

УДК 519.677

Математическое обоснование одного численного эксперимента

Дымов А.В., Нестеров П.Н.¹

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: mathematix@mail.ru

получена 2 сентября 2009

Ключевые слова: распространение радиоволн, численный эксперимент, оценка погрешности.

Приводится математическое обоснование одного численного эксперимента, посвященного исследованию распространения радиоволн в условиях сложного рельефа.

1. Постановка задачи. Развитие разнообразных систем радиодоступа (IEEE 802.11(WiFi), IEEE 802.16 (WiMax)), средств подвижной связи (D-AMPS, GSM, IS-95(CDMA), SmarTrunk, TETRA, MPT 1327, EDACS, системы 3G/UMTS) и радиовещания, цифрового телевидения (DVB-S, DVB-T, DVB-M) и т.п. стимулировало работы по более детальному изучению взаимодействия электромагнитного излучения со средой. Проектирование и планирование подобных систем невозможно без создания моделей распространения радиоволн. Наиболее остро вопрос планирования и проектирования стоит применительно к условиям города, потому что современный крупный город с точки зрения распространения радиоволн представляет сложную неоднородную структуру, простирающуюся иногда на десятки километров. В связи с трудностями строгого решения задачи распространения в условиях сложного рельефа широкое распространение получил метод, основанный на аппроксимации доминирующих препятствий рельефа клиновидными препятствиями и использовании теории дифракции Френеля – Кирхгофа [1, 7]. Для практических задач в УКВ-диапазоне выполняются приближенные граничные условия Кирхгофа, необходимые для нахождения решения из интегральной теоремы Кирхгофа – Гельмгольца [1, 2]. Это позволяет представить здания в виде непрозрачных полукранов, расположенных на рельефе местности. Использование решения Френеля

¹Работа выполнена при финансовой поддержке целевых программ «Развитие научного потенциала высшей школы» (проекты РНП.2.2.2.3.8064 и РНП.2.2.1.1.5859), «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (государственный контракт №02.740.11.0197), а также Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF) (проект # RUB1-020-YA-07 / BF7M20).

– Кирхгофа для одиночного клиновидного препятствия (непрозрачной полуплоскости), выражающегося через интегралы Френеля, стало по существу классическим и изложено во многих пособиях по распространению радиоволн (см., например, [2, 6]). Метод Кирхгофа решения дифракционных задач является математическим обобщением физического принципа Гюйгенса – Френеля, основная идея которого состоит в том, что волновое возмущение в некоторой точке пространства есть результат интерференции волн, испускаемых вторичными источниками, расположенными на поверхности, проходящей между точкой и реальным источником волн. В случае аппроксимации препятствий плоским экраном мы приходим к необходимости последовательного вычисления интегралов следующего вида:

$$E_{n+1}(y) = \frac{d_n}{\sqrt{\lambda}} \exp\left\{i\frac{\pi}{4}\right\} \int_{h_n}^{\infty} \frac{E_n(x)}{r_n^{3/2}(x, y)} \exp\left\{i\frac{2\pi}{\lambda}r_n(x, y)\right\} dx, \quad n = 1, 2, \dots, L, \quad (1)$$

$$E_1(y) = \frac{1}{r_0(y)} \exp\left\{i\frac{2\pi}{\lambda}r_0(y)\right\}.$$

Здесь $d_n > 0$ — расстояние между n -м и $(n+1)$ -м экранами, λ — длина волны, $h_n > 0$ — высота n -го экрана. Далее,

$$r_n(x, y) = \sqrt{d_n^2 + (x - y)^2}, \quad r_0(y) = \sqrt{d_0^2 + (y_0 - y)^2}, \quad (2)$$

где d_0 — расстояние от источника излучения до первого экрана; y_0 — высота, на которой находится источник излучения. Наконец, $E_n(x)$ — напряженность поля над n -м экраном на высоте x и $y \in [h_{n+1}, \infty)$.

Поскольку вычисление интегралов (1) в явном виде не представляется возможным, значения функций $E_n(y)$ вычисляются численно. Описанию и математическому обоснованию соответствующего численного эксперимента посвящена данная работа.

2. Вычислительный эксперимент. Для получения расчетных формул, позволяющих вычислять значения функции $E_n(y)$, каждый из интегралов (1) запишем в виде

$$I(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) \exp\{ig(x, y)\} dx, \quad b \leq y < \infty. \quad (3)$$

Разобьем бесконечный промежуток $[a, \infty)$ на отрезки длины h :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_j < \dots, \quad x_j = a + jh, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Пусть $f_j(x, y)$ и $g_j(x, y)$ — линейные по x функции, аппроксимирующие соответственно функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ на отрезке $x_j \leq x < x_{j+1}$ следующим образом:

$$f_j(x, y) = f(x_j, y) + (f(x_{j+1}, y) - f(x_j, y)) \frac{x - x_j}{h},$$

$$g_j(x, y) = g(x_j, y) + (g(x_{j+1}, y) - g(x_j, y)) \frac{x - x_j}{h}. \quad (4)$$

Положим

$$\hat{I}(h, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f_j(x, y) \exp\{ig_j(x, y)\} dx. \quad (5)$$

Естественным образом возникает вопрос о корректности определения функции $\hat{I}(h, y)$, т.е. о сходимости ряда (5). Ответ на этот вопрос дает следующая лемма.

Лемма 1. Пусть выполнены следующие условия:

1⁰. $|f(x, y)| \leq \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y) \in C_1[a, \infty)$ по переменной x и

$$\int_a^{\infty} \varphi(x, y) dx \leq M < \infty, \quad \int_a^{\infty} |\varphi'_x(x, y)| dx \leq M < \infty, \quad y \in [b, \infty). \quad (6)$$

2⁰. $f(x, y) \in C_1[a, \infty)$ по переменной x и

$$\int_a^{\infty} |f'_x(x, y)| dx \leq M < \infty, \quad y \in [b, \infty).$$

3⁰. Функция $g(x, y)$ дифференцируема по переменной x на промежутке $[a, \infty)$ и

$$|g'_x(x, y)| \leq M, \quad x \in [a, \infty), \quad y \in [b, \infty).$$

Тогда при достаточно малых h и любом $y \in [b, \infty)$ ряд (5) сходится абсолютно и, кроме того,

$$\begin{aligned} \hat{I}(h, y) = & \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (f(x_j, y) + f(x_{j+1}, y)) \exp\{ig(x_j, y)\} + \\ & + i \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (g(x_{j+1}, y) - g(x_j, y)) f(x_j, y) \exp\{ig(x_j, y)\} + O(h^2). \end{aligned} \quad (7)$$

В условиях этой леммы и всюду далее все различные константы, не зависящие от параметра y , мы будем обозначать одинаковой буквой M . Кроме того, представление некоторой функции $\omega(h, y)$ в асимптотических формулах в виде $O(r(h))$ означает, что

$$|\omega(h, y)| \leq Mr(h), \quad 0 < h \ll 1, \quad y \in [b, \infty).$$

Доказательство. Вычисляя интеграл (5), получаем

$$\begin{aligned} \hat{I}(h, y) = & \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{f(x_j, y) \exp\{ig(x_j, y)\} h}{i(g(x_{j+1}, y) - g(x_j, y))} \left(\exp\{i(g(x_{j+1}, y) - g(x_j, y))\} - 1 \right) + \right. \\ & + \frac{(f(x_{j+1}, y) - f(x_j, y)) \exp\{ig(x_j, y)\} h}{i(g(x_{j+1}, y) - g(x_j, y))} \exp\{i(g(x_{j+1}, y) - g(x_j, y))\} + \\ & \left. + \frac{(f(x_{j+1}, y) - f(x_j, y)) \exp\{ig(x_j, y)\} h}{(g(x_{j+1}, y) - g(x_j, y))^2} \left(\exp\{i(g(x_{j+1}, y) - g(x_j, y))\} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Если $g(x_{j+1}) = g(x_j)$, то выражение в квадратных скобках понимается в смысле предела при $g(x_{j+1}) \rightarrow g(x_j)$.

