Модел. и анализ информ. систем. Т. **16**, № **4** (2009) 109–116

УДК 517.9

Нормализация уравнения с линейно распределенным запаздыванием

Кащенко И.С.[1]

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

e-mail: iliyask@uniyar.ac.ru

получена 20 ноября 2009

Ключевые слова: запаздывание, сингулярное возмущение, нормальная форма

Изучаются свойства локальной динамики дифференциального уравнения с линейно распределенным запаздыванием. Выявлены параметры, при которых имеют место критические случаи. Показано, что критические случаи имеют бесконечную размерность, в каждом критическом случае построены специальные уравнения, описывающие динамику исходной задачи, — аналоги нормальных форм.

1. Дифференциальные уравнения с запаздыванием служат математическими моделями для многих прикладных задач [1, 2, 3, 4]. Среди них важное место занимают системы, в которых время запаздывания относительно велико. Для уравнений с запаздыванием характерно наличие многих специфических эффектов и явлений, обусловленных тем, что фазовое пространство является бесконечномерным.

Важно отметить, что задачи о локальной (т.е. в малой окрестности стационара) динамике сингулярно возмущенных систем с запаздыванием могут быть достаточно сложными и специфичными. В настоящей работе развивается метод исследования локальной динамики в окрестности состояния равновесия, предложенный в [5, 6, 7].

Одним из простейших и в то же время наиболее часто встречающихся в прикладных задачах [4, 8, 9] уравнений с запаздыванием является скалярное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{x} + x = ax(t-T) + F(x, x(t-T)), \quad T > 0. \tag{1}$$

В работах [5, 10, 11] подробно изучена локальная динамика уравнения (1) при условии $T \gg 1$. Наиболее важным результатом является то, что в критических случаях поведение решений уравнения (1) определяется глобальной динамикой семейства параболических уравнений с произвольным положительным параметром.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (государственный контракт № 02.740.11.0197).

Обобщением уравнения (1) является ситуация, когда в уравнение входят значения неизвестной функции, не в отдельных точках, а на некотором промежутке $[t-T,t]$. Общий вид уравнений такого типа

$$\dot{x}+x=\int\limits_{-T}^{0}x(t+s)dr(s)+f(x).T>0. \tag{2}$$

Функция f нелинейная, т.е. имеет в нуле порядок малости выше первого. Поэтому в окрестности нуля мы представим ее в виде

$$f(x)=f_2x^2+f_3x^3+\dots$$

Исследуем локальную динамику в окрестности нулевого состояния равновесия уравнения (2) при условии $T\gg 1$.

Нам будет удобно произвести замену времени $t\to tT$ и замену $x(tT)\to x(t)$. В итоге приходим к уравнению

$$\varepsilon^2\dot{x}+\varepsilon x=\int\limits_{-1}^{0}x(t+s)dr(sT)+\varepsilon f(x), \tag{3}$$

где $\varepsilon=T^{-1}\ll 1$.

Как известно, о локальной динамике (3) можно судить по поведению решений линеаризованного уравнения

$$\varepsilon^2\dot{x}+\varepsilon x=\int\limits_{-1}^{0}x(t+s)dr(sT).$$

Подставим сюда $x=\exp(\lambda t)$. В результате получим следующее уравнение:

$$\varepsilon^2\lambda+\varepsilon=\int\limits_{-1}^{0}\exp(\lambda s)\,dr(sT). \tag{4}$$

Уравнение (4) является характеристическим уравнением для задачи (3). Это значит, что динамика исходной задачи вблизи нулевого состояния равновесия описывается расположением корней характеристического уравнения.

В настоящей работе будет изучено поведение решений уравнения (3) в случае, когда функция $r(s)$ такова, что уравнение имеет вид

$$\varepsilon^2\dot{x}+\varepsilon x=\int\limits_{-1}^{0}(a+bs)x(t+s)ds+\varepsilon f(x). \tag{5}$$

Характеристическое уравнение (4) принимает вид

$$\varepsilon^2\lambda+\varepsilon=a\lambda^{-1}[1-e^{-\lambda}]+b\lambda^{-1}e^{-\lambda}-b\lambda^{-2}[1-e^{-\lambda}]. \tag{6}$$

Относительно корней уравнения (6) можно сделать несколько утверждений.

