

УДК 517.51+514.17

## Пространственно-неоднородные периодические решения в распределенном уравнении Хатчинсона

Глызин Д.С., Кащенко С.А., Полстянов А.С.<sup>1</sup>

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова*

*e-mail: glyzin@gmail.com, kasch@uniyar.ac.ru, pol\_art@rambler.ru*

*получена 12 ноября 2009*

**Ключевые слова:** асимптотические методы, распределенное уравнение Хатчинсона, метод шагов

Получены асимптотики пространственно-неоднородных периодических решений сложно-пространственно распределенного уравнения Хатчинсона с периодическими краевыми условиями. Показано, что данные режимы наблюдаются в численном эксперименте.

### 1. Постановка задачи. Уравнение Хатчинсона

$$\frac{dN}{dt} = r[1 - N(t - h)]N, \quad (1)$$

где параметры  $r$  и  $h$ , а также сами решения  $N(t)$  положительны, возникает во многих прикладных задачах [1-4]. Асимптотическими методами уравнение (1) исследовалось в [5]. Известно, что при условии

$$rh > \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

это уравнение имеет медленно осциллирующее периодическое решение  $N_0(t)$ . Термин «медленно осциллирующее» означает, что расстояние по времени между соседними максимумами  $N_0(t)$  больше величины запаздывания  $h$ . В том случае, когда величина  $\lambda = rh - \frac{\pi}{2}$  ( $\lambda > 0$ ) достаточно мала, периодическое решение  $N_0(t)$  экспоненциально орбитально устойчиво и справедлива асимптотическая (при  $\lambda \rightarrow 0$ ) формула

$$N_0(t) = 1 + \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{3\pi - 2}} \sqrt{\lambda} \cos \left( t \left( \frac{\pi}{2h} - \frac{2}{h(3\pi - 2)} \lambda + O(\lambda^2) \right) \right) + O(\lambda). \quad (3)$$

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (государственный контракт № 02.740.11.0197).

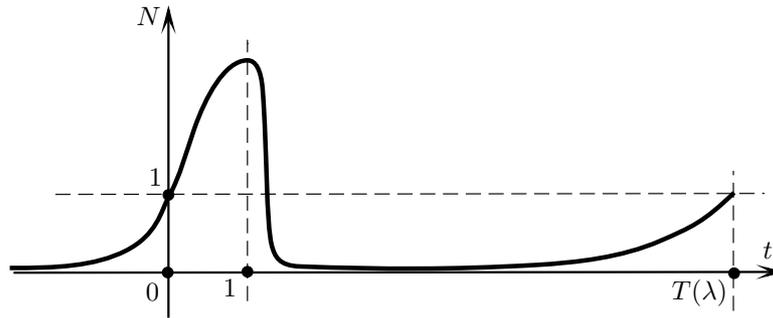


Рис. 1.

Если же значение  $\lambda$  достаточно велико, то решение  $N_0(t)$  тоже экспоненциально орбитально устойчиво [5], и имеет место асимптотическая (при  $\lambda \rightarrow \infty$ ) формула

$$N_0(t) = \exp [\lambda \tau - \lambda^{-1} \exp(\lambda(\tau - 1))(1 + o(1))], \quad (4)$$

в которой  $t$  и  $\tau$  связаны соотношениями  $t = h\tau$  и  $\tau \in [-T + 2, 2]$ , где через  $T = T(\lambda)$  обозначен период функции  $N_0(t)$ . Для  $T(\lambda)$  имеем формулу

$$T(\lambda) = \frac{h}{\lambda} \exp(\lambda) \cdot (1 + o(1)). \quad (5)$$

Примерный вид  $N_0(t)$  изображен на рис. 1.

Отметим ещё, что

$$\max_t N_0(t) = \exp \lambda(1 + o(1)), \quad \min_t N_0(t) = \exp(-\exp \lambda(1 + o(1))).$$

По-видимому, и это подтверждают результаты численного анализа, функция  $N_0(t)$  при всех  $\lambda > 0$  является единственным устойчивым периодическим решением уравнения (1).

В настоящей работе рассматривается далее сложно-пространственно распределенное уравнение Хатчинсона

$$\frac{\partial N}{\partial t} = r[1 - N_{t-h}]N + \gamma \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F_\alpha(s)N(t, x + s)ds - N \right] + d \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \quad (6)$$

с периодическими краевыми условиями

$$N(t, x + 2\pi) \equiv N(t, x). \quad (7)$$

Параметры  $\gamma$  и  $d$  здесь неотрицательны, а функция  $F_\alpha(x)$  задана формулой (рис. 2)

$$F_\alpha(x) = \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}} \exp[-\sigma(x - \alpha)^2],$$

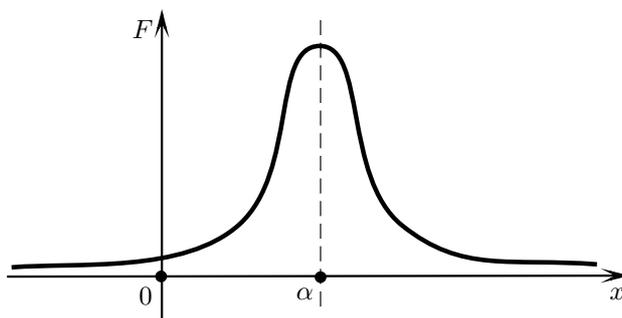


Рис. 2.

где  $\sigma > 0$  и  $0 \leq \alpha < 2\pi$ . Отметим, что выполнено условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{\alpha}(x) dx = 1.$$

Основное предположение, при котором будет исследоваться краевая задача (6), (7), состоит в том, что выполнено условие (2), и параметры  $\sigma^{-1}$  и  $d$ , характеризующие диффузию, являются достаточно малыми. Удобно ввести малый положительный параметр  $\varepsilon$ :  $0 < \varepsilon \ll 1$ . В связи со сказанным выше, положим

$$\sigma^{-1} = \varepsilon \sigma_0^{-1}, \quad d = \varepsilon d_0. \quad (8)$$

Приводимые ниже утверждения аналитического характера тесно примыкают к результатам работы [6] и существенно их используют. Отметим ещё, что в [7] приведен результат об устойчивости  $N_0(t)$  при условии, когда в (1)  $\lambda \gg 1$ ,  $\gamma = 0$  и  $\varepsilon = \exp(-\lambda\delta)$ , ( $\delta > 0$ ). В работе [6] для конечно-разностных аппроксимаций оператора диффузии  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  асимптотическими методами, а в [8] — численными, получены результаты о существовании множества сложных аттракторов (тоже при  $\lambda \gg 1$ ,  $\gamma = 0$  и  $\varepsilon = \exp(-\lambda\sigma)$ ).

**2. Асимптотический анализ периодических решений краевой задачи (6),(7).** Прежде всего отметим, что рассматриваемая краевая задача имеет периодическое решение  $N_0(t)$ . Рассмотрим множество  $2\pi$ -периодических по  $x$  функций ( $T$ -период  $N_0(t)$ )

$$N_k(t, x) = N_0\left(t + \frac{kT}{2\pi}x + \varphi(x)\right), \quad (9)$$

где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , а  $\varphi(x)$  — достаточно гладкая и  $2\pi$ -периодическая. Ниже будем дополнительно предполагать, что для фигурирующего в определении  $F_{\alpha}(x)$  параметра  $\alpha$  верно представление  $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon a_0$ , а параметр  $\alpha_0$  рационально соизмерим с  $2\pi$ , т.е. найдутся такие целые взаимно простые числа  $m_1$  и  $m_2$  ( $m_i \neq 0$ ), что

$$\alpha_0 = \frac{m_1}{m_2} 2\pi. \quad (10)$$

Очевидно, что все функции (9) при  $k = \pm m_2, \pm 2m_2, \dots$  являются решениями уравнения Хатчинсона (1). Относительно краевой задачи (6), (7) можно утверждать, что функции (9) являются асимптотическими по невязке решениями с точностью до  $O(\varepsilon)$ , т.е.

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} - r[1 - N_k(t - h, x)]N_k - \gamma \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F_\alpha(s)N_k(t, x + s)ds - N_k \right] - \varepsilon d_0 \frac{\partial^2 N_k}{\partial x^2} = \Phi(t, x, \varepsilon)$$

и для некоторой универсальной постоянной  $c_k$  имеет место оценка

$$|\Phi(t, x, \varepsilon)| \leq c_k \varepsilon.$$

**Теорема.** Для каждого  $k = \pm m_2, \pm 2m_2, \dots$  и каждого  $n = 1, 2, \dots$  найдется такая функция параметра  $\varepsilon$   $g_{kn}(\varepsilon) = g_{k0} + \varepsilon g_{k1} + \dots + \varepsilon^n g_{kn}$ , что краевая задача (6), (7) имеет асимптотическое по невязке с точностью до  $o(\varepsilon^n)$  решение

$$\begin{aligned} N_{kn}(t, x, \varepsilon) = & N_0 \left( (1 + \varepsilon g_{kn}(\varepsilon))t + \frac{kT}{2\pi}x \right) + \varepsilon N_{k1} \left( (1 + \varepsilon g_{kn}(\varepsilon))t + \frac{kT}{2\pi}x \right) + \\ & + \dots + \varepsilon^n N_{kn} \left( (1 + \varepsilon g_{kn}(\varepsilon))t + \frac{kT}{2\pi}x \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Отметим, что в [9] рассмотрена ситуация, когда система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = F(u)$$

имеет устойчивое периодическое с периодом  $T$  решение  $u_0(t)$ , и показано, что краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon d_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u), \quad (u(t, u + 2\pi) \equiv u(t, x))$$

имеет для каждого  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  устойчивое периодическое решение  $u_k(t, x, \varepsilon) = u_0 \left( (1 + o(\varepsilon))t + \frac{kT}{2\pi}x \right) + o(\varepsilon)$ . Для уравнений с запаздыванием предложенный в [9] алгоритм построения периодического решения (по невязке) сохраняется, однако доказательство существования точного решения и его устойчивости провести не удастся.

Подробнее остановимся на алгоритмической части. В (6) сделаем замену времени  $\tau = (1 + \varepsilon g_{k0} + \dots)t$  и будем искать периодическое решение в виде формального ряда

$$\begin{aligned} N_k(t, x) = & N_0 \left( \tau + \frac{kT}{2\pi}x + \varphi_{k0}(x) + \varepsilon \varphi_{k1}(x) + \dots \right) + \\ & + \varepsilon N_{k1} \left( \tau + \frac{kT}{2\pi}x + \varphi_{k0}(x) + \varepsilon \varphi_{k1}(x) + \dots \right) + \dots, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $k = \pm m_2, \pm 2m_2, \dots$ ,  $\varphi_{kj} - 2\pi$ -периодическая. Подставим (12) в (6) и будем собирать в получившемся формальном тождестве коэффициенты при первой степени

$\varepsilon$ , находим, что  $N_{k1}(s)$ , где  $s = \varepsilon + \frac{kT}{2\pi}x + \varphi_{k0}(x)$ , является периодическим решением линейного неоднородного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial s} = r[1 - N_0(s - h)]u(s) - u(s - h)N_0(s) + \psi(s), \quad (13)$$

в котором

$$\begin{aligned} \psi(s) = & -g_{k0} \left[ \dot{N}_0(s) + h\dot{N}_0(s - h)N_0(s) \right] + \\ & + \gamma \left[ \frac{kT}{2\pi} \alpha_0 \dot{N}_0(s) + (8\sigma_0)^{-1} \varphi''(x) \dot{N}_0(s) + \ddot{N}_0(s) \left( \frac{kT}{2\pi} + \varphi'(x) \right)^2 \right] + \\ & + d_0 \left[ \varphi''(x) \dot{N}_0(s) + \left( \frac{kT}{2\pi} + \varphi'(x) \right)^2 \ddot{N}_0(s) \right]. \end{aligned}$$

Однородное уравнение  $\dot{u} = ru[1 - N_0(s - h)] - u(s - h)N_0(s)$  имеет единственное (с точностью до множителя) периодическое решение  $\dot{N}(s)$ . Тогда сопряженное уравнение (см. [10]) имеет тоже единственное (с точностью до множителя) периодическое решение  $H_0(s)$ , и можно считать, что

$$\langle N_0(s), H_0(s) \rangle = 1.$$

Здесь через  $\langle u, v \rangle$  обозначено скалярное произведение.

Рассмотрим уравнение Хатчинсона

$$\dot{N} = r(1 - N(t - 1))N \quad (14)$$

при условии  $r > \frac{\pi}{2}$ . Далее, введем в рассмотрение уравнение в вариациях

$$\dot{h} = r(1 - N_0(t - 1))h - rN_0(t)h(t - 1) \quad (15)$$

на его устойчивом периодическом решении  $N_0(t)$ . Кроме этого, рассмотрим формально сопряженное с (15) уравнение

$$\dot{g} = -r(1 - N_0(t - 1))g + rN_0(t + 1)g(t + 1). \quad (16)$$

Хейловское скалярное произведение, ассоциированное с уравнениями (15) и (16), задается равенством:

$$\begin{aligned} \langle h(s), g(s) \rangle = & h(0)g(0) - r \int_{-1}^0 N_0(s + 1)h(s)g(s + 1)ds \\ & \forall h(s) \in C[-1, 0], g(s) \in C[0, 1]. \end{aligned} \quad (17)$$

Кроме того, для любых двух решений  $h(t)$  и  $g(t)$  уравнений (15) и (16), определенных при всех  $t \in \mathbb{R}$ , справедливо тождество

$$\langle h(s + t), g(s + t) \rangle \equiv \langle h(s), g(s) \rangle \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (18)$$

Из условия существования периодического решения в (13) получаем, что

$$\langle \psi(s), H_0(s) \rangle = 0.$$

Отсюда получаем уравнение для определения неизвестной постоянной  $g_{k0}$  и неизвестной функции  $\varphi(x)$ :

$$(1 + h\beta)g_{k0} = A\varphi'' + \left(\frac{kT}{2\pi} + \varphi'\right)^2 B + \frac{kT}{2\pi}\alpha_0\gamma, \quad (19)$$

где  $A = (8\sigma_0)^{-1}\gamma + d_0$ ,  $B = p(\gamma + d_0)$ ,  $p = \langle \ddot{N}_0(s), H_0(s) \rangle$ ,  $\beta = \langle \dot{N}_0(s-h)N_0(s), H_0(s) \rangle$ .

Относительно  $\varphi'(x)$  уравнение (19) является хорошо известным уравнением Риккати. Простой анализ показывает, что необходимо  $\varphi'(x) \equiv 0$  и тогда  $g_{k0} = (1 + h\beta)^{-1}\frac{kT}{2\pi} [\alpha_0\gamma + \frac{kT}{2\pi}p(\gamma + d_0)]$ .

После этого из (13) можно определить  $N_{k1}(s)$ , и далее алгоритм нахождения коэффициентов формального ряда (12) продолжается стандартным образом.

**3. Результаты численного анализа.** Численный анализ показывает, что режимы вида (11) задачи (6), (7) являются наблюдаемыми. Расчеты проводились путем сведения задачи (6), (7) к системе дифференциальных уравнений с запаздыванием и применением к ней метода шагов на основе метода Рунге — Кутты четвертого порядка с линейной интерполяцией.

Для всех приведенных рисунков использовались следующие параметры: размерность системы уравнений с запаздыванием, выбранной для разностной аппроксимации задачи (6), (7), равна 300; шаг интегрирования  $s = 0.001$ ; численное интегрирование проводилось на интервале  $0 < t \leq 500$ ;  $r = 3$ ,  $h = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\sigma_0 = 1$ ,  $d_0 = 1$ .

В качестве истории (начального условия) задачи на отрезке  $-1 \leq t \leq 0$  выбирались функции вида  $u_0(t, x) = \varphi(t + \frac{kT}{2\pi}x)$ , где  $\varphi(t)$  — периодическое решение задачи (1), а  $T$  — его период. Константы  $k$  и  $\alpha$  изменялись согласованно с учетом (10), поскольку лишь при выборе  $\alpha$  в малой окрестности  $2\pi/k$  численное решение остается ограниченным. На всех рисунках изображены графики решения  $u(t, x)$  в момент времени  $t = 500$ .

Рис. 3 соответствует задаче с параметрами  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 3.141593$ ,  $k = 2$  (вверху) и  $k = 4$  (внизу). Рис. 4 отвечает параметрам  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 2.094395$ ,  $k = 3$  (вверху) и  $k = 6$  (внизу).

С увеличением  $k$  наблюдается значительный рост амплитуды колебаний, но при согласованном уменьшении  $\varepsilon$  можно добиться ее близости к амплитуде функции  $\phi(t)$ , что демонстрирует Рис. 5, где  $\varepsilon = 0.001$ ,  $\alpha = 2.094395$ ,  $k = 6$ .

Таким образом, при достаточно малых  $\varepsilon$  решения в виде бегущих волн, близкие к  $\phi(t + \frac{kT}{2\pi}x)$ , наблюдаются в численном эксперименте, а с ростом  $\varepsilon$  сохраняют структуру волн, демонстрируя рост амплитуды. Отметим, что в каждом случае амплитуда волн, не являясь постоянной, меняется в небольшом диапазоне. Эволюция решения во времени при  $t \in [500, 510]$  приведена на Рис. 6.

По-видимому, оставаясь по форме близким к периодическому, решение имеет более сложную структуру. Численный эксперимент показал, что при нарушении условия (10) и при достаточно малых  $\varepsilon$  задача (6), (7) является не диссипативной: решение с начальным условием  $\varphi(t + \frac{kT}{2\pi}x)$  неограниченно растет при увеличении  $t$ .

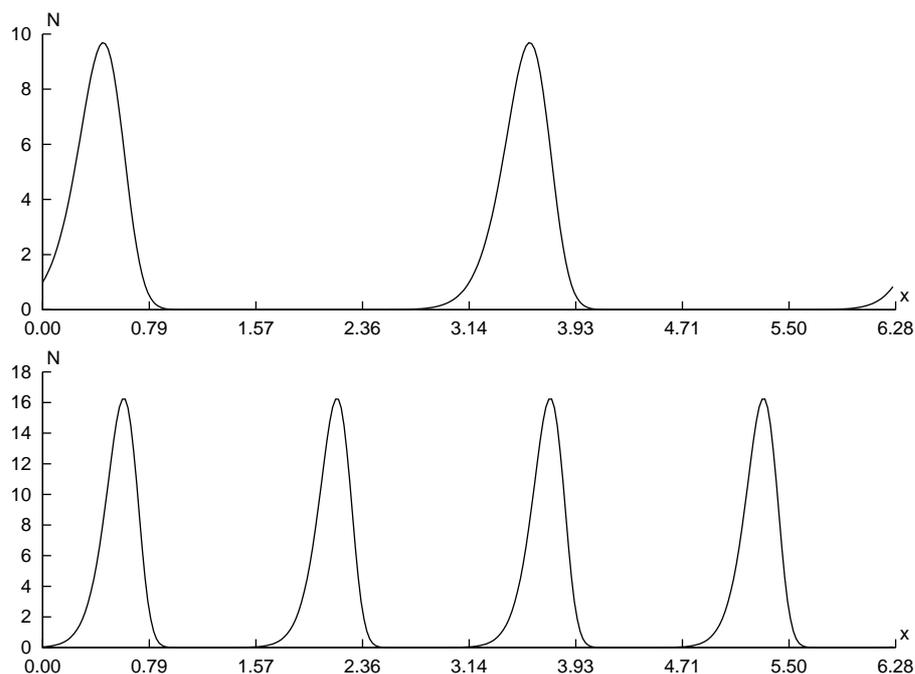


Рис. 3.  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 3.141593$ ,  $k = 2$  (вверху),  $k = 4$  (внизу)

## Список литературы

1. *Wright E.M.* A non-linear difference- differential equation // T. Reine Angew, Math. 1955. P. 194,
2. *Kakutani S., Markus L.* On the non-linear difference- differential equation  $y'(t) = \{A - By(t - \tau)\}y(t)$  // Contributions to the Theory of Non-linear Oscillations IV, Annals of Math. Studies No 41, Princeton University Press, Princeton, 1958.
3. *May Robert M.* Stability and complexity in Model ecosystems. Princeton, New-Jersey, 1973.
4. *Bellman R.E.* A survey of the mathematical theory of time-lagrelarded control and hereditary processes. Santa Monica, California: the Rand Corporation, 1954.
5. *Каценко С.А.* Асимптотика периодического решения обобщенного уравнения Хатчинсона // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1981.
6. *Каценко С.А.* Пространственно-неоднородные структуры в простейших моделях с запаздыванием и диффузией // Математическое моделирование. 1990. Т. 2, N 10. С. 49–69.
7. *Колесов А.Ю.* Об устойчивости пространственно однородного цикла уравнения Хатчинсона с диффузией. Вильнюс: ИМК, 1985. № 1. С. 93 – 102.

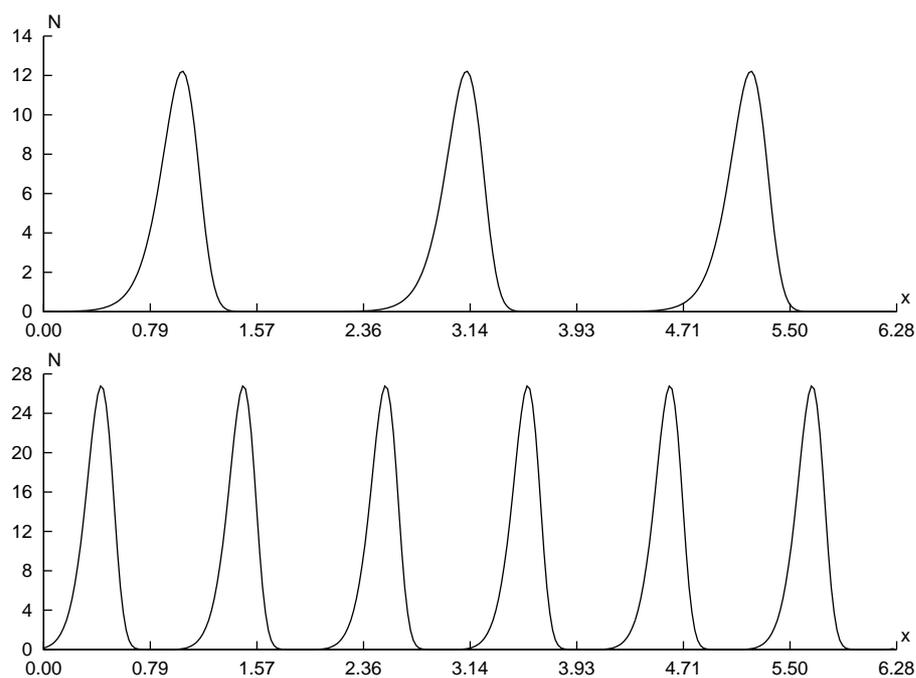


Рис. 4.  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 2.094395$ ,  $k = 3$  (вверху) и  $k = 6$  (внизу)

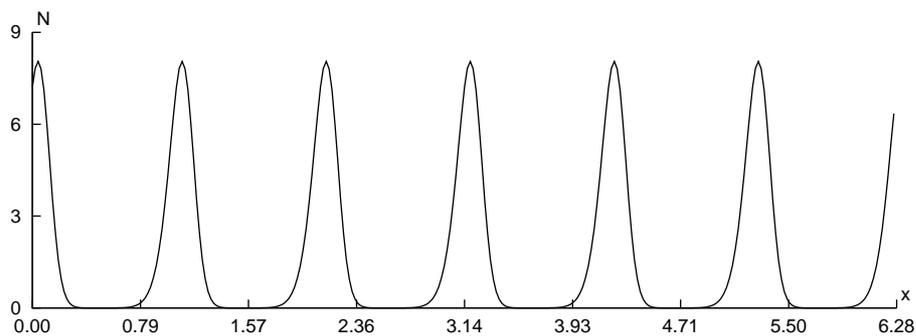


Рис. 5.  $\varepsilon = 0.001$ ,  $\alpha = 2.094395$ ,  $k = 6$

8. *Bestehorn M., Grigorieva E.V., Kaschenko S.A.* Spatio-temporal structures in a biological model with delay and diffusion // The Third International Conference "Tools for mathematical modelling" 18 - 23 June 2001, Saint Petersburg.
9. *Кащенко С.А.* Исследование асимптотики периодических решений автономных параболических уравнений с малой диффузией / Деп. ВИНТИ 15.01.85. N 388 - 85. 26 с.
10. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

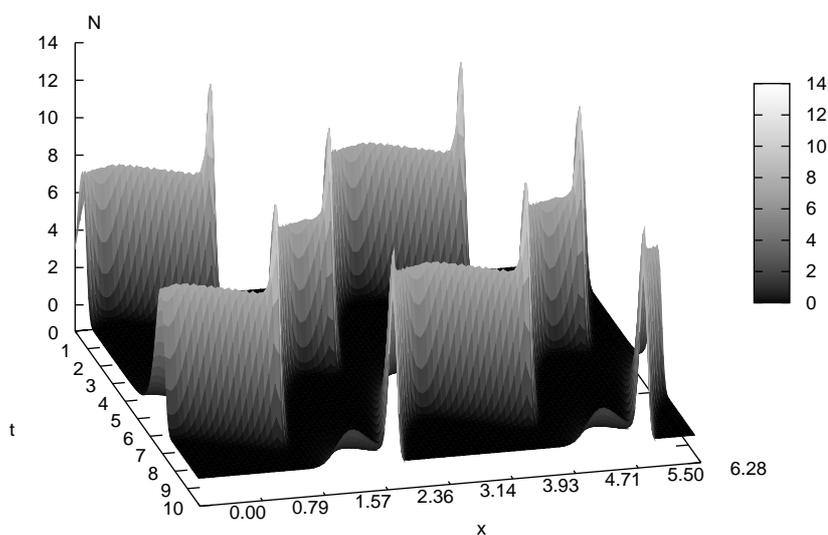


Рис. 6.  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 3.141593$ ,  $k = 2$

## Spatially inhomogeneous periodic solutions in distributed Hutchinson equation

Glyzin D.S., Kaschenko S.A., Polstyanov A.S.

**Keywords:** asymptotic methods, distributed Hutchinson equation, method of steps

The asymptotics of spatially inhomogeneous periodic solutions of the complex spatially distributed Hutchinson equation with periodic boundary conditions are presented. It is shown that such solutions are observable in a numerical experiment.

### Сведения об авторах:

**Глызин Дмитрий Сергеевич,**

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель;

**Кащенко Сергей Александрович,**

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
доктор физ.-мат. наук, профессор,  
зав. кафедрой математического моделирования;

**Полстьянов Артем Сергеевич,**

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
аспирант.