Пусть $h \rightarrow 0$, тогда $g(x_{j+1}) - g(x_j) \rightarrow 0$. Из формулы конечных приращений

$$g(x_{j+1}, y) - g(x_j, y) = g'_x(c_j, y)h, \quad x_j \leq c_j \leq x_{j+1}$$

и условия 3⁰ следует, что

$$g(x_{j+1}, y) - g(x_j, y) = O(h).$$

Используя разложение Тейлора для функции $\exp z$ при $z \rightarrow 0$, перепишем выражение (8) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \hat{I}(h, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[f(x_j, y) \exp\{ig(x_j, y)\} h + i \frac{h}{2} f(x_j, y) \exp\{ig(x_j, y)\} (g(x_{j+1}, y) - g(x_j, y)) + \right. \\ \left. + f(x_j, y) O(h^3) + \frac{h}{2} (f(x_{j+1}, y) - f(x_j, y)) \exp\{ig(x_j, y)\} + \right. \\ \left. + (f(x_{j+1}, y) - f(x_j, y)) O(h^2) \right]. \quad (9) \end{aligned}$$

Таким образом, чтобы обосновать справедливость формулы (7), нам следует доказать абсолютную сходимость рядов

$$h \sum_{j=0}^{\infty} f(x_j, y), \quad h \sum_{j=0}^{\infty} (f(x_{j+1}, y) - f(x_j, y)). \quad (10)$$

Обоснуем сначала абсолютную сходимость второго из этих рядов. Имеем

$$\begin{aligned} h \sum_{j=0}^{\infty} |f(x_{j+1}, y) - f(x_j, y)| = h \sum_{j=0}^{\infty} \left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} f'_x(x, y) dx \right| \leq h \sum_{j=0}^{\infty} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |f'_x(x, y)| dx = \\ = h \int_a^{\infty} |f'_x(x, y)| dx, \quad (11) \end{aligned}$$

и абсолютная сходимость этого ряда вытекает из условия 2⁰. Кроме того, сумма соответствующего ряда есть ограниченная функция переменных h и y при $0 < h \ll 1$ и $y \in [b, \infty)$, и имеет порядок $O(h)$. Для доказательства абсолютной сходимости первого ряда в (10) воспользуемся формулой суммирования Эйлера – Маклорена [3, 4]:

$$\sum_{j=0}^{N-1} p(j) = \int_0^N p(x) dx - \frac{1}{2} (p(N) - p(0)) + \int_0^N B_1(\{x\}) p'(x) dx, \quad (12)$$

где $B_1(y) = y - \frac{1}{2}$, а символом $\{x\}$ обозначена дробная часть x . Полагая в (12) $p(j) = h\varphi(x_j, y)$, получаем

$$h \sum_{j=0}^{N-1} |f(x_j, y)| \leq h \sum_{j=0}^{N-1} \varphi(x_j, y) = h \int_0^N \varphi(a + xh, y) dx - \frac{h}{2} (\varphi(a + Nh, y) - \varphi(a, y)) + \\ + h \int_0^N B_1(\{x\}) (\varphi(a + xh, y))'_x dx.$$

Устремляя N к бесконечности и замечая, что $|B_1(\{x\})| \leq \frac{1}{2}$, получаем следующую оценку:

$$h \sum_{j=0}^{\infty} |f(x_j, y)| \leq \int_a^{\infty} \varphi(z, y) dz + \frac{h}{2} \varphi(a, y) + \frac{h}{2} \int_a^{\infty} |\varphi'_z(z, y)| dz. \quad (13)$$

Существование интегралов в выражении выше гарантировано условием 1^0 , из которого, как легко установить, вытекает также, что $\forall y \in [b, \infty)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi(a, y) \leq M.$$

Таким образом, исследуемый ряд сходится абсолютно и имеет порядок $O(1)$ по h , что следует из оценки (13).

Учитывая абсолютную сходимость соответствующих рядов, а также равномерную ограниченность сумм по переменным $0 < h \ll 1$ и $y \in [b, \infty)$, из формулы (9) получаем (7).

Лемма доказана. □

Далее нам следует определить, с какой точностью сумма $\hat{I}(h, y)$ приближает искомый интеграл (3). Ответ на этот вопрос дает следующая лемма.

Лемма 2. Пусть выполнены все условия леммы 1. Кроме того, будем считать выполненными следующие предположения:

4^0 . Функция $g(x, y)$ два раза дифференцируема по x на промежутке $[a, \infty)$ и

$$|g''_{x^2}(x, y)| \leq M, \quad x \in [a, \infty), \quad y \in [b, \infty).$$

5^0 . Функция $f(x, y) \in C_2[a, \infty)$ по переменной x , кроме того, $|f''_{x^2}(x, y)| \leq \psi(x, y)$. Относительно функции $\psi(x, y)$ предположим, что

а) $\psi(x, y) \leq M$ для всех $x \in [a, \infty)$, $y \in [b, \infty)$ и

$$\int_a^{\infty} \psi(x, y) dx \leq M < \infty, \quad y \in [b, \infty);$$

б) функция $\psi(x, y)$ имеет лишь конечное число промежутков монотонности $N_{\text{mon}}(y)$ по переменной x при фиксированном y , причем это число ограничено по $y \in [b, \infty)$, т.е. $N_{\text{mon}}(y) \leq \tilde{N}_{\text{mon}}$;

в) функция $\psi(x, y)$ непрерывно дифференцируема по переменной x на промежутке $[a, \infty)$, за исключением, быть может, конечного числа особых точек $N_{sp}(y)$. Число этих точек ограничено по $y \in [b, \infty)$, т.е. $N_{sp}(y) \leq \hat{N}_{sp}$.

Тогда при достаточно малых h имеет место следующая асимптотическая оценка:

$$I(y) - \hat{I}(h, y) = O(h^2). \quad (14)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} I(y) - \hat{I}(h, y) &= \int_a^\infty f(x, y) \exp\{ig(x, y)\} dx - \sum_{j=0}^\infty \int_{x_j}^{x_{j+1}} f_j(x, y) \exp\{ig_j(x, y)\} dx = \\ &= \sum_{j=0}^\infty \left\{ \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y) \exp\{ig(x, y)\} dx - \int_{x_j}^{x_{j+1}} f_j(x, y) \exp\{ig_j(x, y)\} dx \right\}, \quad (15) \end{aligned}$$

где функции $f_j(x, y), g_j(x, y)$ заданы на отрезке $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ формулами (4). Раскладывая функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ в асимптотический ряд по формуле Тейлора и записывая остаток в форме Лагранжа, получаем

$$\begin{aligned} f(x, y) - f_j(x, y) &= f(x_j, y) + f'_x(x_j, y)(x - x_j) + \frac{f''_{x^2}(\theta_j(x, y), y)}{2}(x - x_j)^2 - \\ &- \left[f(x_j, y) + (f(x_{j+1}, y) - f(x_j, y)) \frac{x - x_j}{h} \right] = f'_x(x_j, y)(x - x_j) + \frac{f''_{x^2}(\theta_j(x, y), y)}{2}(x - x_j)^2 - \\ &- \left[f'_x(x_j, y)(x_{j+1} - x_j) + \frac{f''_{x^2}(\theta_j(x_{j+1}, y), y)}{2}(x_{j+1} - x_j)^2 \right] \frac{x - x_j}{h} = \\ &= \frac{f''_{x^2}(\theta_j(x, y), y)}{2}(x - x_j)^2 - \frac{f''_{x^2}(\theta_j(x_{j+1}, y), y)}{2}(x - x_j)h. \quad (16) \end{aligned}$$

Откуда $f(x, y) = f_j(x, y) + \omega_j(x, y)$, где

$$\omega_j(x, y) = \frac{f''_{x^2}(\theta_j(x, y), y)}{2}(x - x_j)^2 - \frac{f''_{x^2}(\theta_j(x_{j+1}, y), y)}{2}(x - x_j)h. \quad (17)$$

