

УДК 519.987

Асимптотика смещения оценки энтропии для мер Бернулли

Тимофеев Е.А.¹

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: timofeevea@gmail.com

получена 14 ноября 2009

Ключевые слова: энтропия, непараметрическая оценка, моменты, мера Бернулли

Найдена точная асимптотика для смещения оценки энтропии [8] для бернуллиевских мер.

Введение

Рассматривается задача эффективного оценивания энтропии (на символ) по экспериментальным данным из информационного источника с конечным алфавитом. Последовательности символов из конечного алфавита $\mathcal{A}$ появляются во многих прикладных задачах, поэтому построению оценок энтропии по экспериментальным данным и их исследованию посвящено довольно много работ (см. обзор в [8]).

В статье рассматривается непараметрическая оценка энтропии из работы [8], которая строится по выборке из n строк небольшой длины. Для построения оценки нужно ввести метрику на пространстве последовательностей (строк) и, если мера и метрика такие, что усредненная мера шара удовлетворяет некоторому труднопроверяемому условию гладкости, то точность оценки равна $\mathcal{O}(n^{-c})$, где c – некоторая константа. Экспериментальная проверка этой оценки для нахождения энтропии динамических систем, проведенная в работе [3], показала, что эта оценка уже для $n = 10^4$ имеет точность 0.01 и не зависит от выбора разбиения, используемого для нахождения энтропии динамической системы. Напомним, что точность или эффективность любой оценки h_n обычно характеризуется величиной $E(h_n - h)^2$, где h – энтропия источника. В экспериментах использовалась метрика

$$\rho_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\min \{k : x_k \neq y_k\}}, \quad (1)$$

¹Работа поддержана РФФИ, грант №07-01-00702а, и проводилась при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям, ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009 – 2013 годы".

где $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ – пространство правосторонних последовательностей, $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, |\mathcal{A}| - 1\}$ – заданный конечный алфавит, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.

Метрика (1) представляется самой естественной для оценивания энтропии. Однако в [4] показано, что для этой метрики оценка из [8] имеет смещение $\mathcal{O}(1)$ для симметричной меры Бернулли (с равными вероятностями символов). Поэтому требуемое условие гладкости не выполнено для симметричной меры Бернулли, если применять метрику (1).

Подчеркнем, что для небольших значений энтропии ($h \leq 5$) это смещение настолько мало (например, 10^{-6} для $h = 1$), что его нельзя заметить в вычислительном эксперименте.

В настоящей работе будет показано, что смещение порядка $\mathcal{O}(1)$ будет для метрики (1) и тех мер Бернулли, у которых логарифмы вероятностей символов соизмеримы. Для остальных мер Бернулли оценка является асимптотически несмещенной.

Изучаемые в настоящей работе рекуррентные уравнения возникают и в ряде других задач, например при анализе алгоритма поиска ПАТРИЦИЯ [5, упр. 5.2.2.53], при анализе алгоритма Лемпеля – Зива [7].

1. Обозначения

Информационный источник или стационарный случайный процесс будем представлять как инвариантную относительно сдвига меру в пространстве правосторонних последовательностей $\Omega = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Здесь $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, A - 1\}$ – заданный конечный алфавит, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.

Итак, бесконечную случайную последовательность будем представлять как случайную величину, принимающую значения в Ω и распределенную по мере μ , и будем обозначать ее как $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots)$.

Цилиндр порядка s , содержащий точку $\mathbf{x} \in \Omega$, будем обозначать через

$$C_s(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \Omega : y_1 = x_1, \dots, y_s = x_s\}.$$

Пусть $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ – случайная точка в Ω , распределенная по мере μ . Напомним (см., напр., [6]), что *энтропия* (энтропия на символ) определяется как

$$h = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \ln \mu(C_n(\boldsymbol{\xi})). \quad (2)$$

Отметим, что натуральный логарифм в определении энтропии выбран для удобства (в нижеприведенной оценке (3) не будет постоянного множителя).

В [8] предложены и исследованы оценки для нахождения размерностей мер в метрических пространствах. Для пространства последовательностей Ω с метрикой ρ_0 эти оценки энтропии определяются следующим образом.

