоморфно прямому произведению $F_n \times F_n$ двух полных пространств n-мерных флагов. Идея доказательства Теоремы 1 состоит в том, чтобы построить на $F_n \times F_n$ глобально порожденное векторное расслоение $\mathcal{E}$ с выделенным сечением s, таким что нули s задают пространство путей длины n, соединяющих x и y и лежащих в пересечении гиперповерхностей степеней d_1,...,d_k. Используя явное представление расслоения $\mathcal{E}$ в виде прямой суммы линейных, мы покажем, что нули общего, а следовательно, и любого сечения $\mathcal{E}$ образуют непустое, связное подмногообразие в $F_n \times F_n$.

Для построения расслоения нам будет необходимо рассмотреть n различных проекций $p_k : F(U) \times F(V) \to F(n+1, n-1; n)$, которые определяются следующим образом:

$$p_k(U^1 \subset ... \subset U^{n-1}, V^1 \subset ... \subset V^{n-1}) = (U_{n-k+1} \oplus V_k, U_{n-k} \oplus V_{k-1}) \subset U \oplus V. \qquad (1)$$

3. Связность нулей сечения глобально порожденного расслоения

В этом параграфе мы приводим топологический критерий для связности нулей сечений глобально порожденных расщепимых векторных расслоений.

Определение 3. *Векторное расслоение E на многообразии X называется* ***глобально порожденным****, если для всякой точки x и вектора $v \in E_x$ существует сечение $s \in H^0(E)$, такое что $s(x) = v$.*

Лемма 3. *Пусть L – глобально порожденное линейное расслоение на связном проективном многообразии X и $c_1(L)^2 \neq 0 \in H^4(X, \mathbb{R})$. Тогда для всякого сечения $s \in H^0(L)$ гиперповерхность $\{s = 0\}$ связна.*

Доказательство. Так как L – глобально порожденное расслоение, имеется естественный морфизм $f : X \to \mathbb{P}(H(X, \mathcal{O}))^*$, заданный полной линейной системой L. Пусть Y – образ X, тогда $L \cong f^*(\mathcal{O}_Y(1))$. Так как $c_1(L) \neq 0$, Y имеет ненулевую размерность. Естественно, расслоение $\mathcal{O}_Y(1)$ обильно на Y.

В случае, если слои отображения $f : X \to Y$ несвязны, рассмотрим факторизацию Штейна $f = gh$, $h : X \to Z$, $g : Z \to Y$, где h – морфизм со связными слоями, а g – конечный морфизм. Пусть $L_1 = g^*(\mathcal{O}_Y(1))$. Так как g – конечный морфизм, то L_1 тоже обильно.

Осталось рассмотреть два случая. Если $\dim(Z) > 1$, то дивизор нулей любого сечения L_1 связен (так как L_1 обильно). А так как слои h связны, то и прообраз этого дивизора на X связен. Если же $\dim(Z) = 1$, то $c_1(\mathcal{O}_Y(1))^2 = 0$, а значит, $c_1(L)^2 = h^*(c_1(L_1)^2) = 0$.

□

Мы будем говорить, что общее сечение расслоения E на многообразии X удовлетворяет определенному свойству, если выполняется следующее: существует такое собственное, замкнутое по Зарисскому подмножество $Z \subset \mathbb{P}(H^0(X, E))$, что всякое ненулевое сечение $s \in H^0(X, E)$, чья проективизация лежит в дополнении к Z, удовлетворяет данному свойству.

Следующая лемма стандартна, см. [1, Глава 7].

Лемма 4. *Пусть L – глобально порожденное линейное расслоение на неприводимом проективном многообразии Y и $c_1(L) \neq 0$. Тогда для общего сечения s расслоения L многообразие $\{s = 0\}$ имеет коразмерность 1 и $c_1(L) = [\{s = 0\}] \in H^2(Y)$.*

Теорема 2. *Пусть $E = L_1 \oplus L_2 \oplus ... \oplus L_n$ – векторное расслоение на связном проективном многообразии X, такое что каждое из линейных расслоений L_i глобально порождено. Предположим, что элемент $c_{2n}(E \oplus E)$ группы $H^{4n}(X, \mathbb{R})$ отличен от 0. Тогда для всякого сечения s расслоения E многообразие $\{s = 0\}$ непусто и сязно.*

Доказательство. Так как $c_{2n}(E \oplus E) \neq 0$, то $c_n(E) \neq 0$, а значит, все сечения расслоения E имеют нули (см. [1, Глава 7]).