Аналогично заключаем, что $g(x, y) = g_j(x, y) + \nu_j(x, y)$, где

$$\nu_j(x, y) = \frac{g''_{x^2}(\hat{\theta}_j(x, y), y)}{2}(x - x_j)^2 - \frac{g''_{x^2}(\hat{\theta}_j(x_{j+1}, y), y)}{2}(x - x_j)h. \quad (18)$$

В формулах (16) — (18) $x_j \leq \theta_j(x, y) \leq x$, $x_j \leq \hat{\theta}_j(x, y) \leq x$ при $x \in [x_j, x_{j+1}]$. Учитывая полученные представления, перепишем выражение (15) в виде

$$I(y) - \hat{I}(h, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \int_{x_j}^{x_{j+1}} f_j(x, y) \exp\{ig_j(x, y)\} (\exp\{i\nu_j(x, y)\} - 1) dx + \right. \\ \left. + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \omega_j(x, y) \exp\{ig_j(x, y)\} dx \right\}. \quad (19)$$

В силу условия 4⁰ из (18) следует, что

$$|\nu_j(x, y)| \leq \frac{M}{2} |x_{j+1} - x_j|^2 + \frac{M}{2} |x_{j+1} - x_j| h = Mh^2.$$

Откуда

$$\exp\{i\nu_j(x, y)\} - 1 = O(h^2), \quad h \rightarrow 0.$$

Следовательно,

$$|I(y) - \hat{I}(h, y)| \leq Mh^2 \sum_{j=0}^{\infty} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |f_j(x, y)| dx + \sum_{j=0}^{\infty} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |\omega_j(x, y)| dx.$$

Далее, вспоминая (4), заключаем, что

$$\sum_{j=0}^{\infty} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |f_j(x, y)| dx \leq h \sum_{j=0}^{\infty} |f(x_j, y)| + \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{\infty} |f(x_{j+1}, y) - f(x_j, y)|.$$

Таким образом, в силу оценок (11) и (13), данный ряд сходится и его сумма есть величина порядка $O(1)$ по h . Значит,

$$|I(y) - \hat{I}(h, y)| \leq O(h^2) + \sum_{j=0}^{\infty} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |\omega_j(x, y)| dx.$$

Из (17) выводим, что

$$\sum_{j=0}^{\infty} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |\omega_j(x, y)| dx \leq \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |f''_{x^2}(\theta_j(x, y), y)| (x - x_j)^2 dx + \\ + \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{\infty} |f''_{x^2}(\theta_j(x_{j+1}, y), y)| \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x - x_j) dx \leq \frac{h^3}{6} \sum_{j=0}^{\infty} \max_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} |f''_{x^2}(\theta_j(x, y), y)| + \\ + \frac{h^3}{4} \sum_{j=0}^{\infty} |f''_{x^2}(\theta_j(x_{j+1}, y), y)| = \frac{h^3}{6} \sum_{j=0}^{\infty} |f''_{x^2}(c_j(y), y)| + \frac{h^3}{4} \sum_{j=0}^{\infty} |f''_{x^2}(\tilde{c}_j(y), y)|, \\ x_j \leq c_j(y) \leq x_{j+1}, \quad x_j \leq \tilde{c}_j(y) \leq x_{j+1}.$$

Покажем, что ряды в правой части этой цепочки неравенств сходятся, и каждое из слагаемых есть величина порядка $O(h^2)$ по h . Очевидно, что нам достаточно исследовать, например, первое из этих слагаемых, т.е.

$$\frac{h^3}{6} \sum_{j=0}^{\infty} |f''_{x^2}(c_j(y), y)|. \quad (20)$$

Покажем сперва, что этот ряд сходится при любом $y \in [b, \infty)$. Действительно, из условия 5^0 следует, что при достаточно больших $x(y)$ функция $\psi(x, y)$ не возрастает, как функция переменной x . Поэтому при достаточно большом $N(y)$ имеем

$$\sum_{j=N}^{\infty} |f''_{x^2}(c_j(y), y)| \leq \sum_{j=N}^{\infty} \psi(c_j(y), y) \leq \sum_{j=N}^{\infty} \psi(x_j, y).$$

Ряд в правой части сходится, согласно интегральному признаку Коши – Маклорена (см., например, [5]). Пусть $x_1(y), \dots, x_{N_{sp}(y)}(y)$ — последовательные точки на прямой, в которых не существует $\psi'_x(x, y)$. Каждую такую точку $x_i(y)$ заключим в отрезок $O_i(y) = [x_i(y) - \delta(y), x_i(y) + \delta(y)]$. Очевидно, мы можем считать, что $|\delta_i(y)| \leq \delta$, где δ не зависит от y , и, кроме того, $O_i \cap O_j = \emptyset$, $i \neq j$. Интервал $[a, \infty)$, из которого выброшены множества $O_i(y)$, $i = 1, \dots, N_{sp}(y)$, разобьем на последовательные непересекающиеся интервалы $I_1, \dots, I_{m(y)}$, на которых функция $\psi(x, y)$ не убывает, и последовательные непересекающиеся интервалы $D_1, \dots, D_{p(y)}$, где она не возрастает ($I_j \cap D_i = \emptyset$). Таким образом,

$$\begin{aligned} h \sum_{j=0}^{\infty} |f''_{x^2}(c_j(y), y)| &= h \sum_{l=1}^{m(y)} \sum_{c_j \in I_l} |f''_{x^2}(c_j(y), y)| + h \sum_{l=1}^{p(y)} \sum_{c_j \in D_l} |f''_{x^2}(c_j(y), y)| + \\ &\quad + h \sum_{l=1}^{N_{sp}(y)} \sum_{c_j \in O_l} |f''_{x^2}(c_j(y), y)|. \end{aligned} \quad (21)$$

Без ограничения общности, мы можем считать, что интервал $D_{p(y)}$ есть множество вида $[\tilde{a}(y), \infty)$ или $(\tilde{a}(y), \infty)$, и на этом множестве функция $\psi(x, y)$ не возрастает по переменной x . Имеем

$$h \sum_{l=1}^{N_{sp}(y)} \sum_{c_j \in O_l} |f''_{x^2}(c_j(y), y)| \leq h \sum_{l=1}^{N_{sp}(y)} \sum_{c_j \in O_l} \psi(c_j(y), y) \leq Mh \sum_{l=1}^{N_{sp}(y)} \sum_{j=1}^{\left[\frac{2\delta_l}{h}\right]+2} 1.$$

Здесь символом $[w]$ обозначена целая часть числа w . Окончательно получаем

$$h \sum_{l=1}^{N_{sp}(y)} \sum_{c_j \in O_l} |f''_{x^2}(c_j(y), y)| \leq Mh \sum_{l=1}^{N_{sp}(y)} \left(\left[\frac{2\delta_l}{h} \right] + 2 \right) \leq M\hat{N}_{sp} h \left(\frac{2\delta}{h} + 2 \right) = O(1), \quad h \rightarrow 0.$$

Рассмотрим далее интервал D_s , $s \neq p(y)$, на котором функция $\psi(x, y)$ не возрастает. Определим

$$s_1 = \min\{j : c_j \in D_s\}, \quad s_2 = \max\{j : c_j \in D_s\}. \quad (22)$$

Тогда

$$h \sum_{c_j \in D_s} |f''_{x^2}(c_j(y), y)| = h \sum_{j=s_1}^{s_2} |f''_{x^2}(c_j(y), y)| \leq h \sum_{j=s_1}^{s_2} \psi(c_j(y), y).$$

Если $s_2 = s_1$, то в силу 5^0

$$h \sum_{c_j \in D_s} |f''_{x^2}(c_j(y), y)| \leq h\psi(c_{s_1}(y), y) \leq Mh. \quad (23)$$

