Модел. и анализ информ. систем. Т.**16**, №**4** (2008) 132–140

УДК 517.9

О работе семинара «Нелинейная динамика»

В 2009 году в рамках научно-образовательного центра «Нелинейная динамика» продолжил работу научный семинар, посвященный исследованиям поведения, а также методам анализа динамических систем. За прошедший учебный год на нем было заслушано более двадцати сообщений по тематике исследований научно-образовательного центра. Ниже представлены тезисы наиболее интересных докладов, прозвучавших на семинаре.

Колесов А. Ю. Об определении хаоса. Начнем с определений. Через (X,ρ) обозначим некоторое полное метрическое пространство с метрикой ρ и будем считать, что в X задан непрерывный полупоток φ^t. Это означает, что имеется семейство отображений $\varphi^t : X \to X$, $t \geq 0$ со свойствами: $\varphi^0 = I$ (I – тождественный оператор), $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$ $\forall\ t,s \geq 0$; функция $\varphi^t(x)$ непрерывна по совокупности переменных $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times X$. Предположим, далее, что существует непустое замкнутое и ограниченное подмножество $A \subset X$, инвариантное для полупотока φ^t, т. е. $\varphi^t(A) \subset A$ при всех $t \geq 0$. Наиболее популярным в настоящее время является определение хаоса по Девани [1], которое звучит следующим образом.

Определение 1. *Полупоток φ^t называется хаотическим по Девани на инвариантном множестве A при выполнении условий* :

1.1) *φ^t топологически транзитивен, т. е. для любых двух непустых множеств U, $V \subset A$, открытых в топологии пространства (A,ρ), существует такое $t_0 = t_0(U,V) \geq 0$, что $\varphi^{t_0}(U) \cap V \neq \varnothing$;*

1.2) *периодические траектории полупотока $\varphi^t|_A$ плотны в A;*

1.3) *имеет место свойство существенной зависимости от начальных условий, т. е. найдется такое универсальное $\Delta > 0$ (постоянная неустойчивости), что для любых $x \in A, \delta > 0$ выполняется неравенство $\rho(\varphi^{t_0}(x), \varphi^{t_0}(y)) \geq \Delta$ при некоторых $y \in A : \rho(x,y) < \delta$ и $t_0 \geq 0$.*

Вслед за работой [1] довольно быстро появились статьи [2–4], в которых это определение подверглось всестороннему анализу. В частности, в [2] было доказано, что из условий 1.1 и 1.2 вытекает 1.3 (в случае, когда A не состоит из одной периодической траектории), а в [3] установлено, что ни транзитивность, ни плотность периодических траекторий невыводимы из оставшихся двух условий (следует отметить, впрочем, что при этом не предполагалась полнота пространства (A,ρ)). И наконец, в [4] было предложено следующее определение хаоса, обобщающее определение 1.

Определение 2. *Полупоток φ^t называется хаотическим по Кнудсену на инвариантном множестве A при выполнении требований* :

2.1) *справедливо свойство существенной зависимости от начальных условий;*

2.2) *найдется такая траектория $\gamma(x_0) = \{x = \varphi^t(x_0) : t \geq 0\}$ с начальным условием $x_0 \in A$, что $\overline{\gamma(x_0)} = A$.*

Причина, по которой имеет смысл обобщить определение Девани, состоит в том, что на самом деле оно является слишком жестким. Действительно, фундаментальное свойство хаоса – существенная зависимость от начальной точки – оказалось следствием первых двух условий. Поэтому желательно иметь другое определение хаоса, для которого условия 1.1 и 1.2 (в ряде случаев сравнительно легко проверяемые) были бы достаточными. Одним из таких определений как раз и служит определение 2. Действительно, при дополнительном предположении о сепарабельности пространства (A, ρ) из свойства топологической транзитивности вытекает существование всюду плотной в A траектории. Тем самым, в этом случае хаотичность по Девани влечет хаотичность по Кнудсену.

Недостатком определения 2 является, на наш взгляд, его излишняя широта. В самом деле, в рамках данного определения хаотические инвариантные множества могут существовать даже у потоков на двумерном торе. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно взять известный пример Пуанкаре (см. [5, с. 314 – 316]) и заметить, что сужение предложенного им потока на минимальное инвариантное множество будет хаотическим по Кнудсену. Тем самым, проблема поиска нового определения хаоса, которое по возможности не допускало бы подобных артефактов, остается актуальной. Ее решению и посвящена настоящая работа. Точнее говоря, нами предлагается определение хаотического инвариантного множества, которое не только обобщает определение Девани, но и позволяет учесть некоторые специфические особенности, возникающие в случае некомпактного инвариантного множества A.