Теорема 1. *Пусть выполнено одно из условий:*

1) $a > 0$*;*

2) $2a + 1 > 0$*,* $|b - a| > |a|$*;*

3) $2a + 1 < 0$*,* $|b - a| > \frac{1}{2}\sqrt{-(1 + 4a)}$*.*

Тогда при всех достаточно малых ε *у уравнения* (6) *существует корень с положительной вещественной частью. При этом нулевое решение задачи (5) неустойчиво, в его некоторой не зависящей от* ε *окрестности нет устойчивых режимов при любой функции* $f(x)$*.*

Теорема 2. *Пусть выполнено одно из условий:*

1) $a < 0$*,* $2a + 1 > 0$*,* $|b - a| < |a|$*;*

2) $a < 0$*,* $2a + 1 < 0$*,* $|b - a| < \frac{1}{2}\sqrt{-1(1 + 4a)}$*.*

Тогда при достаточно малых ε *все корни характеристического квазиполинома* (6) *имеют отрицательные вещественные части и отделены от мнимой оси при* $\varepsilon \to 0$*. Нулевое решение задачи (5) асимптотически устойчиво при любой функции* $f(x)$*.*

Если параметры a и b таковы, что условия ни одной из теорем не выполняются, то необходимо проводить дополнительные исследования. При этом у характеристического квазиполинома (6) нет корней, отделенных от мнимой оси при $\varepsilon \to 0$, с положительной вещественной частью, и есть бесконечное количество корней $\lambda_k(\varepsilon)$, действительная часть которых стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Как будет показано ниже, ситуация существенно зависит от знака выражения $2a+1$. Если $2a+1 > 0$, то критический случай реализуется при условии $|a-b| = |a|$ (обязательно также должно выполняться условие $a < 0$), т.е. при $b = 0$ либо при $b = 2a$. Если $2a + 1 < 0$, критический случай возникает при $b = b_\pm = a \pm \frac{1}{2}\sqrt{-1(1 + 4a)}$ (в этом случае также $a < 0$).

Разберем отдельно все варианты значений параметров, при которых имеет место критический случай.

2. Исследуем динамику (5) в случае b, близкого к нулю. Пусть

$$a < 0, \quad 2a + 1 > 0, \quad b = \mu b_1, \quad 0 < \mu \ll 1. \tag{7}$$

Сначала будем считать, что $\mu = \varepsilon^2$. В этом случае исходное уравнение (5) принимает вид

$$\varepsilon^2 \dot{x} + \varepsilon x = \int\limits_{-1}^{0} (a + \varepsilon^2 b_1 s) x(t + s) ds + \varepsilon f(x). \tag{8}$$

У характеристического уравнения (6) в этом случае нет корней, отделенных от мнимой оси и лежащих в правой комплексной полуплоскости, и есть бесконечно много корней $\lambda_k(\varepsilon)$, $k \in Z$, $k \neq 0$, таких что $\operatorname{Re}\lambda_k \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Такие корни можно представить в виде

$$\lambda_k(\varepsilon) = 2k\pi \left(1 + \frac{1}{a}\right) i + \varepsilon^2 \left(-2\pi^2 k^2 \frac{2a + 1}{a^2} + \frac{2\pi k}{a^2} i + b_1\right) + \ldots$$

Представим x в виде формального ряда

$$x = \varepsilon u(\tau, t_1) + \varepsilon^2 x_2(t_1, \tau) + \varepsilon^3 x_3(t_1, \tau) + \ldots,$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$, $t_1 = (1+\varepsilon a^{-1}+\varepsilon^2 a^{-2})t$, а $u(\tau, t_1)$ и $x_i(t_1, \tau)$ периодичны по t_1 с периодом 1.

Подставим этот ряд в (8) и соберем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Из условия разрешимости уравнения при ε^3 получим краевую задачу параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{2a+1}{2a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + b_1 u - f_2 \frac{\partial}{\partial r} u^2, \quad u(\tau, r) = u(\tau, r+1), \quad \int\limits_0^1 u(\tau, r)\, dr = 0. \qquad (9)$$

Уравнение (9) является нормализованной формой для исходного уравнения (5). Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть задача (9) имеет решение $u_0(\tau, r)$. Тогда у уравнения (8) существует асимптотическое по невязке на луче $t \geqslant 0$ решение*

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon u_0(\varepsilon^2(1+o(1))t, t(1+\varepsilon a^{-1}+\varepsilon^2 a^{-2}+o(1))) + o(\varepsilon).$$

Исходя из этой теоремы мы не можем сделать вывод о существовании у (8) точного решения с приведенной асимптотикой. Однако, если u_0 является неустойчивым решением (9), то если точное решение и существует, то оно неустойчиво. Поэтому нужно рассматривать только устойчивые решения (9).