Пусть заданы $n + 1$ независимых случайных точек $\boldsymbol{\xi}_0, \dots, \boldsymbol{\xi}_n$ в пространстве Ω одинаково распределенных по мере μ , тогда оценка $\eta_n^{(k)}$ задается по формуле

$$\eta_n^{(k)} = k \left(r_n^{(k)} - r_n^{(k+1)} \right), \quad (3)$$

где

$$r_n^{(k)} = \frac{1}{(n+1)} \sum_{j=0}^n \left(\min_{i:i \neq j}^{(k)} \rho(\xi_i, \xi_j) \right)^{-1}, \quad (4)$$

где $\min^{(k)} \{X_1, \dots, X_N\} = X_k$, если $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_N$.

Отметим, что здесь и далее заданные $n+1$ строк, с которыми работает оценка, считаются бесконечными. Это допущение делается только для упрощения формул для смещения оценки. Простое ограничение (11) на меры цилиндров показывает (см. [3]), что достаточно рассматривать только строки длины $\mathcal{O}(\ln n)$.

Второе упрощение вычислений состоит в замене величины $\eta_n^{(k)}$ на

$$\zeta_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{x^n}{n!} e^{-x} \eta_n^{(k)}, \quad (5)$$

которая также является оценкой обратной энтропии, поскольку получена усреднением по распределению Пуассона.

Положим

$$L_k(x) = \mathbb{E} \zeta_k(x). \quad (6)$$

Нахождение асимптотики величины $L_k(x)$ при $x \rightarrow \infty$ и является основной задачей настоящей работы.

Подчеркнем, что стандартное применение тауберовых теорем показывает, что асимптотика $L_k(x)$ при $x \rightarrow \infty$ дает и асимптотику $\mathbb{E} \eta_n^{(k)}(\rho)$ при $n \rightarrow \infty$ с точностью до медленно растущей функции.

2. Произвольная мера

В этом разделе рассматривается произвольная инвариантная относительно сдвига эргодическая борелевская вероятностная мера μ .

Пусть ρ – произвольная метрика на пространстве Ω . В этом случае вспомогательная величина $r_n^{(k)}$ определяется следующим образом:

$$r_n^{(k)}(\rho) = -\frac{1}{(n+1)} \sum_{j=0}^n \ln \left(\min_{i:i \neq j}^{(k)} \rho(\xi_i, \xi_j) \right). \quad (7)$$

Оценки (3), (5) строятся по таким же формулам и будут обозначаться как $\eta_n^{(k)}(\rho)$, $\zeta_k(x, \rho)$.

При доказательстве теоремы 1 из [8] получена формула (4.8), которую приведем в следующем виде.

Утверждение 1. Пусть ρ – произвольная метрика на пространстве Ω , тогда

$$\mathbb{E} r_n^{(k)}(\rho) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^1 \chi(t, \rho) t^{k-1} (1-t)^{n-k-1} dt. \quad (8)$$

Здесь через $\chi(t, \rho)$ обозначается функция

$$\chi(t, \rho) = - \int_{\Omega} \ln \nu(t, \omega) d\mu(\omega), \quad (9)$$

через $B(\omega, r)$ – шар радиуса r с центром в точке ω , а через $r = \nu(t, \omega)$ – обобщенная обратная функция к мере шара $t = \mu(B(\omega, r))$ (при заданном ω), т.е.

$$\nu(t, \omega) = \sup\{r : \mu(B(\omega, r)) < t\}. \quad (10)$$

Проинтегрировав по частям, перепишем выражение (8), а затем заменим обратную функцию $\nu(t, \omega)$. В результате получим

Утверждение 2. Пусть выполнено условие

$$\exists \alpha > 0 : \mu(B(\omega, r)) = \mathcal{O}(r^\alpha), \text{ для } \mu - \text{почти всех } \omega \in \Omega, \quad (11)$$

тогда

$$\mathbb{E}r_n^{(k)}(\rho) = \int_0^1 \int_{\Omega} \left[1 - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \mu(B(\omega, r))^i (1 - \mu(B(\omega, r)))^{n-i} \right] \frac{dr}{r} d\mu(\omega). \quad (12)$$