Пусть далее $s_2 > s_1$. В этом случае

$$h \sum_{j=s_1}^{s_2} \psi(c_j(y), y) = h\psi(c_{s_1}(y), y) + h \sum_{j=s_1+1}^{s_2} \psi(c_j(y), y) \leq Mh + h \sum_{j=s_1+1}^{s_2} \psi(x_j, y).$$

Для оценки суммы в правой части вновь воспользуемся формулой суммирования Эйлера – Маклорена (12):

$$\begin{aligned} h \sum_{j=s_1+1}^{s_2} \psi(x_j, y) &= h \int_{s_1+1}^{s_2} \psi(a + xh, y) dx + \frac{h}{2} [\psi(a + s_2h, y) + \psi(a + (s_1 + 1)h, y)] + \\ &\quad + h \int_{s_1+1}^{s_2} B_1(\{x\}) (\psi(a + xh, y))'_x dx \leq \\ &\leq \int_{a+(s_1+1)h}^{a+s_2h} \psi(z, y) dz + \frac{h}{2} [\psi(a + s_2h, y) + \psi(a + (s_1 + 1)h, y)] + \frac{h}{2} \int_{a+(s_1+1)h}^{a+s_2h} |\psi'_z(z, y)| dz = \\ &= \int_{a+(s_1+1)h}^{a+s_2h} \psi(z, y) dz + \frac{h}{2} [\psi(a + s_2h, y) + \psi(a + (s_1 + 1)h, y)] - \frac{h}{2} \int_{a+(s_1+1)h}^{a+s_2h} \psi'_z(z, y) dz = \\ &= \int_{a+(s_1+1)h}^{a+s_2h} \psi(z, y) dz + h\psi(a + (s_1 + 1)h, y) \leq \int_{a+(s_1+1)h}^{a+s_2h} \psi(z, y) dz + Mh. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$h \sum_{c_j \in D_s} |f''_{x^2}(c_j(y), y)| \leq \int_{a+(s_1+1)h}^{a+s_2h} \psi(z, y) dz + 2Mh. \quad (24)$$

Рассмотрим теперь интервал $D_{p(y)}$. Пусть $s_1 = \min\{j : c_j \in D_{p(y)}\}$, тогда

$$\begin{aligned} h \sum_{c_j \in D_s} |f''_{x^2}(c_j(y), y)| &\leq h \sum_{j=s_1}^{\infty} \psi(c_j(y), y) = h\psi(c_{s_1}(y), y) + h \sum_{j=s_1+1}^{\infty} \psi(c_j(y), y) \leq \\ &\leq Mh + h \sum_{j=s_1+1}^{\infty} \psi(x_j, y). \end{aligned}$$

Проводя точно такие же оценки, как и выше, заключаем, что в этом случае справедливо неравенство (24) с $s = p(y)$ и $s_2 = \infty$.

Рассмотрим теперь интервал I_s , на котором функция $\psi(x, y)$ не убывает. Пусть величины s_1 и s_2 определены так же, как и в (22), с заменой интервала D_s на I_s . Если $s_1 = s_2$, то справедлива оценка типа (23). Пусть $s_2 > s_1$, тогда

$$\begin{aligned} h \sum_{c_j \in I_s} |f''_{x^2}(c_j(y), y)| &= h \sum_{j=s_1}^{s_2} \psi(c_j(y), y) = h\psi(c_{s_2}(y), y) + h \sum_{j=s_1}^{s_2-1} \psi(c_j(y), y) \leq \\ &\leq Mh + h \sum_{j=s_1}^{s_2-1} \psi(x_{j+1}, y) = Mh + h \sum_{j=s_1+1}^{s_2} \psi(x_j, y). \end{aligned}$$

Аналогично тому, как это было сделано выше, выводим оценку

$$\sum_{j=s_1+1}^{s_2} \psi(x_j, y) \leq \int_{a+(s_1+1)h}^{a+s_2h} \psi(z, y) dz + h\psi(a + s_2h, y) \leq \int_{a+(s_1+1)h}^{a+s_2h} \psi(z, y) dz + Mh.$$

Откуда вновь получаем неравенство (24) с заменой интервала D_s на I_s .

Суммируя все полученные оценки и вспоминая (21), получаем

$$h \sum_{j=0}^{\infty} |f''_{x^2}(c_j(y), y)| \leq \int_a^{\infty} \psi(z, y) dz + 2Mh(m(y) + p(y)) + O(1).$$

Поскольку функция $\psi(x, y)$ имеет лишь конечное число промежутков монотонности при фиксированном y , и это число ограничено величиной $\hat{N}_{mon}$, а также с учетом ограниченности числа особых точек при $y \in [b, \infty)$, мы можем утверждать, что сумма $m(y) + p(y)$ ограничена на интервале $y \in [b, \infty)$. Откуда

$$h \sum_{j=0}^{\infty} |f''_{x^2}(c_j(y), y)| = O(1), \quad 0 < h \ll 1,$$

а следовательно, сумма ряда (20) есть величина порядка $O(h^2)$ при $h \rightarrow 0$.

Лемма доказана. □

Замечание. В условии 5⁰ леммы 2 можно требовать, чтобы

$$|f''_{x^2}(x, y)| \leq \sum_{i=1}^k \psi_i(x, y),$$

а функции $\psi_i(x, y)$, $i = 1, \dots, k$ удовлетворяли условиям а) – в).

Из лемм 1 и 2 вытекает следующий результат.

Следствие. При условии выполнения всех требований лемм 1 и 2 имеет место следующее асимптотическое представление:

$$I(y) = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (f(x_j, y) + f(x_{j+1}, y)) \exp\{ig(x_j, y)\} + \\ + i \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (g(x_{j+1}, y) - g(x_j, y)) f(x_j, y) \exp\{ig(x_j, y)\} + O(h^2), \quad h \rightarrow 0. \quad (25)$$

Естественно, в ходе численного эксперимента мы не имеем возможности вычислять бесконечные ряды, фигурирующие в формуле (25), ограничиваясь лишь вычислением их частичных сумм. В этой связи возникает вопрос об оценке отброшенного «хвоста». Обозначим

$$S_N = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^N (f(x_j, y) + f(x_{j+1}, y)) \exp\{ig(x_j, y)\} + \\ + i \frac{h}{2} \sum_{j=0}^N (g(x_{j+1}, y) - g(x_j, y)) f(x_j, y) \exp\{ig(x_j, y)\}. \quad (26)$$

Используя формулу (12), а также оценки, полученные нами в ходе доказательства леммы 1, легко установить, что

$$R(N, h) = S_{\infty} - S_{N-1} = \int_{a+Nh}^{\infty} \varphi(x, y) dx + h \left[O\left(\varphi(a + Nh, y)\right) + \right. \\ \left. + O\left(\int_{a+Nh}^{\infty} |\varphi'_x(x, y)| dx\right) + O\left(\int_{a+Nh}^{\infty} |f'_x(x, y)| dx\right) \right] \quad (27)$$

при $h \rightarrow 0$ и $Nh \rightarrow \infty$.

Таким образом, справедливо следующее асимптотическое представление:

$$I(y) = S_{N-1} + R(N, h) + O(h^2), \quad h \rightarrow 0, \quad Nh \rightarrow \infty, \quad (28)$$

где S_N и $R(N, h)$ определяются соответственно формулами (26) и (27).