Главным условием, входящим в любое определение хаоса, должна быть, на наш взгляд, существенная зависимость от начальных данных. Однако одного этого свойства, вообще говоря, недостаточно для того, чтобы полупоток был хаотическим. Такого рода примеры хорошо известны, и один из них приводится в нашей статье. Эти примеры наводят на мысль, что помимо неустойчивости всех траекторий следует требовать, чтобы в множестве A имелось некоторое количество движений, которые уместно называть сложными.

Для того чтобы придать термину "сложность" конкретный смысл, напомним сначала известное понятие рекуррентной траектории по Биркгофу. А именно, траектория $\gamma(x_0) \subset A$ полупотока φ^t называется рекуррентной, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $T = T(\varepsilon) > 0$, что при каждом $t_0 \geq 0$ справедливо включение $\gamma(x_0) \subset O_\varepsilon\big(\gamma_{[t_0, t_0+T]}(x_0)\big)$. Здесь $\gamma_{[t_0,t_0+T]}(x_0) = \{x = \varphi^t(x_0) : t \in [t_0, t_0 + T]\}$, а символом $O_\varepsilon(*)$ обозначена ε-окрестность соответствующего множества.

Определение 3. *Траекторию $\gamma(x_0)$ полупотока φ^t, принадлежащую инвариантному множеству A, будем называть сложной, если для нее выполняется одна из следующих двух альтернатив*:

3.1) *ω-предельное множество $\omega(x_0)$ этой траектории пусто;*

3.2) *справедливо равенство $\omega(x_0) = A$, но сама траектория $\gamma(x_0)$ не является рекуррентной.*

Для того чтобы оценить степень содержательности этого определения, заметим, что отнюдь не всякая траектория, не обладающая свойством рекуррентности, оказывается сложной. Например, ограниченная траектория $\gamma(x_0)$ автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости, наматывающаяся при $t \to +\infty$ на некоторый сепаратрисный контур Γ, очевидным образом нерекуррентна. Но она не будет также и сложной. Действительно, из определения 3 с необходимостью следует, что для сложной траектории, принадлежащей компактному множеству, должно выполняться включение $\gamma(x_0) \subset \omega(x_0)$. В нашем же случае $\omega(x_0) = \Gamma$, а значит, $\gamma(x_0) \cap \omega(x_0) = \varnothing$.

Перейдем теперь непосредственно к новому определению хаоса, которое формулируется следующим образом.

Определение 4. *Полупоток φ^t будем называть хаотическим на инвариантном множестве A при выполнении ограничений* :

4.1) *$\varphi^t|_A$ обладает свойством существенной зависимости от начальных условий;*

4.2) *найдется такое подмножество* $A_0 \subset A$, $\overline{A_0} = A$, *что любая траектория* $\gamma(x_0)$ *с начальным условием* $x_0 \in A_0$ *является сложной.*

Остановимся на естественно возникающем вопросе о связи между приведенным определением хаоса и определением 1.

Теорема 1. *Предположим, что пространство* (A, ρ) *сепарабельно. Тогда из хаотичности полупотока* $\varphi^t|_A$ *по Девани вытекает его хаотичность в смысле определения* 4.

Доказательство. Пусть имеет место хаотичность по Девани. Возьмем плотную в A траекторию $\gamma(x_0)$, которая заведомо существует в силу условия 1.1 и сепарабельности пространства (A, ρ), и покажем, что она является сложной.

Заметим в первую очередь, что упомянутая траектория не будет рекуррентной. Действительно, в противном случае в силу известной теоремы Биркгофа (см., например, [5]) имеем $\overline{\gamma(x_0)} = A$, причем A – компактное минимальное инвариантное множество полупотока φ^t. Но, с другой стороны, это множество не может быть таковым, поскольку согласно условию 1.2 в нем плотны периодические траектории. Тем самым, для проверки сложности траектории $\gamma(x_0)$ достаточно убедиться в справедливости равенства $\omega(x_0) = A$.