Рассмотрим теперь ситуацию, когда в (7) $\mu = \varepsilon^p$, $0 < p < 2$. В этом случае асимптотику корней (6), стремящихся к мнимой оси, удобно записать в виде

$$\lambda_k(\varepsilon) = \frac{\omega k}{\varepsilon^{1-p/2}} i + \theta(\varepsilon) k i + \varepsilon^{p/2}\left(\frac{1}{a} + o(1)\right) i + \varepsilon^p \left(b_1 - \omega^2 k^2 \frac{2a+1}{a^2} + o(1)\right).$$

Здесь $\omega > 0$ произвольный параметр, а $\theta(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$ таково, что $\theta(\varepsilon)+\omega\varepsilon^{p/2-1}$ кратно 2π. Выполним в (8) замену

$$u = \varepsilon^p u(\tau, t_1) + \varepsilon^{2p} x_2(t_1, \tau) + \varepsilon^{3p} x_3(t_1, \tau) + \ldots,$$

где $\tau = \varepsilon^{2p} t$, $t_1 = (\omega\varepsilon^{p/2-1} + \theta(\varepsilon) + \varepsilon^{p/2} a^{-1} + o(\varepsilon^{p/2}))t$, а $u(\tau, t_1)$ и $x_i(t_1, \tau)$ $2\pi/\omega$-периодичны по первому аргументу. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, мы, как и выше, придем к параболическому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{2a+1}{2a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + b_1 u - f_2 \frac{\partial}{\partial r} u^2, \quad u(\tau, r) = u(\tau, r+\frac{2\pi}{\omega}), \quad \int\limits_0^{2\pi\omega^{-1}} u(\tau, r)\, dr = 0. \quad (10)$$

Эта краевая задача играет роль нормализованной формы в рассматриваемом случае. Справедлив аналог теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть при некотором $\omega > 0$ задача (10) имеет решение $u_0(\tau, r)$. Тогда у уравнения (8) существует асимптотическое по невязке на луче $t \geqslant 0$ решение*

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon^p u_0(\varepsilon^2(1+o(1))t, (\omega\varepsilon^{p/2-1} + \theta(\varepsilon) + \varepsilon^{p/2} a^{-1} + o(\varepsilon^{p/2}))t) + o(\varepsilon^p).$$

Ситуация с существованием точного решения здесь точно такая же, как и выше.

3. Рассмотрим случай, когда параметр b близок к $2a$. Пусть

$$a < 0, \quad 2a + 1 > 0, \quad b = 2a + b_1\mu, \quad 0 < \mu \ll 1.$$

Тогда исходное уравнение (5) принимает вид

$$\varepsilon^2\dot{x} + \varepsilon x = \int\limits_{-1}^{0} (a + (2a + b_1\mu)s)\, x(t+s)ds + \varepsilon f(x). \tag{11}$$

Отметим, что в этом случае при $\mu = 0$ для ядра интеграла в (11) выполняется

$$\int\limits_{-1}^{0} (a + bs)ds = 0.$$

Характеристическое уравнение (6) имеет набор корней, стремящихся к мнимой оси. Их асимптотика записывается как

$$\lambda_k(\varepsilon) = i\omega_k + o(1),$$

где ω_k — это корни уравнения

$$e^{-i\omega} = \frac{2 - i\omega}{2 + i\omega}.$$

Их счетное число, причем $\omega_k = \pi(2k+1) + \nu_k$, $\nu_k \in (0, \pi/2)$, $\lim\limits_{k\to\pm\infty} \nu_k = 0$ $(k \in Z)$.

В отличие от предыдущего случая, корни характеристического уравнения не образуют точных резонансов при разных номерах k, однако при больших номерах k соотношения на λ_k будут бесконечно близки к резонансным. Построение уравнений, играющих роль нормальных форм, в этом случае затруднительно.

4. Изучим динамику (5) в критических случаях, которые возникают при условии $2a + 1 < 0$. Положим

$$a < 0, \quad 2a + 1 < 0, \quad b = b_\pm + \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2. \tag{12}$$

Тогда уравнение (5) имеет вид

$$\varepsilon^2\dot{x} + \varepsilon x = a\int\limits_{-1}^{0} (a + (b_\pm + \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2)s)x(t+s)ds + \varepsilon f(x). \tag{13}$$

Характеристическое уравнение (6) имеет в этом случае счетное множество корней $\lambda_k(\varepsilon)$, стремящихся к мнимой оси.