Следствие 1. Пусть выполнены условия утверждения 2, тогда

$$\mathbb{E}\eta_n^{(k)}(\rho) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^1 \int_{\Omega} \mu(B(\omega, r))^k (1 - \mu(B(\omega, r)))^{n-k} \frac{dr}{r} d\mu(\omega). \quad (13)$$

Следствие 2. Пусть выполнены условия утверждения 2, тогда

$$\mathbb{E}\zeta_k(x, \rho) = \int_0^1 \int_{\Omega} \phi_k(x\mu(B(\omega, r))) \frac{dr}{r} d\mu(\omega), \quad (14)$$

где через $\phi_k(x)$ обозначается функция

$$\phi_k(x) = \frac{x^k}{(k-1)!} e^{-x}. \quad (15)$$

Теорема 1. Пусть μ – инвариантная относительно сдвига эргодическая борелевская вероятностная мера, тогда для $k = o(n)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}r_n^{(k)}}{\ln n} = \frac{1}{h}.$$

Доказательство. Для метрики

$$\rho_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = e^{-\min\{k: x_k \neq y_k\}} \quad (16)$$

из теоремы 1 и предложения 8 из [8] получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}r_n^{(k)}(\rho_1)}{\ln n} = \frac{1}{h},$$

при $k = o(n)$.

Из определений (4), (7) видно, что

$$r_n^{(k)}(\rho_1) = r_n^{(k)}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы. $\square$

Упростим формулы.

Утверждение 3. Для метрики (1)

$$\mathbb{E}\eta_n^{(k)} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\Omega} \mu(C_m(\omega))^k (1 - \mu(C_m(\omega)))^{n-k} d\mu(\omega). \quad (17)$$

$$L_k(x) = \mathbb{E}\zeta_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\Omega} \phi_k(x\mu(C_m(\omega))) d\mu(\omega). \quad (18)$$

Доказательство. Ясно, что для метрики (16)

$$C_n(\omega) = B(\omega, e^{-n}) = B(\omega, r), \quad e^{-n-1} < r \leq e^{-n}. \quad (19)$$

Поэтому для каждой меры μ и функции $f(x)$ имеем

$$\int_0^1 f(\mu(B(\omega, r))) \frac{dr}{r} = \sum_{m=0}^{\infty} f(\mu(C_m(\omega))) \int_{e^{-m-1}}^{e^{-m}} \frac{dr}{r} = \sum_{m=0}^{\infty} f(\mu(C_m(\omega))).$$

Подставляя это равенство в (13) и в (14), получим требуемые формулы. $\square$

Для нахождения $L_k(x)$ будем применять преобразование Меллина

$$\tilde{L}_k(z) = \int_0^{\infty} L_k(x) x^{z-1} dx. \quad (20)$$

Вычисляя интегралы через гамма-функцию, получим

Утверждение 4. В полосе $-k < \operatorname{Re} z < 0$

$$\tilde{L}_k(z) = \frac{\Gamma(k+z)}{\Gamma(k)} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Omega} \mu(C_n(\omega))^{-z} d\mu(\omega). \quad (21)$$

3. Мера Бернулли

В этом разделе для меры Бернулли будет найдено явное выражение для асимптотики величины $L_k(x)$ – смещения оценки 3.

Найдем функцию $\tilde{L}_k(z)$.

Пусть μ – мера Бернулли с параметрами p_a , $a \in \mathcal{A}$, тогда

$$\mu(C_n(a\omega)) = p_a \mu(C_{n-1}(\omega)), \quad n > 0.$$

Подставляя эти условия в (21), получим

$$\begin{aligned}\tilde{L}_k(z) &= \frac{\Gamma(k+z)}{\Gamma(k)} \left[1 + \sum_{a \in \mathcal{A}} p_a \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} \mu(C_n(a\omega))^{-z} d\mu(\omega) \right] = \\ &= \frac{\Gamma(k+z)}{\Gamma(k)} + \sum_{a \in \mathcal{A}} p_a^{1-z} \tilde{L}_k(z).\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\tilde{L}_k(z) = \frac{\Gamma(k+z)}{\Gamma(k) \left(1 - \sum_{a \in \mathcal{A}} p_a^{1-z} \right)}. \quad (22)$$

Отметим, что аналогичные уравнения возникают в задачах анализа алгоритмов [5, упр. 5.2.2.53], [7], [2].