Предполагая противное, рассмотрим сначала случай $\omega(x_0) = \varnothing$, означающий, что инвариантное множество A состоит из одной траектории $\gamma(x_0)$. Но тогда в силу условия 1.2 данная траектория с необходимостью периодическая. А это очевидным образом противоречит как условию 1.3, так и предположению о пустоте $\omega(x_0)$.

Обратимся теперь к случаю, когда $\omega(x_0)$ является истинным подмножеством A. Тогда $A = \overline{\gamma(x_0)} = \gamma(x_0) \cup \omega(x_0)$, но при этом $x_0 \notin \omega(x_0)$, а значит, справедливо неравенство $\delta_0 = \rho(x_0, \omega(x_0)) > 0$. Заметим также, что в рассматриваемой ситуации все периодические траектории полупотока $\varphi^t|_A$ заведомо лежат в множестве $\omega(x_0)$. Следовательно, они не могут быть плотны в A, так как каждая из них находится на расстоянии не меньшем δ_0 от точки x_0. Таким образом, вступаем в противоречие с условием 1.2.

Для завершения доказательства теоремы 1 остается в качестве множества A_0, о котором говорится в условии 4.2, взять $A_0 = \gamma(x_0)$ и заметить, что все траектории с начальными условиями из этого множества относятся к сложным.

Остановимся теперь на связи между определениями 2 и 4. Ясно, что из хаотичности по Кнудсену не вытекает хаотичность в смысле определения 4, о чем свидетельствует уже упоминавшийся выше пример Пуанкаре. Однако ситуацию можно несколько подправить, если ввести понятие так называемой усиленной хаотичности по Кнудсену.

Определение 5. *Будем говорить, что полупоток* φ^t *усиленно хаотичен по Кнудсену на инвариантном множестве* A, *если по-прежнему выполняются условия* 2.1, 2.2, *но траектория* $\gamma(x_0)$, *о которой идет речь во втором из них, не является рекуррентной.*

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Предположим, что при каждом фиксированном* $x_0 \in A$ *функция* $\varphi^t(x_0)$ *равномерно непрерывна по* $t \in \mathbb{R}_+$. *Тогда из усиленной хаотичности полупотока* $\varphi^t|_A$ *по Кнудсену вытекает его хаотичность в смысле определения* 4.

Доказательство. Возьмем плотную в A траекторию $\gamma(x_0)$, о которой говорится в условии 2.2, и покажем, что она является сложной. Поскольку согласно определению 5 эта траектория заведомо нерекуррентна, то, как и при обосновании теоремы 1, остается лишь убедиться в справедливости равенства $\omega(x_0) = A$.

В предположении противного при всех достаточно малых $\delta > 0$ в любой δ-окрестности начальной точки x_0 (в пространстве (A, ρ)) лежат лишь точки кривой $\gamma(x_0)$ вида $\varphi^{t_0}(x_0)$, где $0 \le t_0 \le \bar{t}(\delta)$, причем $\bar{t}(\delta) \to 0$ при $\delta \to +0$. Действительно, при $\omega(x_0) = \varnothing$ данный факт очевиден, так как в этом случае $A = \gamma(x_0)$. Если же $\omega(x_0)$ – истинное подмножество A, то, как уже отмечалось при доказательстве теоремы 1, имеем $A = \gamma(x_0) \cup$

$\omega(x_0)$ и $\rho(x_0, \omega(x_0)) > 0$.

Из установленной структуры окрестностей точки x_0 и из свойства равномерной непрерывности полупотока φ^t по t заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и при $\forall\ \varphi^{t_0}(x_0) \in O_\delta(x_0)$ справедливо неравенство

$$\rho\big(\varphi^t(x_0), \varphi^t(\varphi^{t_0}(x_0))\big) = \rho\big(\varphi^t(x_0), \varphi^{t+t_0}(x_0)\big) < \varepsilon.$$

Тем самым, в точке x_0 нарушается свойство существенной зависимости от начальных данных, что противоречит условию 2.1. Теорема 2 доказана.

