Модел. и анализ информ. систем. Т. **16**, № **4** (2009) 86–95

УДК 517.9+519.86

Циклы и торы деловой активности в одной математической модели макроэкономики

Кокуйкин Е.С., Куликов А.Н.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: artmaro@gmail.com

получена 4 сентября 2009

Ключевые слова: мультипликатор-акселератор, дифференциальные уравнения, нелинейная динамика, уравнения с частными производными, нормальная форма, инвариантные торы, бифуркации Андронова – Хопфа, турбулентность по Ландау.

Рассмотрена краевая задача, к которой может быть сведена широко известная математическая модель мультипликатор-акселератор, если учесть пространственные взаимодействия. Показано, что при естественных предположениях она имеет инвариантные торы, в том числе и высокой размерности. Изменения основного параметра позволяют реализовать широко известный сценарий перехода к турбулентности Ландау.

Введение. В монографиях [1, 2] приведена математическая модель, которая широко известна под названием мультипликатор-акселератор. Особый интерес представляет собой тот вариант этой модели, когда учитывается пространственное взаимодействие. Распределённые модели позволяют учесть многие экономические факторы, которые не учитывают в "точечных" моделях. К ним можно отнести межрегиональную торговлю, движение капиталов, неравномерность развития экономических показателей различных подобластей экономического пространства (региона). Безусловно, математическая модель, базирующаяся на идеях монографий [1, 2], где и приведены различные её варианты, не лишена недостатков. Но, с другой стороны, она отражает основные, принципиальные положения макроэкономической динамики и поэтому в настоящее время является общепринятой среди специалистов по моделированию макроэкономических процессов.

Пусть $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2$ — некоторая ограниченная область с кусочно-гладкой границей. Обозначим $Y = Y(t, x_1, x_2), I = I(t, x_1, x_2), T = T(t, x_1, x_2)$ соответственно национальный доход, инвестиции и активное торговое сальдо. Скорость изменения этих переменных величин определяется из системы дифференциальных уравнений с частными производными [1, 2]:

$$\begin{aligned} Y_t &= I + T - aY + d_1\Delta Y, \\ I_t &= bY_t - I + F(Y), \\ T_t &= d_2\Delta Y - T. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь
$$Y_t = \frac{\partial Y}{\partial t}, T_t = \frac{\partial T}{\partial t}, I_t = \frac{\partial I}{\partial t}, \Delta = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2},$$
a, b, d_1, d_2 — некоторые постоянные множители, характеризующие скорости экономических процессов. Относительно детальное обсуждение их экономического смысла можно найти в монографиях [1, 2]. Эта математическая модель была, как известно, и предложена шведским экономистом Т. Пу. Она основана на макроэкономическом подходе Кейнса и изобретении "цикла деловой активности" [3]. Наконец, $F(Y)$ — нелинейная функция или функционал, призванный ввести ограничения на рост инвестиций в математической модели (1), который обычно связан с ростом $Y(t, x_1, x_2)$ или $Y_t(t, x_1, x_2)$. Введение ограничения на рост инвестиций играет центральную роль в теории экономических циклов [4].

В [1, 2] в качестве такого ограничителя предложена $F = -cY_t^3$ $(c > 0)$, которая заимствована из классического уравнения Релея. В работах [5, 6, 7] был рассмотрен следующий вариант нелинейности:
$$F = -c_2 Y_t \iint\limits_{\mathscr{D}} Y_t^2 dx_1 dx_2,\ c_2 > 0,$$
совпадающий с первым, если $Y(t, x_1, x_2)$ не зависит от пространственных координат. Такой выбор нелинейности подчеркивает то обстоятельство, что ограничение зависит от интегрального роста дохода во всем регионе.

Здесь мы рассмотрим третий вариант выбора для нелинейности F:
$$F = -c_3 Y \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{\mathscr{D}} (Y)^2 dx_1 dx_2,$$
которая совпадает с нелинейностью в известном уравнении Ван дер Поля, если $Y(t, x_1, x_2)$ не зависит от x_1, x_2.