Стандартный подход к определению асимптотики $L_k(x)$ состоит в нахождении обратного преобразования Меллина.

$$L_k(x) = \frac{1}{2\pi i \Gamma(k)} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(k+z)x^{-z}}{1 - \sum_{a \in \mathcal{A}} p_a^{1-z}} dz, \quad (23)$$

где $0 < \sigma < 1$.

Для нахождения $L_k(x)$ по формуле (23) рассмотрим в комплексной области прямоугольник

$$D_\beta = \{z : -\sigma \leq \Re z \leq \alpha; -\beta \leq \Im z \leq \beta\}.$$

Обозначим через z_m , $m \in \mathbb{Z}$ корни уравнения

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} p_a^{1-z} = 1 \quad (24)$$

и будем считать, что $z_0 = 0$, тогда по теореме о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D_\beta} \frac{\Gamma(k+z)x^{-z}}{1 - \sum_{a \in \mathcal{A}} p_a^{1-z}} dz = \sum_{z_m \in D_\beta} \operatorname{Res} \left(\frac{\Gamma(k+z)x^{-z}}{1 - \sum_{a \in \mathcal{A}} p_a^{1-z}}, z_m \right).$$

Здесь интеграл по контуру берется в направлении против часовой стрелки.

Поскольку все корни простые, а функция $\Gamma(z)$ имеет только простые полюса в точках $0, -1, -2, \dots$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D_\beta} \frac{\Gamma(k+z)x^{-z}}{1 - \sum_{a \in \mathcal{A}} p_a^{1-z}} dz = \sum_{z_m \in D_\beta} \frac{\Gamma(k+z_m)x^{-z_m}}{\sum_{a \in \mathcal{A}} p_a^{1-z_m} \ln p_a}. \quad (25)$$

Утверждение 5. *Вещественные части корней уравнения (24) удовлетворяют неравенству*

$$0 \leq \Re z < \sigma_0, \quad (26)$$

где σ_0 – некоторая константа.

Если хотя бы одно число $\frac{\ln p_a}{\ln p_b}$, $a, b \in \mathcal{A}$ – иррациональное, то точка z_0 является единственным корнем на мнимой прямой.

Если все числа $\frac{\ln p_a}{\ln p_b}$, $a, b \in \mathcal{A}$ – рациональные, то вещественные части корней принимают только конечное число значений.

Оценим интегралы по границе прямоугольника.

Лемма 1. Пусть β такое, что на прямой $\Im z = \beta$ нет корней уравнения (24), пусть

$$I_1(x, \beta) = \int_{-\sigma+i\beta}^{\alpha+i\beta} \frac{\Gamma(k+z)x^{-z}}{1 - \sum_{a \in \mathcal{A}} p_a^{1-z}} dz,$$

тогда

$$|I_1(x, \beta)| \leq C_1 e^{-\pi|\beta|/2} x^\sigma. \quad (27)$$

Доказательство. Для оценки гамма-функции применим формулу [1, 8.328.1], которую запишем в следующем виде:

$$|\Gamma(x+iy)| \leq C e^{-\pi|y|/2} |y|^{-x+1/2}.$$

В нашем случае

$$|\Gamma(k+z)| \leq C e^{-\pi|\beta|/2} |\beta|^{\sigma+1/2-k} \leq C e^{-\pi|\beta|/2}. \quad (28)$$

Подставляя эту оценку в $I_1(x, \beta)$, получим (27) с константой

$$C_1 = C(\alpha + \sigma) / \min \left(1 - \sum_{a \in \mathcal{A}} p_a^{1-z} \right),$$

где минимум берется по отрезку интегрирования. □

Лемма 2. Пусть α такое, что на прямой $\Re z = \alpha$ нет корней уравнения (24) и

$$|1 - \sum_{a \in \mathcal{A}} p_a^{1-z}| > \gamma > 0,$$

пусть

$$I_2(x, \beta) = \int_{\alpha-i\beta}^{\alpha+i\beta} \frac{\Gamma(k+z)x^{-z}}{1 - \sum_{a \in \mathcal{A}} p_a^{1-z}} dz,$$