В дополнение к установленной теореме отметим, что в случае компактного множества A верно и обратное утверждение: хаотичность полупотока $\varphi^t|_A$ в смысле определения 4 влечет его усиленную хаотичность по Кнудсену. В самом деле, из компактности A для любой сложной траектории $\gamma(x_0) \subset A$ вытекает равенство $\omega(x_0) = A$, а значит, автоматически $\overline{\gamma(x_0)} = A$. Добавим еще, что для полупотока, порождаемого в ограниченной области пространства $\mathbb{R}^n$ траекториями некоторой автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с гладкими правыми частями, выполняются сразу оба требования – и равномерная непрерывность по t, и компактность инвариантного множества. Поэтому для таких полупотоков определения 4 и 5 оказываются эквивалентными.

Подведем некоторый итог. Как установлено выше, при определенных условиях из хаотичности по Девани или из усиленной хаотичности по Кнудсену следует хаотичность в смысле определения 4. Но в рамках теорем 1 и 2 для любой сложной траектории из A всегда справедливо равенство $\omega(x_0) = A$. В связи с этим уместен вопрос: существует ли инвариантное множество A, хаотическое в смысле определения 4 и такое, что для любой принадлежащей ему сложной траектории реализуется альтернатива 3.1? Положительный ответ на него дается ниже и фактически означает, что в бесконечномерном и некомпактном случае возможен новый тип хаоса, не сводящийся к хаотичности по Девани и Кнудсену. Такой тип хаоса в дальнейшем будем называть турбулентным.

Для того чтобы проиллюстрировать основные свойства турбулентного хаоса, обозначим через l – банахово пространство бесконечномерных векторов

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots): \ \ ||x|| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty,$$

а в качестве полного метрического пространства (X, ρ) возьмем конус $K \subset l$, состоящий из векторов с неотрицательными координатами. Наш основной результат – следующее утверждение.

Теорема 3. *В пространстве K существует непрерывный полупоток φ^t, имеющий замкнутое, ограниченное и некомпактное инвариантное множество A со свойствами* :

а) *полупоток $\varphi^t|_A$ хаотичен в смысле определения* 4, *но не будет таковым по Кнудсену и Девани* (*для него не выполняются условия* 1.1, 1.2, 2.2 *из соответствующих определений*);

б) *A является аттрактором, т. е. существует такое открытое множество $\mathscr{U} \subset K$, что $\overline{\varphi^t(\mathscr{U})} \subset \mathscr{U}$ при всех $t > 0$ и $\bigcap\limits_{t \geq 0} \varphi^t(\mathscr{U}) = A$;*

в) *A – глобальный аттрактор в том смысле, что для любого замкнутого и ограниченного множества $B \subset K$, не содержащего вектор $x = 0$, найдется такое $t_0 = t_0(B) > 0$, что $\varphi^t(B) \subset \mathscr{U}$ при всех $t \geq t_0$;*

г) *хаусдорфова размерность множества A равна бесконечности;*

д) *для любой сложной траектории из A реализуется альтернатива* 3.1, *т. е. A является турбулентным хаотическим множеством.*

В процессе доказательства этой теоремы предъявляется конкретный полупоток, порожденный некоторой счетной системой обыкновенных дифференциальных уравнений в пространстве l и имеющий аттрактор с перечисленными выше свойствами.

1. *Devaney R.L.* An introduction to chaotic dynamical systems. Addison-Wesley: Reading, MA, 1989.
2. *Banks J., Brooks J., Cairns G., Davis G., Stacey P.* On Devaney's Definition of Chaos // Amer. Math. Monthly. 1992. V.99. №4. P. 332 – 334.
3. *Assaf D. IV, Gadbois S.* Definition of Chaos // Amer. Math. Monthly. 1992. V.99. №9. P. 865.
4. *Knudsen C.* Chaos without Nonperiodicity // Amer. Math. Monthly. 1994. V.101. №6. P. 563 – 565.
5. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. Москва; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2004.

Дымов А.В. Моделирование распределения радиоволн УКВ диапазона в условиях города с учетом рельефа подстилающей поверхности.

В докладе строится математическая модель на основе метода физической оптики (метод Гюйгенса – Кирхгофа) для изучения распространения УКВ радиоволн в городских условиях с учетом рельефа подстилающей поверхности. Модель позволяет выполнить анализ пространственного распределения поля при произвольных параметрах городской застройки и характеристик рельефа, а также учесть однократное отражение излучения от земной поверхности. Выполнено математическое обоснование корректности использованного численного метода, определен порядок его погрешности.