Теперь мы докажем, что для *общего* сечения s расслоения E многообразие $\{s = 0\}$ связно. Будем рассуждать от противного. Предположим, что для общего сечения s многообразие $\{s = 0\}$ несвязно. Представим s в виде $s = s_1 + ... + s_n$ где s_i является сечением расслоения L_i. Так как $c_n(E) \neq 0$, то сечение s имеет нули. Поэтому многообразие $Y_k = \{s_1 = ... = s_k = 0\}$ непусто для всякого $k \leq n$ и, значит, в силу Леммы 4 имеет коразмерность k. Более того, в силу Леммы 4, имеется следующее равенство в когомологиях:

$$[Y_i] = c_1(L_1) \cdot ... \cdot c_1(L_i) \in H^{2i}(X).$$

Найдем максимальное k, такое что многообразие $Y_k = \{s_1 = ... = s_k = 0\}$ связно. Применив Лемму 3 к многообразию Y_k и линейному расслоению L_{k+1}, мы видим, что

$$[Y_k] \cdot c_1(L_{k+1})^2 = c_1(L_1) \cdot ... \cdot c_1(L_k) \cdot c_1(L_{k+1}^2) = 0.$$

Тем более $c_{2n}(E \oplus E) = \Pi_{i=1}^n c_1(L_i)^2 = 0$, а значит, мы получили противоречие.

Таким образом, для общего сечения E теорема доказана. Чтобы доказать теорему для всех сечений, осталось доказать следующую лемму.

Лемма 5. *Пусть E – векторное расслоение над неприводимым проективным многообразием X, удовлетворяющее следующим трем условиям:*

1) Ранг E меньше размерности X.

2) E глобально порождено.

3) Для общего сечения $s \in H^0(E)$ многообразие $\{s = 0\}$ непусто и связно.

Тогда многообразие $\{s = 0\}$ связно для произвольного сечения s расслоения E.

Доказательство леммы. Рассмотрим в $\mathbb{P}(H^0(E)) \times X$ подмногообразие инцидентности Γ, параметризующее пары (s, x), такие что $s(x) = 0$ $(s \neq 0 \in H^0(E))$.

Так как E глобально порождено, Γ является расслоением над X со слоем $\mathbb{P}^k$, где $k = \dim X - \mathrm{rank} E - 1$. А следовательно, Γ связно и, более того, неприводимо.

Заметим теперь, что из условия 3) леммы следует, что все сечения E имеют нули, и, значит, проекция Γ на $\mathbb{P}(H^0(E))$ является доминантным отображением. Также из условия 3) леммы следует, что общий слой проекции Γ на $\mathbb{P}(H^0(E))$ связен. А так как $\mathbb{P}(H^0(E))$ нормально, то из факторизации Штейна [[10], Ch III, Corollary 11.5] следует, что все слои этой проекции связны.

Это завершает доказательство леммы, а вместе с ней и теоремы.

□

4. Когомологии пространства флагов

В этом параграфе мы соберем необходимые нам факты о когомологиях пространства полных флагов и докажем необращение в ноль одного из классов когомологий, которое необходимо нам для доказательства непустоты и связности пространства путей.

Напомним, что на пространстве F_n есть семейство тавтологических расслоений

$$\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1 \subset ... \subset \mathcal{U}_{n-1} \subset \mathcal{U}_n,$$

где $\mathcal{U}_0$ – нулевое расслоение, $\mathcal{U}_n$ – тривиальное расслоение ранга n. Положим

$$L_i = \mathcal{U}_i / \mathcal{U}_{i-1}, \quad x_i = -c_1(L_i), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Имеет место следующий результат:

Теорема 3. *Кольцо когомологий $H^*(F_n)$ порождается мультипликативно единицей и классами x_i. Оно имеет размерность $n!$ и имеет следующее представление:*

$$H^*(F_n) = \mathbb{Z}[x_1, ..., x_n]/(e_1(x_1, ..., x_n), ..., e_n(x_1, ..., x_n)),$$

где e_i – симметрические многочлены.