тогда

$$|I_2(x, \beta)| \leq C_2 x^{-\alpha}. \quad (29)$$

Доказательство. Внесем модуль под интеграл

$$|I_2(x, \beta)| \leq \frac{x^{-\alpha}}{\gamma} \int_{-\beta}^{\beta} |\Gamma(k + \alpha + iy)| dy < \frac{x^{-\alpha}}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(k + \alpha + iy)| dy.$$

Последний интеграл существует, что очевидно из оценки (28). Подставляя, получим (29). □

Лемма 3. Пусть $\beta > 0$,

$$I_3(x, \beta) = \int_{-\sigma+i\beta}^{-\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(k+z)x^{-z}}{1 - \sum_{a \in \mathcal{A}} p_a^{1-z}} dz,$$

тогда

$$|I_3(x, \beta)| \leq C_3 e^{-\pi\beta/2} x^\sigma. \quad (30)$$

Доказательство. Внесем модуль под интеграл

$$|I_3(x, \beta)| \leq \frac{x^\sigma}{1 - \sum_{a \in \mathcal{A}} p_a^{1+\sigma}} \int_{\beta}^{\infty} |\Gamma(k - \sigma + iy)| dy.$$

Для оценки гамма-функции применим формулу (28). Проинтегрировав, получим (30). $\square$

Теорема 2. Пусть α такое, что на прямой $\Re z = \alpha$ нет корней уравнения (24) и

$$|1 - \sum_{a \in \mathcal{A}} p_a^{1-z}| > \gamma > 0,$$

тогда

$$L_k(x) = - \sum_{z_m} \frac{\Gamma(k + z_m) x^{-z_m}}{\Gamma(k) \sum_{a \in \mathcal{A}} p_a^{1-z_m} \ln p_a} + \mathcal{O}(x^{-\alpha}), \quad (31)$$

где суммирование идет по всем корням уравнения (24), лежащим в полосе $0 \leq \Re z_m < \alpha$.

Доказательство. Подставляя в (23) формулу вычетов (25) и оценивая оставшиеся интегралы по леммам 1 – 3, получим

$$L_k(x) = - \sum_{z_m \in D_\beta} \frac{\Gamma(k + z_m) x^{-z_m}}{\Gamma(k) \sum_{a \in \mathcal{A}} p_a^{1-z_m} \ln p_a} + \mathcal{O}(e^{-\pi\beta/2} x^\sigma) + \mathcal{O}(x^{-\alpha}).$$

Знак минус здесь ставится потому, что интеграл по контуру берется в направлении по часовой стрелке.

Возьмем

$$\beta = \frac{2}{\pi}(\alpha + \sigma) \ln x,$$

тогда оценки погрешностей интегралов совпадают, а вычеты корней вне прямоугольника D_β имеют порядок $\mathcal{O}(x^{-\alpha})$. $\square$

4. Нули функции $1 - p^{1-z} - q^{1-z} = 0$

Исследование нулей функции $1 - p^{1-z} - q^{1-z} = 0$ проводилось в ряде работ (см. [7] и ссылки в этой книге), но результаты не полные и частично ошибочные. Поэтому в этом разделе будет описано правило нахождения корней уравнения

$$1 - p^{1-z} - q^{1-z} = 0$$

и дано их описание.

Перейдем к вещественным переменным, положив $z = x + iy$. Рассматриваемое уравнение примет вид

$$\begin{cases} p^{1-x} \cos(y \ln p) + q^{1-x} \cos(y \ln q) = 1 \\ p^{1-x} \sin(y \ln p) = -q^{1-x} \sin(y \ln q). \end{cases} \quad (32)$$

Возведя в квадрат второе уравнение и подставив первое (при этом получаются посторонние корни), получим

$$\begin{cases} \cos(y \ln p) = \frac{1 + p^{2-2x} - q^{2-2x}}{2p^{1-x}} \\ \cos(y \ln q) = \frac{1 - p^{2-2x} + q^{2-2x}}{2q^{1-x}}. \end{cases} \quad (33)$$

Для исследования правой части введем вспомогательную функцию, зависящую от параметра b

$$f(t; b) = \frac{1}{2t} (1 + t^2 - t^{2b}). \quad (34)$$

Нетрудно проверить, что функция $f(t; b)$ обладает следующими свойствами.