На основании результатов моделирования предложена аппроксимационная зависимость для оперативного расчета ослабления сигнала, представляющая собой выражения для вычисления дифракционного ослабления на неровностях рельефа трассы и аддитивной добавки, описывающей городскую среду.

Натурные измерения и сравнительный анализ результатов расчетов с экспериментальными данными, полученными в диапазонах 900 МГц и 1800 МГц, свидетельствуют о том, что модель на основе метода Гюйгенса – Кирхгофа наиболее адекватно описывает результаты экспериментов, особенно в случае сложного рельефа подстилающей поверхности.

Нестеров П.Н. Некоторые особенности динамики уравнений на временных шкалах. В докладе исследуется вопрос о качественном изменении динамики решений уравнения из класса дискретных адиабатических осцилляторов при «малом» возмущении точек исходной временной шкалы [1]:

$$x^{\sigma\sigma} - 2(\cos\omega)x^{\sigma} + \left(1 + \frac{a\sin(\lambda\omega t)}{t^{\rho}}\right)x(t) = 0,$$

где t принадлежит шкале $\mathbb{T}_1$ или $\mathbb{T}_2$, $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T}_i :\ s > t,\ t \in \mathbb{T}_i\}$ $(i = 1,2)$. Предполагается, что $0 < \omega < \pi$, $1/2 < \rho \le 1$, $a, \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \ne 0$. В качестве шкалы $\mathbb{T}_1$ выбрано множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, т.е. $\mathbb{T}_1 = \{t_n = n,\ n = 1,2,3,\ldots\}$. Шкала $\mathbb{T}_2$ определяется следующим образом: $\mathbb{T}_2 = \left\{\tau_n = n + \dfrac{\alpha\cos(\mu\omega n)}{\lambda\omega n^{\beta}},\ n \in \mathbb{N}\right\}$, где $0 < \beta \le 1$ и

$\alpha, \mu \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. На примере исследования данного уравнения показана возможность появления параметрического резонанса за счет изменения структуры множества, на котором рассматривается исходная модель. Обсуждаются вопросы практического использования явления параметрического резонанса в дискретных системах с колебательно убывающими коэффициентами.

1. *Bohner M., Peterson A.* Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications. Boston, Birkhäuser, 2003.

Глызин С.Д. Диффузионный хаос в динамической модели реакции Белоусова – Жаботинского. Одна из феноменологических моделей, предназначенных для описания реакции Белоусова – Жаботинского, приведена в [1] и имеет вид

$$\begin{aligned} \dot u_1 &= \nu d_1 \Delta u_1 + r_1(1 + a(1-u_3) - u_1)u_1, \\ \dot u_2 &= \nu d_2 \Delta u_2 + r_2(u_1 - u_2)u_2, \\ \dot u_3 &= \nu d_3 \Delta u_3 + r_3(u_2 - u_3)u_3, \\ \left.\frac{\partial u_j}{\partial \vec n}\right|_{\partial\Omega} &= 0, \quad j = 1,2,3, \end{aligned} \tag{1}$$

где Δ – оператор Лапласа; $d_j > 0$, $j = 1,2,3$; $\nu > 0$ – параметр, отвечающий за пропорциональное уменьшение коэффициентов диффузии; $\vec n$ – внешняя нормаль к достаточно гладкой границе $\partial\Omega$ ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$; параметры r_j $(j = 1,2,3)$ и a – положительны.

При $a = a_0 + \varepsilon$, где $a_0 = (r_1 + r_2 + r_3)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right) - 1$, $0 < \varepsilon << 1$ и при выполнении условия

$$r_1 - 3r_2 - r_3 < 0 \tag{2}$$

краевая задача (1) имеет пространственно однородный цикл с амплитудой порядка $\sqrt{\varepsilon}$, который экспоненциально орбитально устойчив для точечной ($\nu = 0$) задачи (1). Последнее утверждение следует из отрицательности вещественной части первой ляпуновской величины

$$d_0 = \frac{(r_1+r_2)(r_1-3r_2-r_3)(r_1+r_3)(r_2+r_3)(r_1+r_2+r_3)(r_2r_3+r_1(r_2+r_3))^2}{2r_2^2r_3^2\left(r_1^2+r_2^2+3r_2r_3+r_3^2+3r_1(r_2+r_3)\right)\left(r_1^2+r_2^2+6r_2r_3+r_3^2+6r_1(r_2+r_3)\right)}, \tag{3}$$

при условии (2).

Описанный пространственно однородный цикл теряет устойчивость при достаточно малом $\nu > 0$. При условии, что ν пропорционально ε так, что $\nu = \nu_0\varepsilon$, краевая задача (1) может быть сведена к квазинормальной форме

$$\dot w = \nu_0(1 - ia)\Delta w + w - (1 + ib)w|w|^2, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial \vec n}\right|_{\partial\Omega} = 0 \tag{4}$$

В работе [2] показано, что в случае, когда область Ω представляет собой отрезок $[0,1]$, параметры задачи (4) могут быть подобраны так, что при всех достаточно малых $\nu > 0$ динамическая система, порождаемая этой краевой задачей, в своем фазовом пространстве имеет хаотический аттрактор A_ν, ляпуновская размерность $d_L(A_\nu)$ которого стремится к $+\infty$ при $\nu \to 0$.

Сложность поведения квазинормальной формы системы определяется параметром b, представляющим собой отношение мнимой и вещественной частей первой ляпуновской величины

$$\frac{c_0}{d_0} = -\Big(r_2^2\big(12r_1^3 + 19r_1^2r_2 + 12r_1r_2^2 + r_2^3\big) + \\ + r_2\big(21r_1^3 + 67r_1^2r_2 + 57r_1r_2^2 + 13r_2^3\big)r_3 + \big(10r_1^3 + 65r_1^2r_2 + 94r_1r_2^2 + 30r_2^3\big)r_3^2 + \\ + \big(19r_1^2 + 57r_1r_2 + 32r_2^2\big)r_3^3 + (10r_1 + 11r_2)r_3^4 + r_3^5\Big)/ \\ /\big(3(r_1 - 3r_2 - r_3)(r_1 + r_2 + r_3)(r_2r_3 + r_1(r_2 + r_3))^{3/2}\big),$$

которое при условии (2) положительно и с изменением r_j $(j = 1, 2, 3)$ меняется в широких пределах. Учитывая, что хаотическое поведение решений квазинормальной формы (4) совсем не обязательно влечет хаотическое поведение исходной краевой задачи (1), возникает задача численного анализа (1) при значениях параметров, для которых у квазинормальной формы наблюдается явление динамического хаоса, характеризуемое, как отмечалось выше, неограниченным нарастанием ляпуновской размерности аттрактора при $\nu \to 0$.

1. *Колесов А.Ю., Колесов Ю.С., Майоров В.В.* Реакция Белоусова: математическая модель и экспериментальные факты // Динамика биологических популяций. Горький: ГГУ, 1987. С. 43 – 51.
2. *Глызин С.Д.* Разностные аппроксимации уравнения «реакция-диффузия» на отрезке // Моделирование и анализ информационных систем. 2009. Т.16, № 3 С. 96 – 116.

Кубышкин Е. П. Некоторые задачи, связанные с теорией балки Тимошенко.

Теория балки Тимошенко [1] — это линейная математическая модель плоских поперечных колебаний балки, предложенная русским механиком С. П. Тимошенко в начале прошлого века. Модель основана на следующих гипотезах: плоские сечения до деформации нормальные к оси балки остаются плоскими и после изгиба, но перестают быть нормальными к ее изогнутой оси; учитывается инерция вращения и деформация сдвига сечения, возникающая при колебаниях. Согласно расчетной схеме Тимошенко, положение каждого сечения деформируемой балки определяется двумя независимыми величинами: поперечным смещением и углом поворота сечения. Эта модель является развитием известной модели поперечных колебаний балки Эйлера – Бернулли, которая стала объектом многочисленных исследований и используется при построении математических моделей различных механических систем, содержащих упругие элементы. Представляется весьма интересным изучение динамики следующих механических систем, содержащих упругие элементы, моделируемые балкой Тимошенко. Это твердое тело, содержащее упругий стержень; твердое тело, содержащее два упругих стержня; два твердых тела, соединенных упругим стержнем. Для таких систем интересны задачи управления поворотом, а также задачи стабилизации углового положения за счет внешних моментов (задачи устойчивости). Представляет большой интерес построение теории распределенных роторных систем, основанной на гипотезах, положенных в основу теории балки Тимошенко. Решение каждой из перечисленных задач может составить предмет кандидатской диссертации.

1. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.

Глазков Д.В., Глызин Д.С., Кащенко И.С., Нестеров П.Н.[1] Феноменологическая модель динамики численности экосистемы озера Байкал

В работе [1] приводится модель, описывающая динамику численности планктонной экосистемы озера Байкал (*моногиперцикла*). При определенных обобщающих предположениях ее можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \mu_1, \phi_1(x_3)) - g_1(x_1, \gamma(x_2)), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_2, \mu_2, \phi_2(x_1)) - g_2(x_2), \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_3, \mu_3, \phi_3(x_2)) - g_3(x_3). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь первое, второе и третье уравнения задают динамику численности фитопланктона, зоопланктона и бактерий соответственно. Точнее x_k — биомасса, f_k — функция роста, g_k — функции смертности, ϕ_k — эффективность конверсии энергии и вещества (для фитопланктона — отношение между концентрацией бактерий и доступностью биогенов) с одного уровня пищевой цепи на другой, γ — эффективность выедания, μ_k — максимальная скорость роста численности популяции.

Ставится задача конкретизировать предлагаемую модель, уточнив вид функций, входящих в правую часть системы (1). Нами предлагается взять за основу логистические уравнения, дополненные связующими слагаемыми. Время жизни отдельных микроорганизмов невелико, поэтому влиянием эффектов запаздывания здесь можно пренебречь. Однако, если предложенную структуру биоценоза дополнить еще одним более высоким уровнем пищевой цепи (например, популяцией рыб, как в работе [2]), то целесообразно для описания динамики численности такого вида использовать уравнение Хатчинсона [3,4]. Следующая феноменологическая модель представляется нам подходящей для описания исследуемой экосистемы:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 &= r_1[1 + E + k_1 N_3 - m_1 N_2 - N_1]N_1, \\ \dot{N}_2 &= r_2[1 + k_2 N_1 - m_2 N_4 - N_2]N_2, \\ \dot{N}_3 &= r_3[1 + k_3 N_2 + k N_4 - N_3]N_3, \\ \dot{N}_4 &= r_4[1 + k_4 N_2 - N_4(t-h)]N_4. \end{cases} \tag{2}$$

Фитопланктон (N_1) получает энергию солнца (E), минералы от бактерий ($k_1 N_3$) и с коэффициентом m_1 поедается зоопланктоном ($-m_1 N_2$). Зоопланктон (N_2) питается фитопланктоном ($k_2 N_1$) и дает пищу бактериям и рыбам ($-m_2 N_4$). Бактерии (N_3) питаются останками других организмов ($k_3 N_2$ и $k N_4$), не оказывая таким образом прямого влияния (как хищники или паразиты) на их численность. Кормовой базой для рыб является зоопланктон $k_4 N_2$. Параметр h задает средний возраст половозрелых особей в популяции рыб. Отметим, что в соответствии со схемой, приведенной в работе [2], фитопланктон оказывает непосредственное влияние на бактерии, так что в третьем уравнении системы (2), вообще говоря, может потребоваться слагаемое, зависящее от N_1.

Аналогичные рассуждения можно провести и для модели [1], которая включает в себя по два вида фито- и зоопланктона.

Численный анализ динамики системы (2) позволил выявить у нее стационарные и автоколебательные режимы. Их сравнение с экспериментальными данными и определение характерных значений параметров модели станет следующим этапом работы в этом направлении.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF) (проект # RUB1-020-YA-07 / BF7M20).

Возможны модификации системы (2), связанные, например, с сезонными колебаниями величины E или включением других видов в представленную модель биоценоза.

1. *Silow E. A.* The modelling of aquatic ecosystem as hypercycle // The Fifth European Conference on Ecological Modelling (ECEM-2005). 2005. P. 168 – 169.
2. *Silow E. A. et al.* Mathematical models of lake Baikal ecosystem // Ecological Modelling. 1995. V. 82. P. 27 – 39.
3. *Hutchinson G. E.* Circular causal system in ecology // Ann. N.-Y. Acad. Sci. 1948. V. 50. P. 221 – 246.
4. *Колесов Ю. С.* Проблема адекватности экологических уравнений / Яросл. ун-т. Ярославль, 1985. 162 с. (Деп. в ВИНИТИ).