Для нас будут особенно важны классы $\sigma_i = c_1(\mathcal{U}_i^*) \in H^2(F_n)$. Очевидно, что $\sigma_i = x_1 + ... + x_i$. Классы $\sigma_1, ..., \sigma_{n-1}$ порождают $H^2(F_n)$, а также, вместе с единицей, порождают мультипликативно $H^*(F_n)$.

В пространстве F_n есть выделенный набор циклов Шуберта X_w, который нумеруется всевозможными перестановками w из симметрической группы S_n. При этом классы $[X_w]$ формируют целочисленный базис в кольце когомологий $H^*(F_n)$, а классы σ_i соответствуют циклам $[X_{(i,i+1)}]$, где $(i, i+1)$ – транспозиция.

Коразмерность цикла Шуберта X_w равна *длине* элемента w. Напомним, что *длиной* элемента w из S_n называется минимальное число i, такое что $w = \sigma_{r_1} \cdot ... \cdot \sigma_{r_i}$. Длина w обозначается через $l(w)$, и мы имеем $[X_w] \in H^{l(w)}$.

Нам потребуются два свойства произведений циклов Шуберта.

Предложение 1. *Произведение любого числа циклов Шуберта $[X_w]$ является линейной комбинацией циклов Шуберта с* неотрицательными *коэффициентами.*

Формула Монка дает конкретное разложение по базису циклов Шуберта произведения $\sigma_r \cdot [X_w]$.

Теорема 4. *Пусть $[X_w]$ – цикл Шуберта, соответствующий слову $w \in S_n$ и $\sigma_r = [X_{(r\,r+1)}]$. Тогда*

$$\sigma_r \cdot [X_w] = \sum_{\substack{\ell(w(ij)) = \ell(w)+1 \\ i \le r < j}} X_{w(ij)}.$$

Из этой формулы несложно вывести следующий результат:

Следствие 1. *В когомологиях пространства полных флагов выполняется*

$$(\sigma_1 \cdot ... \cdot \sigma_{n-1})^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \ne 0 \in H^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor},$$

где $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ – целая часть $\frac{n}{2}$.

Напомним, что слово $(r_1\ r_1+1) \cdot ... \cdot (r_N\ r_{N+1})$ называется *приведенным*, если для всякого $k \le N$ выполнено $l((r_1\ r_1+1) \cdot ... \cdot (r_k\ r_k+1)) = k$.

Доказательство. Напомним, что единица в $H^*(F_n)$ соответствует единичной перестановке e. Таким образом, из формулы Монка следует, что коэффициент при $[X_w]$ в разложении цикла $\sigma_{r_1} \cdot \sigma_{r_2} \cdot ... \cdot \sigma_{r_N}$ по циклам Шуберта равен числу цепочек

$$e = w_0,\ w_1,\ w_2,\ \dots,\ w_N = w,$$

таких что, $\ell(w_k) = k$, и w_k имеет вид $w_{k-1}(ij)$ с $i \le r_k < j$.

В частности, если слово $(r_1\ r_1+1)(r_2\ r_2+1) \cdots (r_N\ r_N+1)$ приведенное (то есть произведение любых первых k транспозиций имеет длину k), тогда $\sigma_{r_1} \cdot \sigma_{r_2} \cdot ... \cdot \sigma_{r_N} \ne 0 \in H^*(F_n)$.

Осталось заметить, что слово

$$\Big((1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)\cdots(2\ 3)(4\ 5)(6\ 7)\cdots\Big)^{\lfloor n/2\rfloor}$$

– приведенное.