3. Обоснование метода. Используем изложенную в предыдущем разделе методику для вычисления значений функции $E_n(y)$ и определим величину возникающей ошибки. Для упрощения выкладок мы будем считать, что исследуемые интегралы имеют вид

$$E_{n+1}(y) = \int_{h_n}^{\infty} \frac{E_n(x)}{r_n^{3/2}(x, y)} \exp\{ir_n(x, y)\} dx, \quad E_1(y) = \frac{\exp\{ir_0(y)\}}{r_0(y)}, \quad n = 1, 2, \dots, L, \quad (29)$$

а следовательно,

$$f(x, y) = \frac{E_n(x)}{r_n^{3/2}(x, y)}, \quad g(x, y) = r_n(x, y), \quad n = 1, \dots, L, \quad (30)$$

где функции $r_n(x, y)$ и $r_0(y)$ определяются согласно формулам (2). Чтобы убедиться в том, что функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ на каждом шаге удовлетворяют всем требованиям леммы 1 и леммы 2, нам потребуются несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3. *Функция $E_k(y)$ непрерывна при $y \in [h_k, \infty)$, и справедлива следующая асимптотическая оценка:*

$$E_k(y) = O(y^{-1}), \quad y \rightarrow \infty, \quad k = 1, \dots, L+1. \quad (31)$$

Доказательство. Доказательство будем проводить по индукции. Непрерывность и справедливость оценки (31) для функции $E_1(y)$ очевидна. Предположим, что функции $E_k(y)$ непрерывны для $k \leq n$ и для каждой из этих функций справедлива оценка (31). Докажем сначала непрерывность функции $E_{n+1}(y)$ на множестве $[h_{n+1}, \infty)$. Очевидно, что подынтегральная функция в (1) непрерывна на множестве $[h_n, \infty) \times [h_{n+1}, \infty)$, поэтому для доказательства непрерывности функции $E_{n+1}(y)$ нам достаточно показать, что интеграл

$$\int_{h_n}^{\infty} \frac{E_n(x)}{r_n^{3/2}(x, y)} \exp\{ir_n(x, y)\} dx \quad (32)$$

сходится равномерно по $y \in [h_{n+1}, \infty)$. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\alpha = \alpha(\varepsilon) \geq h_n$, не зависящее от y , что

$$\left| \int_{\alpha}^{\infty} \frac{E_n(x)}{r_n^{3/2}(x, y)} \exp\{ir_n(x, y)\} dx \right| < \varepsilon. \quad (33)$$

Имеем

$$\left| \int_{\alpha}^{\infty} \frac{E_n(x)}{r_n^{3/2}(x, y)} \exp\{ir_n(x, y)\} dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\infty} \frac{|E_n(x)|}{r_n^{3/2}(x, y)} dx \leq M \int_{\alpha}^{\infty} \frac{dx}{x(d_n^2 + (x - y)^2)^{3/4}}. \quad (34)$$

Здесь мы воспользовались предположением индукции о справедливости оценки (31) для функции $E_n(x)$. Покажем, что интеграл в правой части этой цепочки неравенств сходится равномерно по $y \in [h_{n+1}, \infty)$. Воспользуемся признаком Абеля – Дирихле (см. [5]) применительно к несобственным интегралам, зависящим от параметра. Очевидно, что функция x^{-1} монотонно стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$, поэтому необходимо лишь проверить, что

$$\int_{\alpha}^t \frac{dx}{(d_n^2 + (x - y)^2)^{3/4}} \leq M, \quad t \geq \alpha, \quad h_{n+1} \leq y < \infty.$$

Последнее неравенство вытекает из следующих оценок:

$$\int_{\alpha}^t \frac{dx}{(d_n^2 + (x - y)^2)^{3/4}} = \int_{\alpha-y}^{t-y} \frac{dz}{(d_n^2 + z^2)^{3/4}} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(d_n^2 + z^2)^{3/4}}.$$

Сходимость интеграла в правой части очевидна. В силу равномерной сходимости интеграла в правой части (34) соответствующее выражение может быть сделано сколь угодно малым при условии, что α достаточно велико. Таким образом неравенство (33) доказано.

Получим теперь оценку (31) для функции $E_{n+1}(y)$. Представим исходный интеграл (32) в следующем виде:

$$I_1(y) + I_2(y) = \int_{h_n}^y \frac{E_n(x)}{r_n^{3/2}(x, y)} \exp\{ir_n(x, y)\} dx + \int_y^\infty \frac{E_n(x)}{r_n^{3/2}(x, y)} \exp\{ir_n(x, y)\} dx.$$

Имеем

$$\begin{aligned} |I_2(y)| &\leq M \int_y^\infty \frac{dx}{x(d_n^2 + (x - y)^2)^{3/4}} \leq \frac{M}{y} \int_y^\infty \frac{dx}{(d_n^2 + (x - y)^2)^{3/4}} = \\ &= \frac{M}{y} \int_0^\infty \frac{dz}{(d_n^2 + z^2)^{3/4}} = O(y^{-1}). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} |I_1(y)| &\leq M \int_{h_n}^y \frac{dx}{x(d_n^2 + (x - y)^2)^{3/4}} = M \int_{h_n}^{y-\delta} \frac{dx}{x(d_n^2 + (x - y)^2)^{3/4}} + \\ &+ M \int_{y-\delta}^y \frac{dx}{x(d_n^2 + (x - y)^2)^{3/4}} = MI_{1,1}(y) + MI_{1,2}(y). \end{aligned}$$

Здесь произвольное $\delta > 0$ выбрано так, что $h_n < y - \delta < y$. Оценим сначала интеграл $I_{1,2}(y)$:

$$I_{1,2}(y) \leq \frac{1}{d_n^{3/2}} \int_{y-\delta}^y \frac{dx}{x} = \frac{1}{d_n^{3/2}} (\ln y - \ln(y - \delta)) = \frac{1}{d_n^{3/2}} \left(\frac{\delta}{y} + O(y^{-2}) \right) = O(y^{-1}), \quad y \rightarrow \infty.$$

Несколько более трудоемко оценивается интеграл $I_{1,1}(y)$:

$$I_{1,1}(y) \leq \int_{h_n}^{y-\delta} \frac{dx}{x|x - y|^{3/2}} = \int_{h_n}^{y-\delta} \frac{dx}{x(y - x)^{3/2}} = \frac{1}{y^{3/2}} \int_{h_n}^{y-\delta} \frac{dx}{x(1 - (x/y))^{3/2}} = \frac{1}{y^{3/2}} \int_{\frac{h_n}{y}}^{1 - \frac{\delta}{y}} \frac{dz}{z(1 - z)^{3/2}}.$$

Выберем произвольное ε так, что $0 < \varepsilon < 1 - \varepsilon < 1$. Тогда при $y \gg 1$

$$\frac{1}{y^{3/2}} \int_{\frac{h_n}{y}}^{1 - \frac{\delta}{y}} \frac{dz}{z(1 - z)^{3/2}} = \frac{1}{y^{3/2}} \left(\int_{\frac{h_n}{y}}^{\varepsilon} \frac{dz}{z(1 - z)^{3/2}} + \int_{\varepsilon}^{1 - \varepsilon} \frac{dz}{z(1 - z)^{3/2}} + \int_{1 - \varepsilon}^{1 - \frac{\delta}{y}} \frac{dz}{z(1 - z)^{3/2}} \right). \quad (35)$$

Оценим каждое из слагаемых в круглых скобках.

$$\int_{\frac{h_n}{y}}^{\varepsilon} \frac{dz}{z(1-z)^{3/2}} \leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^{3/2}} \int_{\frac{h_n}{y}}^{\varepsilon} \frac{dz}{z} = \frac{1}{(1-\varepsilon)^{3/2}} \left(\ln \varepsilon - \ln \frac{h_n}{y} \right) = O(\ln y), \quad y \rightarrow \infty.$$

Далее,

$$\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{dz}{z(1-z)^{3/2}} = O(1).$$

Наконец,

$$\int_{1-\varepsilon}^{1-\frac{\delta}{y}} \frac{dz}{z(1-z)^{3/2}} \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \int_{1-\varepsilon}^{1-\frac{\delta}{y}} \frac{dz}{(1-z)^{3/2}} = \frac{2}{1-\varepsilon} \left[\left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/2} - \varepsilon^{-1/2} \right] = O(y^{1/2}), \quad y \rightarrow \infty.$$

Используя полученные оценки в (35), заключаем, что

$$I_{1,1}(y) = O(y^{-1}), \quad y \rightarrow \infty.$$

Таким образом, справедливость асимптотической оценки (31) для функции $E_{n+1}(y)$ обоснована.