Утверждение 6. 1. При $b > 1$ функция $f(t; b)$ монотонно убывает в области $t > 0$.
 2. При $b > 0$ $f(t_1; b) = 1$, где t_1 является решением уравнения $t_1^b + t_1 - 1 = 0$.
 3. При $b > 1$ $f(t_2; b) = -1$, где t_2 является решением уравнения $t_2^b - t_2 - 1 = 0$.
 4. При $0 < b < 1$ в области $t > 0$ функция $f(t; b)$ имеет единственную точку минимума.

5. При $0 < b < 1$ $f(t_3; b) = 1$, где t_3 является решением уравнения $t_3^b - t_3 + 1 = 0$.

Для определенности будем считать, что $p > q$ и для краткости введем обозначение

$$a = \frac{\ln p}{\ln q} \leq 1. \quad (35)$$

Используя введенные обозначения, уравнения (33) переписываются в следующем виде:

$$\begin{cases} \cos(y \ln p) = f(p^{1-x}; 1/a) \\ \cos(y \ln q) = f(q^{1-x}; a). \end{cases}$$

Согласно утверждению 6 функция $f(t; 1/a)$ обратима ($a < 1$), поэтому

$$p^{1-x} = f^{-1}(\cos(y \ln p); 1/a).$$

Подставляя x во второе уравнение и учитывая посторонние корни, получим следующее утверждение.

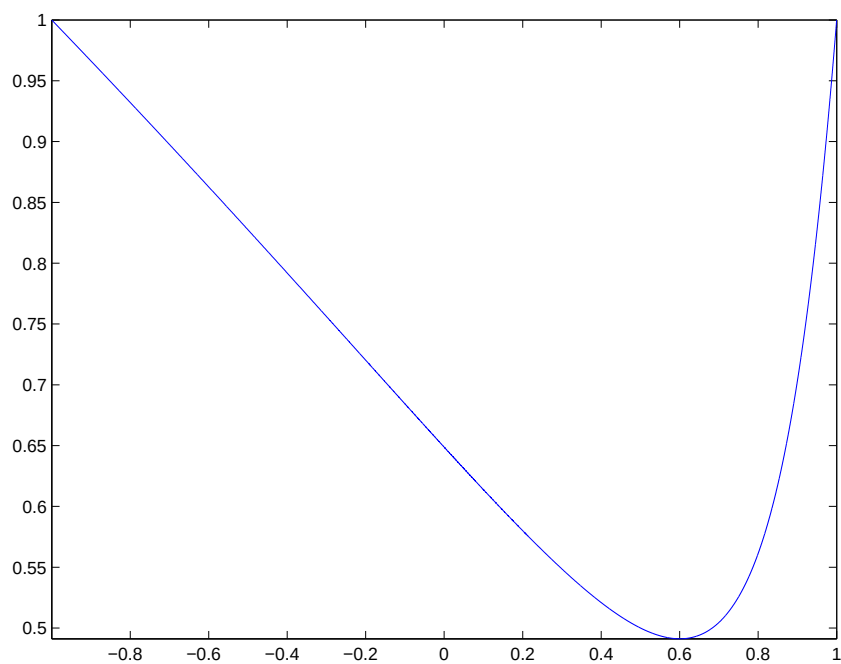


Рис. 1. График функции $f\left(f^{-1}(t; 1/a)^{1/a}; a\right)$ при $p = 2/3$.

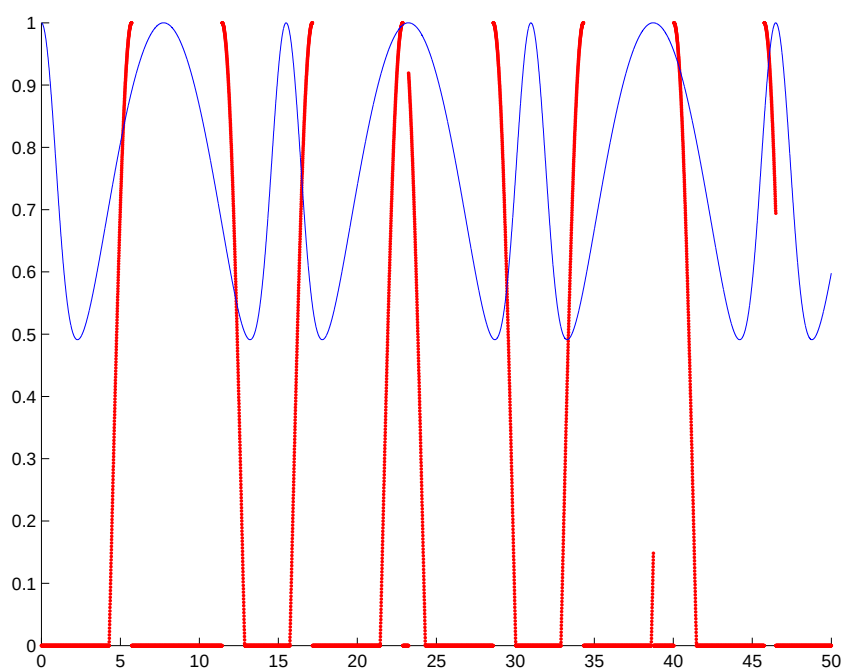


Рис. 2. График правой части уравнения (36) (сплошная линия) и график тех значений левой части (36), которые удовлетворяют условию (37) (точечная линия) при $p = 2/3$.

Утверждение 7. Уравнение $1 - p^{1-z} - q^{1-z} = 0$ имеет счетное число корней $z_k =$

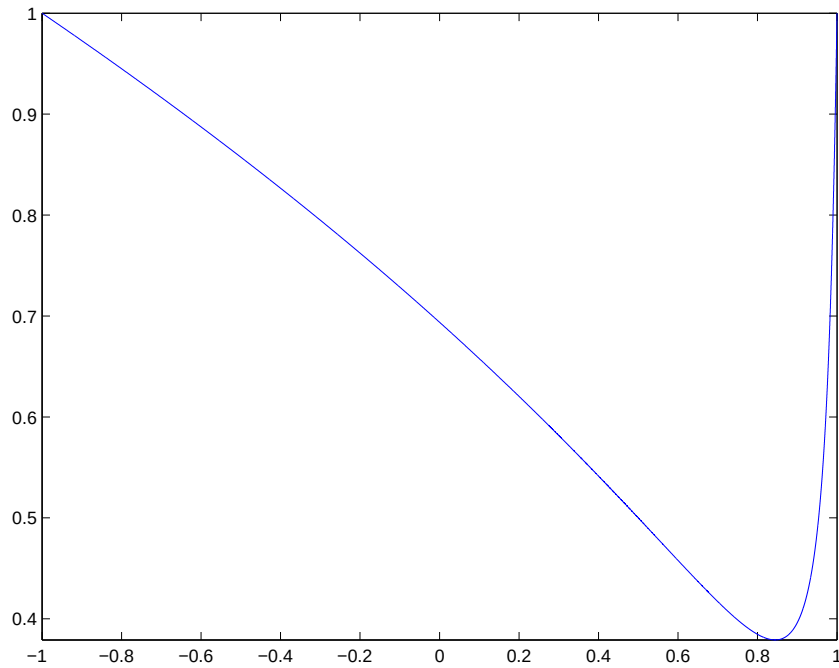


Рис. 3. График функции $f\left(f^{-1}(t; 1/a)^{1/a}; a\right)$ при $p = 5/6$.

$x_k + iy_k$, $k \in \mathbb{Z}$. Величины y_k находятся как те решения уравнения

$$\cos(y \ln q) = f\left(f^{-1}(\cos(y \ln p); 1/a)^{1/a}; a\right), \quad (36)$$

которые удовлетворяют равенству

$$\text{sign}(\sin(y \ln p)) = -\text{sign}(\sin(y \ln q)). \quad (37)$$

Для каждого значения y_k величина x_k находится как единственное решение уравнения

$$f(p^{1-x}; 1/a) = \cos(y_k \ln p). \quad (38)$$

На рис. 1, 3 показаны примеры графиков функции $f\left(f^{-1}(t; 1/a)^{1/a}; a\right)$. На рис. 2, 4 показаны примеры графиков правой и левой части уравнения (36).

Замечание 1. Вещественные части корней уравнения $1 - p^{1-z} - q^{1-z} = 0$ удовлетворяют неравенству

$$0 \leq \Re z < \sigma, \quad (39)$$

где σ_0 является решением уравнения ($p > q$)

$$1 + p^{1-\sigma_0} = q^{1-\sigma_0}.$$

Если $a = \frac{\ln p}{\ln q}$ – иррациональное, то точка 0 является точной нижней гранью вещественной части остальных корней.

Если $a = \frac{m}{n} < 1$, $m, n \in \mathbb{Z}$, то вещественные части корней принимают только n значений.

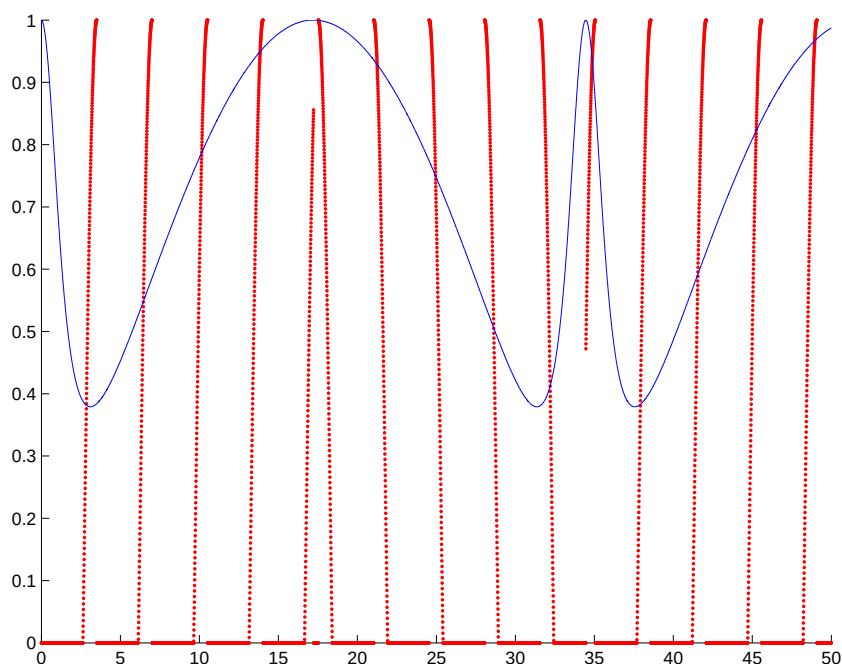


Рис. 4. График правой части уравнения (36) (сплошная линия) и график тех значений левой части (36), которые удовлетворяют условию (37) (точечная линия) при $p = 5/6$.

Список литературы

1. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
2. Flajolet P., Sedgewick R. Analytic Combinatorics. Cambridge University Press, 2008.
3. Kaltchenko A., Timofeeva N. Entropy Estimators with Almost Sure Convergence and an $O(n^{-1})$ Variance // Advances in Mathematics of Communications. 2008. Vol. 2, №1. P. 1–13.
4. Kaltchenko A., Timofeeva N. Rate of convergence of the nearest neighbor entropy estimator // AEU - International Journal of Electronics and Communications. 2010. Vol. 64, №1. P. 75–79.
5. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Том 3. М.: Мир, 1978.
6. Мартин Д., Ингленд Дж. Математическая теория энтропии. М.: Мир, 1988.
7. Wojtek Szpankowski. Average Case Analysis of Algorithms on Sequences, John Wiley & Sons, New York, 2001.
8. Тимофеев Е.А. Статистически оцениваемые инварианты мер // Алгебра и анализ. 2005. Т.17. №3. С. 204–236.

On asymptotics of the entropy estimator bias for Bernoulli measures

Timofeev E.A.

Keywords: entropy, nonparametric statistic, moments, Bernoulli measure

We consider Bernoulli measures and obtain a closed-form expression of the entropy estimator bias.

Сведения об авторе:

Тимофеев Евгений Александрович,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
д-р физ.-мат. наук, профессор