□

5. Расслоения на пространствах флагов

В этом параграфе мы построим обещанное векторное расслоение на $F_n \times F_n$, покажем, что оно расщепляется в сумму линейных, и вычислим его старший класс Черна. Такое расслоение возникает всякий раз, когда мы рассматриваем пересечение $G(n,2n)$ с набором гиперповерхностей, и конкретный выбор гиперповерхностей определяет сечение расслоения (с точностью до пропорциональности). Чтобы объяснить конструкцию, достаточно рассмотреть случай пересечения $G(n,2n)$ с одной гиперповерхностью степени d.

Итак, рассмотрим грассманиан $G(n,2n)$, вложенный по Плюккеру. Пусть s_d – сечение $\mathcal{O}(d)$, соответствующее гиперповерхности Y_d степени d, которую мы пересекаем с $G(n,2n)$. Прежде чем строить расслоение, рассмотрим более простой вопрос о том, как получить аналогичное описание для многообразия Фано прямых, лежащих на $G(n,2n)\cap Y_d$. Напомним, что многообразие Фано самого грассманиана изоморфно пространству частичных флагов $F(n+1,n-1;2n)$. Имеется следующая лемма:

Лемма 6. *Всякому сечению $s_d \in \mathcal{O}(d)$ на $G(n,2n)$ соответствует сечение*

$$s'_d \in E_d = S^d((\mathcal{W}_{n+1}/\mathcal{W}_{n-1})^* \otimes \Lambda^{n-1}(\mathcal{W}^*_{n-1})) \tag{2}$$

на $F(n+1,n-1;2n)$, такое, что нули s'_d соответствуют пространству прямых на $G(n,2n)$, лежащих в нулях сечения s.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $d=1$. В этом случае утверждение вытекает из того, что для всякой пары $W_{n-1}\subset W_{n+1}$ подпространств W_{2n} имеется естественное линейное отображение

$$H^0(G(n,2n),\mathcal{O}(1)) \cong \Lambda^n(W^*_{2n}) \to (W_{n+1}/W_{n-1})^* \otimes \Lambda^{n-1}(W^*_{n-1}).$$

Это отображение как раз и задает искомое линейное отображение

$$H^0(G(n,2n),\mathcal{O}(1)) \to H^0((\mathcal{W}_{n+1}/\mathcal{W}_{n-1})^* \otimes \Lambda^{n-1}(\mathcal{W}^*_{n-1})).$$

Для общего же случая заметим, что

$$H^0(G(n,2n),\mathcal{O}(d)) \subset S^d(\Lambda^n(W^*_{2n})).$$

Таким образом, мы получаем отображение

$$H^0(G(n,2n),\mathcal{O}(d)) \to S^d(\Lambda^n(W^*_{2n})) \to S^d((W_{n+1}/W_{n-1})^* \otimes \Lambda^{n-1}(W^*_{n-1})).$$

Это отображение дает нам искомое сечение s'_d. Несложно проверить, что его нули высекают на $F(n+1, n-1; 2n)$ многообразие Фано прямых на $G(n, 2n) \cap \{s_d = 0\}$.

□

Построение расслоения и сечения на $F_n \times F_n$. Мы определим на $F_n \times F_n$ расслоение E_d ранга $n(d+1)-2$ и его сечение s, такие, что точка $P \in F_n \times F_n$ лежит в многообразии $\{s = 0\}$ тогда и только тогда, когда путь P лежит в гиперповерхности Y_d.

Для того, чтобы путь P лежал в Y_d, необходимо и достаточно, чтобы каждое звено P лежало в Y_d. Иными словами, необходимо, чтобы для всякого k точка $p_k(P) \in F(n+1, n-1; 2n)$ соответствовала прямой, лежащей на Y_d. Таким образом, для каждого k, используя Лемму 6 и определение (1) морфизма p_k, мы видим, что точка P лежит в нулях сечения $p_k^*(s'_d)$ расслоения $p_k^*(E_d)$. Из этого сразу же следует, что в качестве искомого расслоения на $F_n \times F_n$ мы могли бы взять $p_1^*(E_d) \oplus p_2^*(E_d) \oplus ... \oplus p_n^*(E_d)$. Однако вместо него нам придется взять некоторое его подрасслоение коранга два. А именно, имеет место следующая лемма, поясняющая выбор такого подрасслоения.

Лемма 7. *1) Расслоения $p_1^*(E_d)$ и $p_n^*(E_d)$ канонически расщепляются в суммы $p_1^*(E_d) \cong \mathcal{O} \oplus p_1^*(E_d)/\mathcal{O}$, $p_n^*(E_d) \cong \mathcal{O} \oplus p_n^*(E_d)/\mathcal{O}$.*

2) Более того, в случае если гиперповерхность $\{s_d = 0\}$ содержит точки u и v грассманиана $G(n, 2n)$, то сечения $p_1^*(s'_d)$ и $p_n^*(s'_d)$ лежат в подрасслоениях $p_1^*(E_d)/\mathcal{O}$ и $p_n^*(E_d)/\mathcal{O}$ соответственно.

Мы дадим доказательство этой леммы в следующем параграфе, после того, как будет выведен явный вид расслоений $p_1^*(E_d)$ и $p_n^*(E_d)$. Заметим пока только, что в нашей задаче точки u и v лежат на гиперповерхности $\{s_d = 0\}$ (так как мы изучаем пространство путей, соединяющих две точки пересечения $G(n, 2n) \cap \{s_d = 0\}$). Если бы в качестве расслоения на $F_n \times F_n$ мы взяли всю сумму $p_1^*(E_d) \oplus p_2^*(E_d) \oplus ... \oplus p_n^*(E_d)$, то у такого расслоения было бы сечение без нулей. А именно, можно было бы просто взять сечение s_d такое, что $\{s_d = 0\}$ не проходит через u и v. Именно, чтобы разрешить эту проблему, мы должны несколько модифицировать расслоение на $F_n \times F_n$. Это приводит нас к следующему определению.

Определение 4. *Рассмотрим на $F_n \times F_n$ следующее расслоение $\mathcal{E}_d^F$ вместе с сечением s_d^F:*

$$\mathcal{E}_d^F := (p_1^*(E_d)/\mathcal{O}) \oplus p_2^*(E_d) \oplus ... \oplus p_{n-1}^*(E_d) \oplus (p_n^*(E_d)/\mathcal{O}), \quad s_d^F := p_1^*(s'_d) + ... + p_n^*(s'_d).$$

Многообразие путей длины n, соединяющих точки u и v на $G(n, 2n) \cap Y_d$, высекается нулями сечения s_d^F.

5.1. Свойства расслоения $\mathcal{E}_d^F$

В этом параграфе мы покажем, что расслоение $\mathcal{E}_d^F$ глобально порождено, и разложим его в сумму линейных расслоений.

Лемма 8. *Обратный образ расслоения E_d при отображении p_k имеет вид:*

$$p_k^*(E_d) = S^d(((\mathcal{U}_{n-k+1}/\mathcal{U}_{n-k}) \oplus (\mathcal{V}_k/\mathcal{V}_{k-1}))^* \otimes \Lambda^{n-k}(\mathcal{U}_{n-k}^*) \otimes \Lambda^{k-1}(\mathcal{V}_{k-1}^*)).$$

Доказательство. Пользуясь определением отображения p_k, мы получаем

$$p^*(\mathcal{W}_{n+1}) = \mathcal{U}_{n-k+1} \oplus \mathcal{V}_k,\ p^*(\mathcal{W}_{n-1}) = \mathcal{U}_{n-k} \oplus \mathcal{V}_{k-1}.$$

Остается воспользоваться формулой (2) и очевидным изоморфизмом

$$\Lambda^{n-1}(\mathcal{U}^*_{n-k} \oplus \mathcal{V}^*_{k-1}) = \Lambda^{n-k}(\mathcal{U}^*_{n-k}) \otimes \Lambda^{k-1}(\mathcal{V}^*_{k-1}).$$

□

Лемма 9. *Расслоение $\mathcal{E}^F_d$ расщепляется в сумму линейных глобально порожденных расслоений.*

Доказательство. Достаточно доказать эту лемму для каждого из слагаемых $p^*_k(E_d)$. Заметим, что расслоение E_d на $F(n+1, n-1; 2n)$ глобально порождено. Действительно, для всякого выбора ограничения сечения расслоения $\mathcal{O}(d)$ на прямую в $G(n, 2n)$ существует сечение расслоения $\mathcal{O}(d)$, имеющее выбранное ограничение на прямую. Таким образом, расслоение $p^*_k(E_d)$ также глобально порождено.

Согласно Лемме 8, расслоение $p^*_k(E_d)$ является симметрической степенью суммы двух линейных расслоений. Значит, оно само также расщепляется в сумму линейных. Наконец, заметим, что если глобально порожденное расслоение распадается в сумму линейных, то каждое из слагаемых также глобально порождено, так как имеется проекция всего расслоения на каждое из слагаемых.

□

Доказательство Леммы 7. Мы рассмотрим случай расслоения $p^*_1(E_d)$; случай расслоения $p^*_n(E_d)$ аналогичен. Согласно Лемме 8,

$$p^*_1(E_d) = S^d(((\mathcal{U}_n/\mathcal{U}_{n-1}) \oplus \mathcal{V}_1)^* \otimes \Lambda^{n-1}(\mathcal{U}^*_{n-1})).$$

Так как $\mathcal{U}_n \cong \mathcal{O}^{\oplus n}$, то $\Lambda^n(\mathcal{U}_n) \cong \mathcal{O}$, из чего вытекает, что $\mathcal{U}_n/\mathcal{U}_{n-1} \cong \Lambda^{n-1}(\mathcal{U}^*_{n-1})$. Поэтому формула для $p^*_1(E_d)$ упрощается:

$$p^*_1(E_d) = S^d(\mathcal{O} \oplus \mathcal{V}^*_1 \otimes \Lambda^{n-1}(\mathcal{U}^*_{n-1})) =$$

$$\mathcal{O} \oplus \mathcal{V}^*_1 \otimes \Lambda^{n-1}(\mathcal{U}^*_{n-1}) \oplus \ldots \oplus (\mathcal{V}^*_1 \otimes \Lambda^{n-1}(\mathcal{U}^*_{n-1}))^d.$$

Таким образом, $p^*_1(E_d)$ являтся суммой $d+1$ линейных расслоений, одно из которых тривиально. Несложно показать, что выше указанное разложение расслоения $p^*_1(E_d)$ в прямую сумму единственно с точностью до изоморфизма. Таким образом, первая часть леммы доказана.

Чтобы доказать вторую часть, достаточно заметить, что при малых d всякая гиперповерхность $\{s_d = 0\}$, проходящая через U, содержит прямые на $G(n, 2n)$, проходящие через точку U. Иными словами, сечение $p^*(s'_d)$ обязано иметь нули на $F_n \times F_n$. В то же время, если бы сечение $p^*(s'_d)$ не лежало в подрасслоении $p^*_1 E_d/\mathcal{O}$, то оно не обращалось бы в ноль нигде, так как оно было бы суммой ненулевого сечения $\mathcal{O}$ и сечения $p^*_1 E_d/\mathcal{O}$. Это завешает доказательство леммы.

□

5.2. Вычисление классов Черна и необращение в ноль

Будем обозначать через σ_k^u и σ_k^v классы вторых когомологий произведения пространств флагов $F(U) \times F(V)$.

Лемма 10. *Полный класс Черна расслоения* $p_k^*(E_1)$ *равен*

$$(1 + \sigma_{n-k+1}^u + \sigma_{k-1}^v)(1 + \sigma_{n-k}^u + \sigma_k^v).$$

Доказательство. $p_k^*(E_1)$ является суммой двух линейных расслоений:

$$p_k^*(E_1) = (\mathcal{U}_{n-k+1}/\mathcal{U}_{n-k})^* \otimes \Lambda^{n-k}\mathcal{U}_{n-k}^* \otimes \Lambda^{k-1}\mathcal{V}_{k-1}^* \oplus (\mathcal{V}_k/\mathcal{V}_{k-1})^* \otimes \Lambda^{n-k}\mathcal{U}_{n-k}^* \otimes \Lambda^{k-1}\mathcal{V}_{k-1}^*.$$

Полный класс Черна первого из них вычисляется следующим образом:

$$1 + c_1(\mathcal{U}_{n-k+1}/\mathcal{U}_{n-k})^* + c_1(\Lambda^{n-k}\mathcal{U}_{n-k}^*) + c_1(\Lambda^{k-1}\mathcal{V}_{k-1}^*) =$$

$$1 + (\sigma_{n-k+1}^u - \sigma_{n-k}^u) + \sigma_{n-k}^u + \sigma_{k-1}^v.$$

Для второго расслоения вычисление аналогично, а полный класс Черна суммы двух расслоений равен произведению классов слагаемых. Это доказывает лемму. □

Следствие 2. *Старшие классы Черна расслоений* $p_k^*(E_d)$, $p_1^*(E_d)/\mathcal{O}$ *и* $p_n^*(E_d)/\mathcal{O}$ *имеют следующий вид:*

$$c_{d+1}(p_k^*(E_d)) = \Pi_{i=0}^d (i(\sigma_{n-k+1}^u + \sigma_{k-1}^v) + (d-i)(\sigma_{n-k}^u + \sigma_k^v)),$$

$$c_d(p_1^*(E_d)/\mathcal{O}) = d!(\sigma_{n-1}^u + \sigma_1^v)^d,$$

$$c_d(p_n^*(E_d)/\mathcal{O}) = d!(\sigma_1^u + \sigma_{n-1}^v)^d.$$

Доказательство. Первая формула следует непосредственно из Леммы 10, а также следующей стандартной формулы:

$$c_{d+1}(S^d(L_1 \oplus L_2)) = \Pi_{i=0}^d (ic_1(L_1) + (d-i)c_1(L_2)).$$

Во второй и третьей формулах дополнительно используется, что $\sigma_n^u + \sigma_0^v = \sigma_0^u + \sigma_n^v$. □

Мы подошли к главному техническому утверждению.

Теорема 5. *Пусть* $d_1 + d_2 + ... + d_i < \frac{n}{4}$; *рассмотрим на* $F_n \times F_n$ *следующее расслоение:*

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{d_1}^F \oplus ... \oplus \mathcal{E}_{d_i}^F.$$

Расслоение $\mathcal{E}$ *глобально порождено, расщепляется в сумму линейных, а расслоение* $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}$ *имеет ненулевой старший класс Черна.*

Доказательство. Так как по Лемме 9 каждое из слагаемых $\mathcal{E}_{d_k}^F$ глобально порождено и расщепляется в сумму линейных, то и само расслоение $\mathcal{E}$ обладает этими свойствами.

Докажем утверждение про старший класс Черна. Заметим, что из Следствия 2 сразу вытекает, что старший класс Черна расслоения $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}$ является суммой мономов от σ_l^u и σ_m^v с положительными коэффициентами. А значит, из Предложения 1 сразу следует, что достаточно доказать, что хотя бы один из мономов не обращается в ноль. Согласно Следствию 1, достаточно найти такой моном, чтобы степень каждого входящего в него σ_l^u и σ_m^v была не больше, чем $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. В то же время, из формул Следствия 2 несложно вывести, что в старшем классе Черна расслоения $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}$ есть такие мономы, у которых степень при каждом σ_l^u и σ_m^v не больше, чем $2(\sum_i (d_i+1))$. А по условию Теоремы 2 $\sum_i (d_i+1) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Таким образом, доказательство завершено.

□

6. Доказательство Теоремы 1

Наконец, приступаем к доказательству Теоремы 1.

Пусть X является пересечением $G(n, 2n)$ с набором гиперповерхностей $Y_1, ..., Y_i$ степеней $d_1, ..., d_i$. Покажем сначала, что для двух общих точек u и v на X пространство путей длины n, соединяющих их, непусто и связно.

Как мы объяснили, это пространство путей высекается из $F_n \times F_n$ нулями сечения расслоения $\mathcal{E}$. По Теореме 5 расслоение $\mathcal{E}$ глобально порождено, расщепляется в сумму линейных, и старший класс Черна расслоения $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}$ не равен нулю. Поэтому мы можем применить Теорему 2, из которой выводим, что многообразие нулей любого сечения $\mathcal{E}$ непусто и связно. А значит, и многообразие путей непусто и связно.

Осталось доказать теорему в случае, если точки u и v не обязательно в общем положении. Для этого, рассмотрим пространство всех путей на X, начинающихся в u. Это пространство является неприводимым проективным многообразием, и имеется естественный морфизм из этого многообразия в X, сопоставляющий каждому пути его конечную точку. Так как множество точек v, соответствующих плоскостям, трансверсальным u, всюду плотно в X, то образ морфизма также всюду плотен. А так как пространство путей проективно, то морфизм доминантен. Итак, мы имеем доминантный морфизм из неприводимого многообразия в нормальное многообразие, и общий слой морфизма непуст и связен. Из факторизации Штейна следует, что все слои непусты и связны. Теорема доказана.

□

Список литературы

1. Eisenbud D., Harris J. 3264 & All That Intersection. Theory in Algebraic Geometry. 2013. URL: http://isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic720403.files/book.pdf.

2. Barth W., Van de Ven A. On the geometry in codimension 2 in Grassmann manifolds // Lecture Notes in Math. 412. Springer-Verlag, 1974. P. 1–35.

3. Tyurin A. N. Vector bundles of finite rank over infinite varieties // Math. USSR. Izvestija. 1976. No 10. P. 1187–1204.

4. Sato E. On the decomposability of infinitely extendable vector bundles on projective spaces and Grassmann varieties // J. Math. Kyoto Univ. 1977. No 17. P. 127–150.

5. Donin J., Penkov I. Finite rank vector bundles on inductive limits of grassmannians // IMRN. 2003. No 34. P. 1871–1887.

6. Penkov I., Tikhomirov A. S. Rank-2 vector bundles on ind-Grassmannians // Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin, V II, Progr. Math. V. 270. Birkhaeuser, Boston-Basel-Berlin, 2009. P. 555–572.

7. Пенков И.Б., Тихомиров А.С. Тривиальность векторных расслоений на скрученных инд-грассманианах // Математический сборник. 2011. 202. No 1. С. 65–104 (English translation: Penkov I.B., Tikhomirov A.S. Triviality of vector bundles on twisted ind-Grassmannians // Sbornik: Mathematics. 2011. 202, No 1. P. 61–99).

8. Penkov I., Tikhomirov A.S. On the Barth–Van de Ven–Tyurin–Sato theorem // arXiv:1405.3897[math.AG].

9. Penkov I., Tikhomirov A.S. Linear ind-grassmannians // Pure and Applied Mathematics Quarterly. 2014. 10. No 1. arXiv: 1310.8058 [math.AG].

10. Hartshorne R. Algebraic Geometry. New York: Springer-Verlag, 1977.

On the Variety of Paths on Complete Intersections in Grassmannians

Yermakova S. M.

P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia

Keywords: grassmannian, vector bundle, Fano variety of lines

In this article we study the Fano variety of lines on the complete intersection of the grassmannian $G(n, 2n)$ with hypersurfaces of degrees $d_1, ..., d_i$. A length l path on such a variety is a connected curve composed of l lines. The main result of this article states that the space of length l paths connecting any two given points on the variety is non-empty and connected if $\sum d_j < \frac{n}{4}$. To prove this result we first show that the space of length n paths on the grassmannian $G(n, 2n)$ that join two generic points is isomorphic to the direct product $F_n \times F_n$ of spaces of full flags. After this we construct on $F_n \times F_n$ a globally generated vector bundle $\mathcal{E}$ with a distinguished section s such that the zeros of s coincide with the space of length n paths that join x and y and lie in the intersection of hypersurfaces of degrees d_1,...,d_k. Using a presentation of $\mathcal{E}$ as a sum of linear bundles we show that zeros of its generic and, hence, any section form a non empty connected subvariety of $F_n \times F_n$. Apart from its immediate geometric interest, this result will be used in our future work on generalisation of splitting theorems for finite rank vector bundles on ind-manifolds.

Сведения об авторе:
Ермакова Светлана Михайловна,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ассистент кафедры общей математики