Лемма доказана. $\square$

Лемма 4. Функция $E_k(y)$ принадлежит классу $C_2[h_k, \infty)$, и справедливы следующие асимптотические оценки:

$$E'_k(y) = O(y^{-1}), \quad E''_k(y) = O(y^{-1}), \quad y \rightarrow \infty, \quad k = 1, \dots, L+1. \quad (36)$$

Доказательство. Доказательство вновь проводится по индукции. Докажем первую из асимптотических оценок (36). Вторая доказывается по аналогии. При $k = 1$ имеем

$$E'_1(y) = \frac{i(y-y_0) \exp\{ir_0(y)\}}{d_0^2 + (y_0 - y)^2} - \frac{i(y-y_0) \exp\{ir_0(y)\}}{(d_0^2 + (y_0 - y)^2)^{3/2}}.$$

Отсюда

$$|E'_1(y)| \leq \frac{|y-y_0|}{d_0^2 + (y-y_0)^2} + \frac{|y-y_0|}{(d_0^2 + (y-y_0)^2)^{3/2}} = O(y^{-1}), \quad y \rightarrow \infty.$$

Далее предположим, что оценка (36) верна для $k \leq n$. Докажем, что она справедлива и при $k = n+1$. Продифференцируем выражение (29) по параметру y . Получаем

$$\begin{aligned} E'_{n+1}(y) &= \int_{h_n}^{\infty} E_n(x) \left(\frac{\exp\{ir_n(x, y)\}}{r_n^{3/2}(x, y)} \right)'_y dx = \frac{3}{2} \int_{h_n}^{\infty} E_n(x) \frac{(x-y) \exp\{ir_n(x, y)\}}{r_n^{7/2}(x, y)} dx + \\ &\quad + i \int_{h_n}^{\infty} E_n(x) \frac{(r_n(x, y))'_y \exp\{ir_n(x, y)\}}{r_n^{3/2}(x, y)} dx. \end{aligned} \quad (37)$$

Для обоснования законности дифференцирования под знаком интеграла необходимо установить равномерную сходимость интегралов в (37). Заметим сперва, что

$$\left| (r_n(x, y))'_y \right| = \frac{|y - x|}{\sqrt{d_n^2 + (x - y)^2}} \leq \max_{z \geq 0} \frac{z}{\sqrt{d_n^2 + z^2}} \leq M.$$

Откуда

$$\left| i \int_{h_n}^{\infty} E_n(x) \frac{(r_n(x, y))'_y \exp\{ir_n(x, y)\}}{r_n^{3/2}(x, y)} dx \right| \leq M \int_{h_n}^{\infty} \frac{|E_n(x)|}{r_n^{3/2}(x, y)} dx \leq M^2 \int_{h_n}^{\infty} \frac{dx}{x(d_n^2 + (x - y)^2)^{3/4}}.$$

Равномерная сходимость интеграла в правой части этой цепочки неравенств была доказана в лемме 3. Кроме того, из той же леммы следует, что

$$\int_{h_n}^{\infty} E_n(x) \frac{(r_n(x, y))'_y \exp\{ir_n(x, y)\}}{r_n^{3/2}(x, y)} dx = O(y^{-1}), \quad y \rightarrow \infty.$$

Далее

$$\left| \int_{h_n}^{\infty} E_n(x) \frac{(x - y) \exp\{ir_n(x, y)\}}{r_n^{7/2}(x, y)} dx \right| \leq M \int_{h_n}^{\infty} \frac{|x - y| dx}{x(d_n^2 + (x - y)^2)^{7/4}}.$$

Для доказательства равномерной сходимости интеграла в правой части этого неравенства достаточно воспользоваться признаком Абеля – Дирихле. Законность дифференцирования под знаком интеграла, следовательно, нами обоснована. Покажем теперь, что

$$\int_{h_n}^{\infty} \frac{|x - y| dx}{x(d_n^2 + (x - y)^2)^{7/4}} = O(y^{-1}). \quad (38)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_{h_n}^{\infty} \frac{|x - y| dx}{x(d_n^2 + (x - y)^2)^{7/4}} &= \int_{h_n}^{y-\delta} \frac{|x - y| dx}{x(d_n^2 + (x - y)^2)^{7/4}} + \int_{y-\delta}^y \frac{|x - y| dx}{x(d_n^2 + (x - y)^2)^{7/4}} + \\ &\quad + \int_y^{\infty} \frac{|x - y| dx}{x(d_n^2 + (x - y)^2)^{7/4}}, \end{aligned}$$

где $\delta > 1$ выбрано так, что $h_n < y - \delta < y$. Оценим каждый из интегралов в выражении выше:

$$\int_y^{\infty} \frac{|x - y| dx}{x(d_n^2 + (x - y)^2)^{7/4}} \leq \frac{1}{y} \int_y^{\infty} \frac{(x - y) dx}{(d_n^2 + (x - y)^2)^{7/4}} = \frac{1}{y} \int_0^{\infty} \frac{z dz}{(d_n^2 + z^2)^{7/4}} = O(y^{-1});$$

$$\int_{y-\delta}^y \frac{|x-y|dx}{x(d_n^2 + (x-y)^2)^{7/4}} \leq \frac{\delta}{d_n^{7/2}} \int_{y-\delta}^y \frac{dx}{x} = \frac{\delta}{d_n^{7/2}} (\ln y - \ln(y-\delta)) = O(y^{-1});$$

$$\int_{h_n}^{y-\delta} \frac{|x-y|dx}{x(d_n^2 + (x-y)^2)^{7/4}} \leq \int_{h_n}^{y-\delta} \frac{dx}{x(y-x)^{5/2}} \leq \int_{h_n}^{y-\delta} \frac{dx}{x(y-x)^{3/2}} = O(y^{-1}), \quad y \rightarrow \infty.$$

Оценка для последнего интеграла была получена в лемме 3. Таким образом, справедливость (38) установлена, а вместе с тем установлена и справедливость первой из оценок (36). Асимптотическая оценка для $E_k''(y)$, как уже было отмечено, устанавливается по аналогии. Проверку этого факта мы оставляем читателю.

Лемма доказана. $\square$

Проверим теперь, что все требования лемм 1 и 2 выполнены. Напомним, что функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ задаются равенствами (30). Имеем

$$|f(x, y)| = \frac{|E_n(x)|}{r_n^{3/2}(x, y)} \leq \frac{M}{xr_n^{3/2}(x, y)} = \varphi(x, y). \quad (39)$$

Из леммы 3 следует также, что

$$\int_{h_n}^{\infty} \varphi(x, y) dx = O(y^{-1}), \quad y \rightarrow \infty. \quad (40)$$

Откуда, с учетом непрерывности интеграла по параметру y , следует справедливость первого из неравенств (6) при $y \in [h_{n+1}, \infty)$. Далее

$$\varphi'_x(x, y) = -\frac{M}{x^2 r_n^{3/2}(x, y)} - \frac{3M(x-y)}{2x(d_n^2 + (x-y)^2)^{7/4}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{h_n}^{\infty} |\varphi'_x(x, y)| dx &\leq M \int_{h_n}^{\infty} \frac{dx}{x^2 r_n^{3/2}(x, y)} + \frac{3M}{2} \int_{h_n}^{\infty} \frac{|x-y|dx}{x(d_n^2 + (x-y)^2)^{7/4}} \leq \\ &\leq \frac{M}{d_n^{3/2}} \int_{h_n}^{\infty} \frac{dx}{x^2} + O(y^{-1}) = O(1), \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь мы воспользовались оценкой (38), полученной в ходе доказательства леммы 4. Таким образом, выполнено и второе неравенство в (6). Перейдем к проверке второго требования леммы 1. Имеем

$$f'_x(x, y) = \frac{E'_n(x)}{(d_n^2 + (x-y)^2)^{3/4}} - \frac{3}{2} \frac{(x-y)E_n(x)}{(d_n^2 + (x-y)^2)^{7/4}}. \quad (42)$$

Откуда, в силу лемм 3 и 4,

$$\int_{h_n}^{\infty} |f'_x(x, y)| dx \leq M \int_{h_n}^{\infty} \frac{dx}{x(d_n^2 + (x - y)^2)^{3/4}} + \frac{3M}{2} \int_{h_n}^{\infty} \frac{|x - y| dx}{x(d_n^2 + (x - y)^2)^{7/4}} = O(y^{-1}). \quad (43)$$

Следовательно, требование 2⁰ леммы 1 также выполнено. Наконец,

$$|g'_x(x, y)| = \frac{|x - y|}{\sqrt{d_n^2 + (x - y)^2}} \leq \max_{z \geq 0} \frac{z}{\sqrt{d_n^2 + z^2}} \leq M, \quad x \in [h_n, \infty), \quad y \in [h_{n+1}, \infty),$$

и все требования леммы 1 нами проверены.