Продифференцируем первое уравнение системы (1) по t и исключив T, I, с помощью второго и третьего, можно получить одно уравнение для $Y(t, x_1, x_2)$:
$$Y_{tt} + (a - b + 1)\, Y_t + aY - d_1 \Delta Y_t - (d_1 + d_2)\, \Delta Y = -cY \iint\limits_{\mathscr{D}} Y_t Y\, dx_1 dx_2, \tag{2}$$
где $c = 2c_3 > 0$. Уравнение (2) дополним граничным условием
$$Y(t, x_1, x_2)|_{\partial\mathscr{D}} = 0. \tag{3}$$
Иногда условие (3) в литературе, посвященной математическому моделированию макроэкономических процессов, заменяют следующим:
$$\frac{\partial Y(t, x_1, x_2)}{\partial n}|_{\partial\mathscr{D}} = 0, \tag{4}$$
$\partial Y(t, x_1, x_2)/\partial n$ – производная по нормам к границе области $\mathscr{D}$.

После замен
$$t = a^{-1/2} t_1, \nu_1 = d_1/\sqrt{a}, \sigma = \sqrt{\frac{d_1 + d_2}{a}},\ \varepsilon = \frac{b - a - 1}{\sqrt{a}},\ u = \varepsilon^{-1/2} c^{1/2} a^{-1/4} Y$$

и, опуская индекс “1” у нормированного времени t_1, получим уравнение для u:

$$u_{tt} - \varepsilon u_t + u - \nu_1 \Delta u_t - \sigma^2 \Delta u = -\varepsilon u \iint\limits_{\mathscr{D}} u_t u dx_1 dx_2, \tag{5}$$

которое, естественно, дополним условиями на границе

$$u|_{\partial\mathscr{D}} = 0 \tag{6}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\mathscr{D}} = 0.$$

После относительно общей постановки задачи ниже рассмотрим частный случай, когда неизвестная функция зависит только от x_1, но не зависит от x_2. В результате получим несколько упрощенные краевые задачи.

Так, уравнение (2) перепишется в следующей форме:

$$Y_{tt} + (a - b + 1)\, Y_t + aY - d_1 Y_{txx} - (d_1 + d_2)\, Y_{xx} = -cY \int\limits_0^l Y_t Y\, dx, \tag{7}$$

которое можно рассматривать вместе с краевыми условиями

$$Y(t, 0) = Y(t, l) = 0 \tag{8}$$

или

$$Y_x(t, 0) = Y_x(t, l) = 0. \tag{9}$$

1. Нормальная форма. В этом разделе, для определенности, рассмотрим краевую задачу (7),(8). Без нарушения общности можно считать, что $l = \pi$. Этого можно добиться за счет перенормировок пространственной переменной. Наконец, будем считать, что $\nu_1 = \varepsilon\nu$, а ε — малый параметр. Последнее предположение реализуемо, если коэффициент d_1 мал. Такой вариант выбора d_1 вполне допустим, так как очень часто рассматривается $d_1 = 0$.

Итак, в этом разделе будем рассматривать краевую задачу

$$u_{tt} - \varepsilon u_t + u - \varepsilon\nu u_{txx} - \sigma^2 u_{xx} = -\varepsilon u \int\limits_0^\pi u_t u dx, \tag{10}$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0. \tag{11}$$

Если дополнить эту задачу начальными условиями

$$u(0, x) = f(x),\ u_t(0, x) = g(x), \tag{12}$$

то смешанная задача (10)-(12) будет локально разрешима, если $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, где ε_0 достаточно мало, а

$$f(x) \in \tilde{W}_2^2[0, \pi],\ g(x) \in \tilde{W}_2^1[0, \pi],$$

где $\tilde{W}_2^2[0,\pi], \tilde{W}_2^1[0,\pi]$ — подпространство пространства Соболева $W_2^2[0,\pi], W_2^1[0,\pi]$, состоящее из таких функций $f(x) \in W_2^2[0,\pi], g(x) \in W_2^1[0,\pi]$, которые удовлетворяют краевым условиям (11).

Последнее замечание основано на простом утверждении. Рассмотрим вспомогательную смешанную задачу

$$\begin{aligned}
&v_{tt} - v_{xx} - 2\gamma v_{txx} = 0,\\
&v(0,x) = f(x) \in \tilde{W}_2^2[0,\pi], \quad v_t(0,x) = g(x) \in \tilde{W}_2^2[0,\pi],\\
&v(t,0) = v(t,\pi) = 0.
\end{aligned}$$

Её решение задается формулой

$$v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\gamma_n a_n - b_n}{\gamma_n - \delta_n} e^{\delta_n t} + \frac{\delta_n a_n - b_n}{\delta_n - \gamma_n} e^{\gamma_n t}\Big)\sin nx,$$

где

$$\begin{aligned}
&\gamma_n = -\gamma n^2 - \sqrt{\gamma^2 n^4 - n^2},\ \delta_n = -\gamma n^2 + \sqrt{\gamma^2 n^4 - n^2},\\
&f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx,\ g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.
\end{aligned}$$

Здесь $\gamma_n, \delta_n < 0$, если действительны, и $Re\gamma_n, Re\delta_n < 0$, если они комплексные величины. Кроме того, справедливы неравенства

$$|\delta_n| \le M_1,\ |\gamma_n| \le M_2 n^2,$$

а M_1, M_2 – некоторые положительные постоянные. Отметим, что в силу предположений сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2,\ \sum_{n=1}^{\infty} n^4 b_n^2. \tag{13}$$

После чего нетрудно показать, используя неравенство Бесселя, что $v_{tt}, v_{xx}, v_{txx} \in \mathscr{L}_2(0,\pi)$. При переходе от вспомогательной задачи к нелинейной можно использовать малость нелинейного слагаемого и известную лемму о регулярности [8].

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$Av = -\frac{d^2 v}{dx^2},\ v = v(x),$$

определенный на функциях $v(x) \in \tilde{W}_2^2[0,\pi]$. Он имеет счетное множество собственных значений $\lambda_n = n^2$, каждому из которых соответствует собственная функция $e_n(x) = \sqrt{2/\pi}\sin nx$. В $\mathscr{L}_2(0,\pi)$ эти функции образуют полную ортонормированную систему. Поэтому решение краевой задачи (10),(11) можно искать в следующем виде

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) e_n(x).$$

Функции $u_n(t)$ ($n \in \mathbb{N}$) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\ddot{u}_n + \varepsilon(\nu n^2 - 1)\dot{u}_n + \omega_n^2 u_n = -\varepsilon u_n \sum_{k=1}^{\infty} u_k \dot{u}_k, \tag{14}$$

где $\omega_n^2 = 1+\sigma^2 n^2$. В качестве фазового пространства решений (пространства начальных условий) системы дифференциальных уравнений второго порядка (14) можно выбрать $l_2^2 \times l_2^1$. Пространство l_2^k – дискретный аналог пространства Соболева $W_2^k\ [0,\pi]$. Его формируют бесконечные последовательности $\{a_n\}, a_n \in \mathbb{R}$, для которых сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{2k} a_n^2$. К особенностям системы (14) следует отнести, что линейные подпространства $u_k = 0$, где k – некоторое фиксированное натуральное число, инвариантны для решений этой системы.

Положим

$$u_n(t,\tau) = v_n(t,\tau) + \varepsilon w_n(t,\tau) + \ldots,$$

где точками обозначены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости относительно ε, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\tau = \varepsilon t$. Положим

$$v_n(t,\tau) = z_n(\tau)\exp(i\omega_n t) + \overline{z}_n(\tau)\exp(-i\omega_n t),$$

где комплекснозначные функции $z_n(\tau), \overline{z}_n(\tau)$ подлежат определению. Выпишем систему неоднородных дифференциальных уравнений для определения $w_n(t,\tau)$:

$$\ddot{w}_n + \omega_n^2 w_n = F_n(t,z). \tag{15}$$

Здесь $z = (z_1, \overline{z_1}, z_2, \overline{z_2}, \ldots)$, точками обозначена частная производная по t, а штрихом частная производная по вспомогательной переменной τ.

$$F_n(t,z) = -v_n\dot{V} - 2\dot{v}_n' + (1-\nu n^2)\dot{v}_n,\ V(t) = V(t,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \dot{v}_n,$$

$$v_n' = i\omega_n\big(z_n\exp(i\omega_n t) - \overline{z}_n\exp(-i\omega_n t)\big),\ \dot{v}_n' = i\omega_n\big(z_n'\exp(i\omega_n t) - \overline{z}_n'\exp(-i\omega_n t)\big).$$

Учитывая вид функций $v_n(t,\tau)$, нетрудно уточнить структуру первого слагаемого правой части системы (15):

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,\tau) = \sum_{m=1}^{\infty}\big\{&a_{n,m}(\tau)\exp[i(\omega_n + 2\omega_m)t] + b_{n,m}(\tau)\exp[i(\omega_n - 2\omega_m)t] + \\ &+ c_{n,m}(\tau)\exp[i(-\omega_n + 2\omega_m)t] + d_{n,m}(\tau)\exp[i(-\omega_n - 2\omega_m)t]\big\},\end{aligned}$$

где $a_{n,m}, b_{n,m}, c_{n,m}, d_{n,m}$ — известные функции переменного τ. Они могут быть выражены через $z_k(\tau), \overline{z}_k(\tau)$.

$$a_{n,m}(\tau) = 2i\omega_m z_n z_m^2,\ b_{n,m}(\tau) = -2i\omega_m z_n \overline{z}_m^2,$$
$$c_{n,m}(\tau) = 2i\omega_m \overline{z}_n z_m^2,\ d_{n,m}(\tau) = -2i\omega_m \overline{z}_n \overline{z}_m^2.$$

Из условий разрешимости системы неоднородных уравнений (15) в классе почти периодических функций по переменным t получаем систему уравнений

$$z_n' = \frac{1}{2}(1-\nu n^2)z_n - \frac{1}{2}z_n|z_n|^2,\ n \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Данную систему уравнений часто называют квазинормальной формой, иногда – "укороченной" нормальной формой. Следует отметить, что система (16) состоит из набора однотипных уравнений. Подобные уравнения возникают в качестве нормальной формы при исследовании бифуркаций Андронова – Хопфа.

2. Анализ нормальной формы. О возможности реализации сценария Ландау перехода к турбулентности.

Изучение уравнения с произвольным номером k не представляет труда. Положим

$$z_k(\tau) = \sqrt{\rho_k(\tau)}e^{i\varphi_k(\tau)},\ \rho_k \geq 0.$$

Для $\rho_k(\tau), \varphi_k(\tau)$ получим систему, состоящую из двух дифференциальных уравнений

$$\rho_k' = \nu_k\rho_k - \rho_k^2,\ \dot{\varphi}_k = 0, \tag{17}$$

где $\nu_k = 1 - \nu k^2$. Откуда $\varphi_k(\tau) = \gamma_k$ — произвольная действительная постоянная. Первое уравнение имеет ненулевое состояние равновесия

$$\rho_k(\tau) = \nu_k,$$

если $\nu_k > 0$. Если же оказалось, что $\nu_k \leq 0$, то $\lim\limits_{\tau\to\infty} \rho_k(\tau) = 0$. Элементарный анализ показывает, что справедливо следующее утверждение

Лемма 2.1 *Пусть $\nu_k > 0$, тогда первое уравнение системы (17) с номером k имеет единственное положительное состояние равновесия, которое асимптотически устойчиво.*

Уравнение (16) имеет одномерное инвариантное многообразие, составленное из устойчивых по Ляпунову состояний равновесия $z_k = \sqrt{\nu_k}e^{i\gamma_k}, \gamma_k \in \mathbb{R}$. Это одномерное многообразие асимптотически устойчиво.

Возвратимся к рассмотрению системы (16). Пусть $\nu_k \in [\beta_{m+1}, \beta_m),\ \beta_m = 1/m^2$. При таком выборе ν справедливы неравенства $\nu_j = 1 - \nu j^2,\ j = 1, \dots m,\ \nu_p \leq 0,\ p = m+1, m+2, \dots$. Следовательно, у системы дифференциальных уравнений (16) существуют инвариантные торы

$$T_k:\ z_j = \sqrt{\nu_j}e^{i\gamma_j},\ j = 1, \dots k,\ k \leq m,\ z_p = 0,\ p \geq k+1.$$

Размерность каждого из этих торов равна k. Максимальную размерность имеет тор T_m. Из *леммы 2.1* вытекает, что тор T_m асимптотически устойчив, а торы T_k $(k < m)$, т. е. торы меньшей размерности, будут седловыми (неустойчивыми). Уместно отметить, что тор T_1, размерность которого равна 1, следует назвать циклом. Наконец, если $\nu > 1$, то все $\nu_j < 0$ и единственным аттрактором системы (16) будет нулевое состояние равновесия.

Из результатов, изложенных в учебном пособии [9], вытекает справедливость утверждения

Теорема 2.1 *Существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\nu \in [\beta_{m+1}, \beta_m)$ *каждому тору* T_k *системы дифференциальных уравнений (16) соответствует тор краевой задачи (10),(11)* $T_k(\varepsilon)$ *размерности* k. *Решения на каждом из них задаются формулой*

$$u(t, x, \varepsilon) = 2\Big\{\sum_{j=1}^{k} \sqrt{\nu_j} \cos(\omega_j t + \gamma_j) e_j(x)\Big\} + O(\varepsilon), \tag{18}$$

где $\nu_j = 1 - \nu j^2, \omega_j^2 = 1 + \sigma^2 j^2$, *а* $\gamma_k \in \mathbb{R}$.

Тор $T_m(\varepsilon)$ *максимально возможной размерности* m *асимптотически устойчив. Торы* $T_k(\varepsilon)$, *если* $k = 1, \dots, m-1$, *неустойчивы.*

Из утверждения теоремы следует, что при изучении динамики краевой задачи (10),(11) реализуется широко известный сценарий Ландау перехода к турбулентности. Пусть $\nu \in [\beta_{m+1}, \beta_m)$, тогда краевая задача имеет единственный аттрактор — тор $T_m(\varepsilon)$. Остальные инвариантные многообразия, включая нулевое состояние равновесия, неустойчивы. При уменьшении параметра ν до таких значений, что $\nu \in [\beta_{m+2}, \beta_{m+1})$, тор $T_m(\varepsilon)$ теряет устойчивость, но в то же время рождается тор $T_{m+1}(\varepsilon)$ размерности $m+1$, который наследует устойчивость тора $T_m(\varepsilon)$. Дальнейшее уменьшение ν может привести к потере устойчивости тора $T_{m+1}(\varepsilon)$ и рождению асимптотически устойчивого тора $T_{m+2}(\varepsilon)$ и т. д. Роль числа Рейнольдса, если перейти на первоначальный вариант изложения этого сценария в работах Ландау, играет величина $1/\nu$.

Можно рассмотреть и краевую задачу (7),(9). В таком случае изложенный результат остается справедливым с некоторыми поправками.

После перенормировок приходим к аналогичной краевой задаче

$$u_{tt} - \varepsilon u_t + u - \varepsilon \nu u_{txx} - \sigma^2 u_{xx} = -\varepsilon u \int_0^\pi u_t u dx, \tag{19}$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0. \tag{20}$$

При таком выборе краевых условий в качестве полной ортонормированной системы следует взять функции

$$h_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}},\ h_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x,\ h_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 2x,\ \dots$$

и поэтому целесообразно положить

$$u(t, x) = u_0(t) h_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) h_n(x).$$

В таком случае для функций $u_0(t), u_1(t), \dots u_n(t), \dots$ получаем систему, аналогичную (14)

$$\ddot{u}_n + \varepsilon(\nu n^2 - 1)\dot{u}_n + \omega^2 u_n = -\varepsilon u_n \sum_{k=0}^{\infty} u_k \dot{u}_k,$$

где, как и ранее, $\omega_n^2 = 1 + \sigma^2 n^2$, но $n = 0, 1, 2, \dots$ Её изучение, как было отмечено, может быть сведено к анализу квазинормальной формы

$$z_n' = \frac{1}{2}(1 - \nu n^2) z_n - \frac{1}{2} z_n |z_n|^2, \tag{21}$$

отличие которой от системы (16) состоит в том, что нумерация начинается с $n = 0$.

Теорема 2.2 *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\nu \in [\beta_{m+1}, \beta_m)$ каждому тору T_k системы дифференциальных уравнений (16) соответствуют торы краевой задачи (19),(20) $T_j(\varepsilon)$, $j = 0, 1, \dots$, $\dim T_j(\varepsilon) = j + 1$, решения на которых задаются формулой*

$$u(t, x, \varepsilon) = 2\Big\{ \sum_{j=1}^{m} \sqrt{\nu_j} \cos(\omega_j t + \gamma_j) h_j(x) \Big\} + O(\varepsilon), \tag{22}$$

где $\nu_j = 1 - \nu j^2$.

Тор $T_m(\varepsilon)$ максимально возможной размерности асимптотически устойчив, а торы меньшей размерности неустойчивы.

Отличия этого варианта краевой задачи от первоначальной практически нет. Самым существенным будет тот факт, что краевая задача (19),(20) всегда имеет тор $T_0(\varepsilon)$ размерности 1 (цикл), а нулевое состояние равновесия неустойчиво при всех рассматриваемых значениях параметров задачи.

Ниже приведены графики функций (см. рис. 1, 2, 3) $u(x) = u(t_0, x, \varepsilon)$ – решения краевой задачи (10),(11), принадлежащие асимптотически устойчивому тору. Для построения графиков была использована формула (18). Постоянные $t_0, \nu, m, \sigma, \gamma_j$ выбирались относительно “случайным” образом, так как рисунки 1-3 носят иллюстративный характер. Отметим, что формула (18) задает квазипериодическую функцию переменной t. Нас интересовали профили решений при фиксированном $t = t_0$. Из вида графиков следует, что с уменьшением ν (ростом k) растет изрезанность функций $u(x)$. Последнее означает рост нормы $u(x)$ в пространстве $W_2^2\ [0; \pi]$ и даже в $W_2^1\ [0; \pi]$. Иногда такое явление называют “градиентной” катастрофой (см., например, [10]).

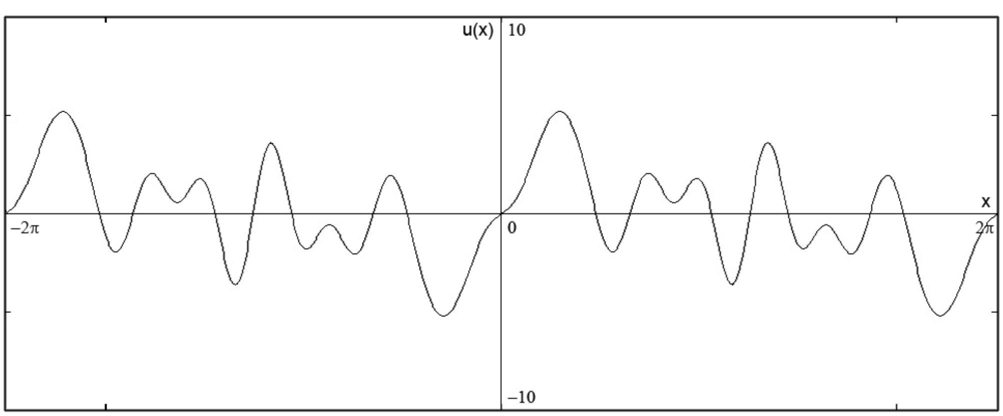

Рис. 1. $m = 9, \sigma = 5, \nu = 1/100, t_0 = 0$.

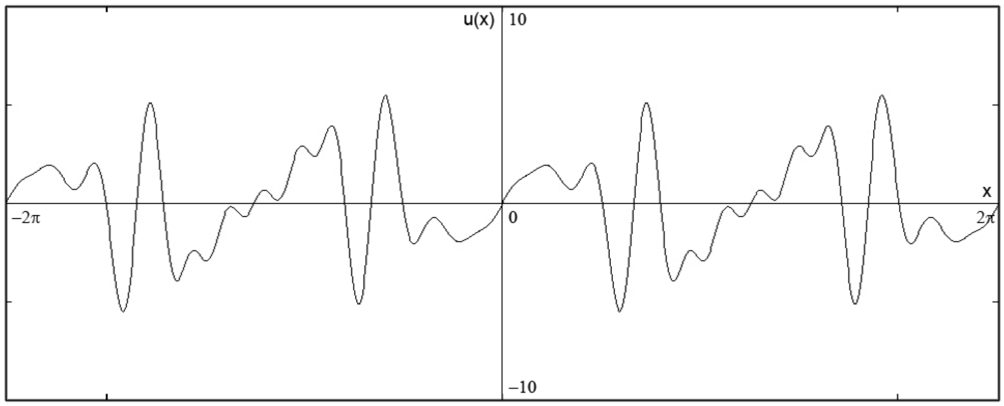

Рис. 2. $m = 14, \sigma = 8, \nu = 1/200, t_0 = 1$.

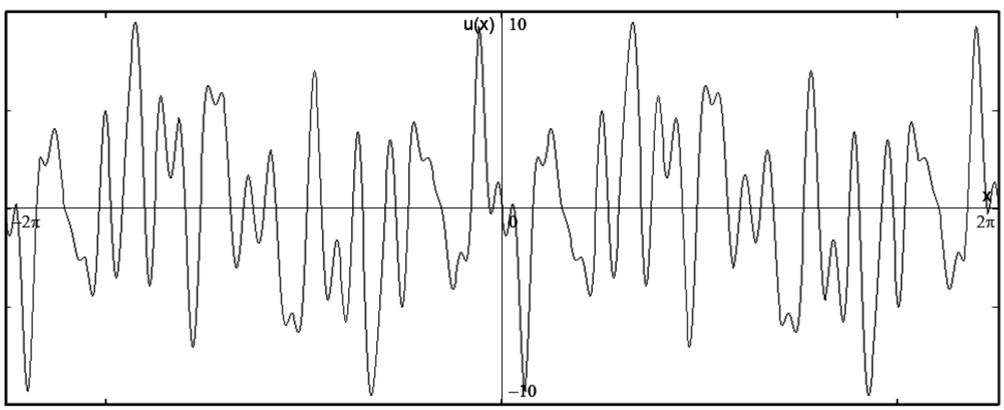

Рис. 3. $m = 31, \sigma = 5, \nu = 1/1000, t_0 = 7$.

Список литературы

1. Пу Т. Нелинейная экономическая динамика. Ижевск: Удмуртский университет, 2000. 200 с.

2. Занг В.-Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. М.: Мир, 1999. 335 с.

3. Samulson P.A. Foundations of Economic Analysis. Cambridge: Mass. Harvarel University Press, 1977.

4. Hicks J.R. Contribution to the theory of the trade cycle. Oxford: Oxford University Press, 1950.

5. Колесов А.Ю., Куликов А.Н., Розов Н.Х. Развитие турбулентности по Ландау в модели мультипликатор-акселератор // Доклады РАН. 2008. Т. 420, № 6. С. 739-743.

6. Колесов А.Ю., Розов Н.Х., Садовничий В.А. Математические аспекты теории развития турбулентности по Ландау // Успехи математических наук. 2008. Т. 63, в. 2. С. 21-84.

7. Коршунова Е.В., Куликов А.Н. Пространственно-неоднородные торы в модели мультипликатор-акселератор // Модел. и анализ информ. систем. 2008. Т. 15, №. 1. С. 45-50.

8. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985. 280 с.

9. Колесов А.Ю., Куликов А.Н. Инвариантные торы нелинейных эволюционных уравнений: Учеб. пособие. Ярославль, 2003. 107 с.

10. Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений. М:Наука, 1998. 192 с.

Business Cycles and Torus in the Non-homogeneous Multiplier-Accelerator Model

Kokuykin E.S., Kulikov A.N.

Keywords: non-linear second-order differential equation, periodic solution, invariant torus, theory of normal forms, multiplier-accelerator model, non-homogeneous model, Hopf's bifurcation, Landau's scenario for turbulence, non-linear dynamics

This paper analyzes the well known multiplier-accelerator model from a mathematical point of view. It introduces non-linear components to standard linear models. Using the theory of normal forms, the existence of the stable non-homogeneous invariant torus has been shown.

Сведения об авторах:
Кокуйкин Евгений Сергеевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, студент;
Куликов Анатолий Николаевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
канд. физ.-мат. наук, доцент.