Сделаем несколько обозначений. Пусть $\omega_0 = \sqrt{-(4a+2)}$, через $\theta(\varepsilon)$ обозначим число из полуинтервала $[0, 2\pi)$ такое, что $\omega_0\varepsilon^{-1} + \theta(\varepsilon)$ кратно 2π, а через $\Omega \in [0, 2\pi)$ – решение уравнения

$$e^{-i\Omega} = \frac{-\omega_0^2 + \omega_0 i - a}{b_\pm - a}.$$

Если $b_1 \neq -1 \mp 2a\sqrt{-(1+4a)^{-1}}$, то

$$\begin{aligned}\lambda_k(\varepsilon) &= \left(\frac{\sqrt{-(4a+2)}}{2\varepsilon} + \theta(\varepsilon) + \Omega + 2\pi k\right) i + \\ &+ \varepsilon\left(\frac{4a \pm 2(1+b_1)\sqrt{-(1+4a)}}{1+4a} + ic - 4\pi ik\right) + \ldots\end{aligned}$$

В случае $b_1 = -1 \mp 2a\sqrt{-(1+4a)^{-1}}$

$$\begin{aligned}\lambda_k(\varepsilon) &= \left(\frac{\sqrt{-(4a+2)}}{2\varepsilon} + \theta(\varepsilon) + \Omega + 2\pi k\right) i + \varepsilon\,(ic - 4\pi ik) + \\ &+ \varepsilon^2(-4\pi^2k^2(d_1+id_2) + 2\pi ik(d_3+id_4) + d_5 + id_6)\ldots,\end{aligned}$$

где действительные числа $d_1 > 0$, d_2 $d_3 = d_3(\theta(\varepsilon))$, $d_4 = d_4(\theta(\varepsilon))$, $d_5 = d_5(\theta(\varepsilon))$, $d_6 = d_6(\theta(\varepsilon))$ и c однозначно определяются через параметры a, b_2 и ε.

Первый случай. Пусть $b_1 \neq -1 \mp 2a\sqrt{-(1+4a)^{-1}}$. Представим x в виде ряда

$$x = \sqrt{\varepsilon}\left(e^{it_0}u(\tau,t_1) + e^{-it_0}\overline{u}(\tau,t_1)\right) + \varepsilon x_2(t_0,t_1,\tau) + \varepsilon^{3/2}x_3(t_0,t_1,\tau) + \ldots,$$

где $t_0 = (\omega_0(2\varepsilon)^{-1} + \theta(\varepsilon) + \Omega + \varepsilon c)t$, $t_1 = (1-2\varepsilon)t$, $\tau = \varepsilon t$, u периодично по t_1, а x_2 и x_3 периодичны по t_0 и t_1. Подставим выражение для x в (13) и соберем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Из равенства коэффициентов при $\varepsilon^{5/2}$ получим уравнение относительно x_3. Условие существования у него периодического решения имеет вид

$$\frac{du}{d\tau} = -\frac{4a \pm 2(1+b_1)\sqrt{-(1+4a)}}{1+4a}u + \frac{\omega_0 ie^{i\Omega}}{b_\pm - a}(2f_2y_1 + 3f_3)u|u|^2, \tag{14}$$

где обозначено

$$y_1 = f_2\left(2i\omega_0 + 1 - \frac{a(1-e^{-2i\Omega}) + a}{2i\omega_0}\right)^{-1}.$$

Здесь $u = u(\tau, r)$ при каждом τ является комплексной периодической функцией параметра r с периодом 1. Это уравнение представляет собой нормализованную форму для уравнения (13). Т.е. справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть уравнение (14) имеет решение $u_*(\tau, r)$, тогда исходное уравнение (13) имеет асимптотическое по невязке решение вида*

$$\begin{aligned}x_*(t,\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\,\big(&e^{(\omega_0/\varepsilon+\theta(\varepsilon)+\Omega+\varepsilon c+o(\varepsilon))it}u_*(\varepsilon t, (1-2\varepsilon+o(\varepsilon))t) + \\ &+ e^{-(\omega_0/\varepsilon+\theta(\varepsilon)+\Omega+\varepsilon c+o(\varepsilon))it}\overline{u}_*(\varepsilon t, (1-2\varepsilon+o(\varepsilon))t)\big) + o(\sqrt{\varepsilon}).\end{aligned}$$

Второй случай. Пусть теперь $b_1 = -1 \mp 2a\sqrt{-(1+4a)^{-1}}$. Положим в (13)

$$x = \varepsilon\left(e^{it_0}u(\tau,t_1) + e^{-it_0}\overline{u}(\tau,t_1)\right) + \varepsilon^2x_2(t_0,t_1,\tau) + \varepsilon^3x_3(t_0,t_1,\tau) + \ldots, \tag{15}$$

где $t_0 = (\omega_0 + \theta(\varepsilon) + \Omega + \varepsilon c)t$, $t_1 = (1 - 2\varepsilon)t$, $\tau = \varepsilon^2 t$, u периодично по t_1, а x_2 и x_3 периодичны по t_0 и по t_1. Производя такие же, как и выше, действия, получим, что роль нормальной формы в этом случае играет уравнение (y_1 такое же, как и выше)

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = (d_1 + id_2)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (d_3 + id_4)\frac{\partial u}{\partial r} + (d_5 + id_6)u + \frac{\omega_0 i e^{i\Omega}}{b_\pm - a}(2f_2 y_1 + 3f_3)u|u|^2 \qquad (16)$$

с краевыми условиями

$$u(\tau, r) = u(\tau, r + 1). \qquad (17)$$

Динамика задачи (16), (17) описывает поведение решений уравнения (13) в окрестности нулевого состояния равновесия. Справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть краевая задача (16), (17) имеет решение $u_*(\tau, r)$, тогда исходное уравнение (13) имеет асимптотическое по невязке решение вида*

$$x_*(t,\varepsilon) = \varepsilon\left(e^{(\omega_0/\varepsilon + \theta(\varepsilon) + \Omega + \varepsilon c + o(\varepsilon))it} u_*(\varepsilon^2 t, (1 - 2\varepsilon + o(\varepsilon))t) + \right.$$

$$\left. + e^{-(\omega_{-1}/\varepsilon + \theta(\varepsilon) + \Omega + \varepsilon c + o(\varepsilon))it} \overline{u}_*(\varepsilon^2 t, (1 - 2\varepsilon + o(\varepsilon))t)\right) + o(\varepsilon).$$

Сделаем несколько обобщений. Предположим, что вместо (12) выполняется

$$a < 0, \quad 2a + 1 < 0, \quad b = b_\pm + \varepsilon^p b_1, \quad 0 < p < 1.$$

Роль нормальной формы в этом случае играет уравнение вида

$$\frac{du}{d\tau} = b_1 A u + B u|u|^2,$$

где A и B — некоторые комплексные постоянные. Функция $u(\tau, r)$ при каждом значении τ является периодической функцией параметра r, причем период можно выбирать произвольно. Выполняется теорема, аналогичная теореме 5.

Если же выполняется

$$a < 0, \quad 2a + 1 < 0, \quad b = b_\pm + (1 \mp 2a\sqrt{-(1 + 4a)^{-1}})\varepsilon + \varepsilon^p b_2, \quad 1 < p < 2,$$

то в качестве нормальной формы получаем семейство уравнений (16) с краевыми условиями

$$u(\tau, r) = u(\tau, r + \omega).$$

Параметр $\omega > 0$ выбирается произвольно. Имеет место теорема, аналогичная теореме 6.

Список литературы

1. *Ланда П.С.* Автоколебания в распределенных системах. М.: Наука, 1983.

2. *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.

3. *Кузнецов С.П.* Сложная динамика генераторов с запаздывающей обратной связью (обзор) // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25, №12. С. 1410–1428.

4. *Kilias T., Kutzer K., Moegel A., Schwarz W.* Electromic chaos generators — design and applications // International Journal of Electronics. 1995. Vol. 79, No. 6. P. 737–753.

5. *Кащенко С.А.* Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной // Диф. уравнения. 1989. Т. 25, №8. С. 1448–1451.

6. *Кащенко С.А.* Уравнения Гинзбурга-Ландау — нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т.38, №3. С. 457–465.

7. *Кащенко С.А.* Локальная динамика нелинейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием // Диф. уравнения. 1999. Т. 35(10). С. 1343–1355.

8. *Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Н., Шарковский А.Н.* Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1986.

9. *Кащенко С.А., Майоров В.В.* Модели волновой памяти. М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2009.

10. *Кащенко И.С.* Локальная динамика уравнений с большим запаздыванием // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48, №12. С. 2141–2150.

11. *Кащенко И.С.* Асимптотический анализ поведения решений уравнения с большим запаздыванием // Доклады Академии Наук. 2008. Т. 421, №5. С. 586–589.

Normalization of equation with linear distributed delay

Kashchenko I.S.

Keywords: delay, singular perturbation, normal form

Some properties of the dynamics of a differential equation with the linear distributed delay is studied. In critical cases, which all have an infinite dimension, special equations – normal forms – were built.

Сведения об авторе: **Кащенко Илья Сергеевич**,
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
канд.-физ. мат. наук, доцент.