Перейдем теперь к проверке условий леммы 2. Имеем

$$|g''_{x^2}(x, y)| = \left| \frac{1}{\sqrt{d_n^2 + (x - y)^2}} - \frac{(x - y)^2}{(d_n^2 + (x - y)^2)^{3/2}} \right| \leq \max_{z \geq 0} \frac{1}{\sqrt{d_n^2 + z^2}} + \max_{z \geq 0} \frac{z^2}{(d_n^2 + z^2)^{3/2}} \leq M.$$

Далее,

$$f''_{x^2}(x, y) = \frac{E''_n(x)}{(d_n^2 + (x - y)^2)^{3/4}} - \frac{3(x - y)E'_n(x)}{(d_n^2 + (x - y)^2)^{7/4}} - \frac{3}{2} \frac{E_n(x)}{(d_n^2 + (x - y)^2)^{7/4}} + \frac{21}{4} \frac{(x - y)^2 E_n(x)}{(d_n^2 + (x - y)^2)^{11/4}}.$$

Откуда, используя леммы 3 и 4, заключаем, что

$$|f''_{x^2}(x, y)| \leq \frac{M}{x(d_n^2 + (x - y)^2)^{3/4}} + \frac{M|x - y|}{x(d_n^2 + (x - y)^2)^{7/4}} + \frac{M}{x(d_n^2 + (x - y)^2)^{7/4}} + \frac{M(x - y)^2}{x(d_n^2 + (x - y)^2)^{11/4}} = \psi_1(x, y) + \psi_2(x, y) + \psi_3(x, y) + \psi_4(x, y).$$

Мы не будем останавливаться на проверке того факта, что функции $\psi_i(x, y)$ ($i = 1, \dots, 4$) удовлетворяют условию 5⁰ леммы 2. С учетом доказанных нами лемм 3 и 4 это делается довольно просто.

Оценим теперь остаток $R(h, n)$, возникающий в результате замены бесконечного ряда конечной суммой. Напомним, что этот остаток определяется асимптотической формулой (27). Вспоминая (2), (39), получаем

$$\varphi(h_n + Nh, y) = \frac{M}{(h_n + Nh)r_n^{3/2}(h_n + Nh, y)} \leq \frac{M}{d_n^{3/2}} \frac{1}{Nh} = O\left(\frac{1}{Nh}\right), \quad Nh \rightarrow \infty.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_{h_n+Nh}^{\infty} \varphi(x, y) dx &\leq \frac{M}{Nh} \int_{h_n+Nh}^{\infty} \frac{dx}{r_n^{3/2}(x, y)} = \frac{M}{Nh} \int_{h_n+Nh-y}^{\infty} \frac{dz}{(d_n^2 + z^2)^{3/4}} \leq \\ &\leq \frac{M}{Nh} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(d_n^2 + z^2)^{3/4}} = O\left(\frac{1}{Nh}\right), \quad Nh \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Кроме того, из оценки (41) вытекает, что

$$\begin{aligned} \int_{h_n+Nh}^{\infty} |\varphi'_x(x, y)| dx &\leq \frac{M}{(Nh)^2} \int_{h_n+Nh}^{\infty} \frac{dx}{r_n^{3/2}(x, y)} + \frac{3M}{2Nh} \int_{h_n+Nh}^{\infty} \frac{|x-y|dx}{r_n^{7/2}(x, y)} \leq \\ &\leq \frac{M}{(Nh)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(d_n^2 + z^2)^{3/4}} + \frac{3M}{2Nh} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{zdz}{(d_n^2 + z^2)^{7/4}} = O\left(\frac{1}{Nh}\right), \quad Nh \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Наконец, из (42) и (43) следует, что

$$\begin{aligned} \int_{h_n+Nh}^{\infty} |f'_x(x, y)| dx &\leq \frac{M}{Nh} \int_{h_n+Nh}^{\infty} \frac{dx}{r_n^{3/2}(x, y)} + \frac{3M}{2Nh} \int_{h_n+Nh}^{\infty} \frac{|x-y|dx}{r_n^{7/2}(x, y)} \leq \\ &\leq \frac{M}{Nh} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(d_n^2 + z^2)^{3/4}} + \frac{3M}{2Nh} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{zdz}{(d_n^2 + z^2)^{7/4}} = O\left(\frac{1}{Nh}\right), \quad Nh \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно получаем, что

$$R(h, N) = O\left(\frac{1}{Nh}\right) + h O\left(\frac{1}{Nh}\right) = O\left(\frac{1}{Nh}\right), \quad h \rightarrow 0, \quad Nh \rightarrow \infty. \quad (44)$$

Следовательно, согласно (28), имеем

$$I(y) = S_{N-1} + O\left(\frac{1}{Nh}\right) + O(h^2), \quad h \rightarrow 0, \quad Nh \rightarrow \infty, \quad (45)$$

где S_N определяется формулой (26).

Все наши рассуждения, касающиеся ошибки вычисления значений функции $E_k(y)$, были проведены в предположении того, что нам явно известны функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$, находящиеся под интегралом в (3). В нашей ситуации это не совсем так (см. формулы (1) и (29)). Точнее, из (30) следует, что функция $g(x, y)$, действительно, явно задана, а вот функция $f(x, y)$ нам известна лишь на первом шаге ($n = 1$). Уже при вычислении значений функции $E_3(y)$ мы сталкиваемся с той проблемой, что значения функции $E_2(x)$ были вычислены с ошибкой, определяемой равенством (45). Итак, возникает задача исследования порядка этой ошибки.

При вычислении значений функции $E_2(y)$ мы получили ошибку, определяемую равенством (45),

$$E_2(y) = E_2(h, N, y) + O\left(\frac{1}{Nh}\right) + O(h^2),$$

где $E_2(h, N, y)$ суть S_{N-1} . При вычислении $E_3(y)$ мы используем функцию

$$f(h, N, x, y) = \frac{E_2(h, N, x)}{r_2^{3/2}(x, y)}$$

вместо $f(x, y)$, задаваемой формулой (30). Откуда

$$f(h, N, x, y) = \frac{E_2(x)}{r_2^{3/2}(x, y)} + \frac{1}{r_2^{3/2}(x, y)} \left[O\left(\frac{1}{Nh}\right) + O(h^2) \right] = f(x, y) + O\left(\frac{1}{Nh}\right) + O(h^2). \quad (46)$$

Итак, для получения значений функции $E_3(y)$ мы вычисляем выражение (26), где вместо $f(x, y)$ используется функция $f(h, N, x, y)$. Вычисленная таким образом величина $S(N, h)$ будет естественно отличаться от величины S_N , определяемой равенством (26). Используя теперь лемму 1 и, в частности, абсолютную сходимость рядов (10), а также равенство (46), мы можем заключить, что

$$S(N, h) = S_N + O\left(\frac{1}{Nh}\right) + O(h^2), \quad h \rightarrow 0, \quad Nh \rightarrow \infty.$$

Следовательно, значения функции $E_3(y)$ будут вычислены с ошибкой, описываемой формулой (45). Очевидно, что аналогичный порядок ошибки мы будем получать при вычислении значений любой функции $E_{n+1}(y)$, $n = 1, \dots, L$.

Полученный нами результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. Пусть значения функции $E_{n+1}(y)$ ($n = 1, \dots, L$), заданной равенством (1), приближаются значениями величины S_{N-1} , вычисленными по формуле (26), где

$$f(x, y) = \frac{d_n}{\sqrt{\lambda}} \exp\left\{i\frac{\pi}{4}\right\} \frac{E_n(x)}{r_n^{3/2}(x, y)}, \quad g(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda} r_n(x, y), \quad x_j = h_n + jh,$$

$j = 0, 1, 2, \dots, N$, а функция $r_n(x, y)$ определена в (2). Тогда для всех $n = 1, \dots, L$

$$E_{n+1}(y) = S_{N-1} + O\left(\frac{1}{Nh}\right) + O(h^2), \quad h \rightarrow 0, \quad Nh \rightarrow \infty. \quad (47)$$

В завершение этой работы приведем результаты численного эксперимента. На рисунках 1 и 2 представлены графики функций $|E_2(y)|$ и $|E_8(y)|$ при различных значениях N и h . Во всех случаях выбирались одинаковые значения для параметров h_n (нижний предел интегрирования в (1)). Кроме того, для возможности сравнения асимптотического поведения функций на рисунках построен график функции y^{-1} .

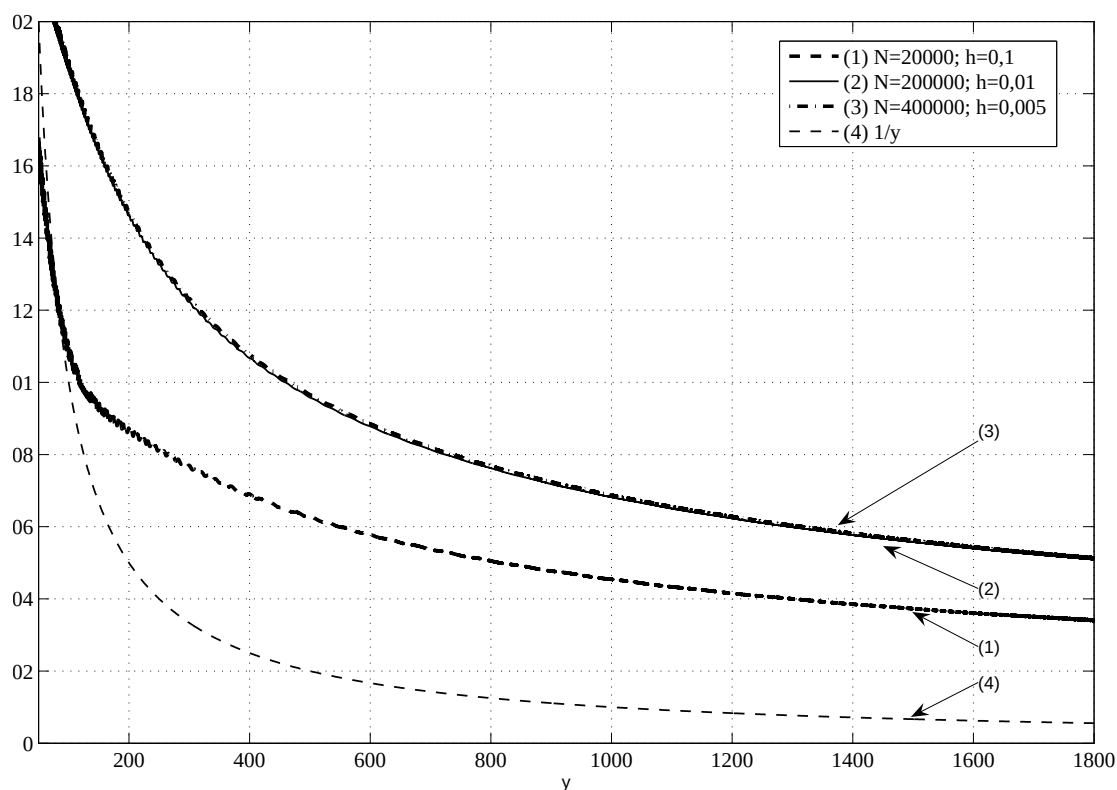


Рис. 1. График функции $|E_2(y)|$ при различных значениях N и h .

Список литературы

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973.
2. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979.
3. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1959.
4. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. М.: Мир, 1998.
5. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Продолжение курса. М.: Изд-во МГУ, 1987.
6. Неганов В.А., Осипов О.В., Раевский С.Б., Яровой Г.П. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Радио и связь, 2005.
7. Хёйл Х., Мауэ А., Вестфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964.

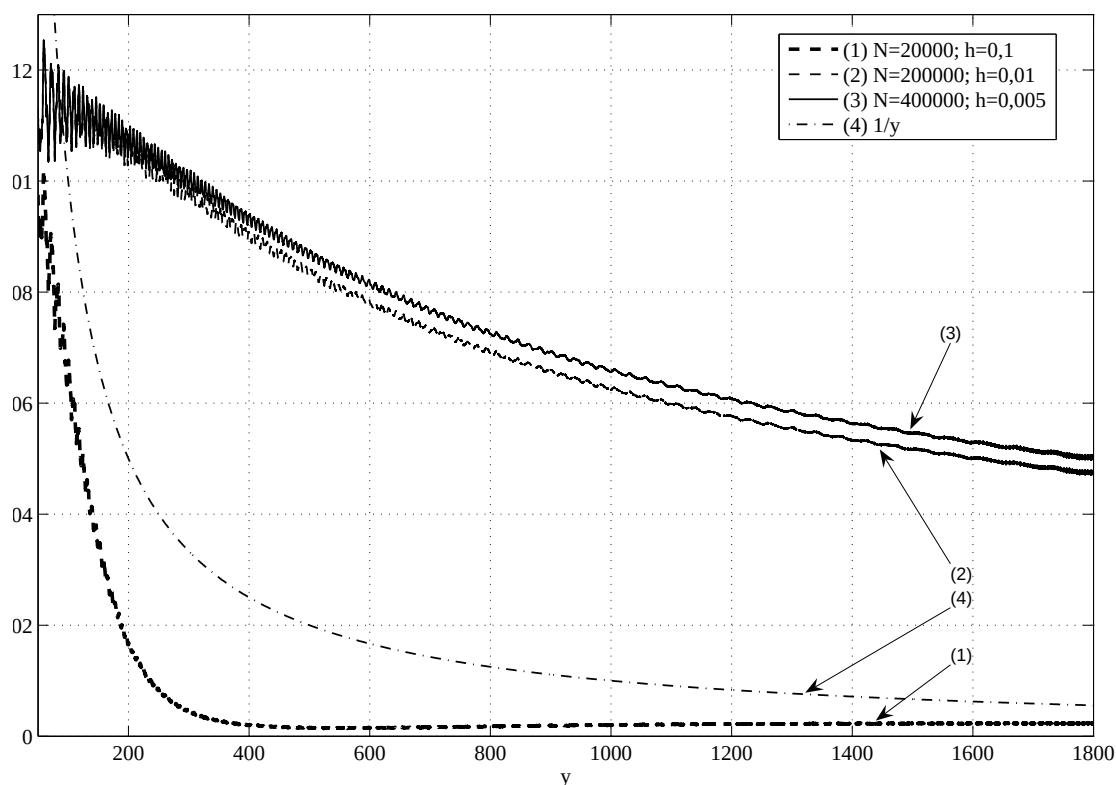


Рис. 2. График функции $|E_8(y)|$ при различных значениях N и h .

Mathematical justification of one numerical experiment

Dymov A.V., Nesterov P.N.

Keywords: propagation of radio waves, numerical experiment, error estimate.

We give the mathematical justification of one numerical experiment dealing with the propagation of radio waves through a complicated relief environment.

Сведения об авторах:

Дымов Андрей Владимирович,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ведущий инженер;

Нестеров Павел Николаевич,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,

канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель