

УДК 517.9

Бифуркация бегущих волн видоизмененного уравнения Гинзбурга–Ландау

Котилов А.Э., Куликов А.Н.
Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14
получена 6 декабря 2007

Аннотация

Рассматривается модифицированное уравнение Гинзбурга–Ландау, приведенное в одной из монографий Г.Г.Малинецкого в качестве одного из уравнений, где возможны режимы с обострением. Это уравнение вместе с периодическими краевыми условиями образует краевую задачу, для которой исследован более частный пока вопрос о существовании, устойчивости и локальных бифуркациях бегущих волн. Показано, что в этом аспекте результаты пока мало отличимы от тех, которые получаются при рассмотрении традиционного варианта уравнения Гинзбурга–Ландау.

Исследование бифуркационной задачи основано на использовании метода нормальных форм и адаптировано к поставленной краевой задаче.

1. Постановка задачи

В работе рассматривается дифференциальное уравнение, предложенное в монографии [1], следующего вида:

$$u_t = u - (1 + ic)u|u|^4 - ibu_{xx}, \quad u = u(t, x) \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

для которого b и c – действительные постоянные, причем для определенности будем считать $b > 0$. Значения функции $u(t, x)$ принадлежат полю комплексных чисел.

Уравнение (1) будем рассматривать на отрезке $[-\pi, \pi]$ вместе с периодическими краевыми условиями

$$u(t, -\pi) = u(t, \pi), \quad u_x(t, -\pi) = u_x(t, \pi), \quad t \in [0, \infty). \quad (2)$$

Как и в работе [4], в которой уравнение Гинзбурга–Ландау

$$u_t = u - (1 + ic)u|u|^2 - ibu_{xx}, \quad u = u(t, x) \in \mathbb{C}, \quad (3)$$

рассматривалось вместе с периодическими краевыми условиями (2), краевая задача (1),(2) допускает автомодельные периодические решения вида

$$u_n(t, x) = \exp(i(nx + \omega_n t)), \quad (4)$$

которые можно считать бегущими волнами, для которых $\omega_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$. Подстановка функции (4) в исходное уравнение (1) позволяет найти условия существования бегущих волн

$$\omega_n = -c + bn^2.$$

При $n = 0$ получаем решение $u_0(t) = \exp(-ict)$, которое в физике принято называть термодинамической ветвью.

Далее предлагается исследовать вопрос об устойчивости решений (4) и вопрос о локальных бифуркациях бегущих волн при смене ими устойчивости. Ясно, что устойчивость бегущих волн естественно рассматривать в норме фазового пространства решений краевой задачи. В нашем случае таким пространством будет H^2_2 – пространство Соболева, функций, которые 2π -периодичны по переменной x и имеют обобщенные производные до второго порядка включительно, интегрируемые с квадратом на $[-\pi, \pi]$

$$\|u\|_{H^2_{2[-\pi, \pi]}} = \|u\|_{L_2} + \|u_x\|_{L_2} + \|u_{xx}\|_{L_2}, \quad \|u\|_{L_2} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |u|^2 dx}.$$

Исследование этих двух поставленных вопросов облегчает технический прием, используемый в работе [2], который часто называется принципом самоподобия.

Положим

$$u(t, x) = v(t, x + 2bnt) \exp(inx) \exp(ibn^2t). \quad (5)$$

После подстановки (5) в (1) для функции $v(t, y)$, где $y = x + 2bnt$, получим тоже уравнение (1). Поэтому для исследования устойчивости бегущих волн (1) достаточно рассмотреть этот вопрос лишь для одного из решений, например, для решения $u_0(t) = \exp(-ict)$.

2. Устойчивость термодинамической ветви

Для ответа на вопрос об устойчивости бегущей волны $u_0(t, x)$ в краевой задаче (1),(2) положим

$$u(t, x) = u_0(t, x)(1 + w(t, x)). \quad (6)$$

После подстановки (6) в (1) получим уже уравнение

$$w_t = L_{(c,b)}w - (1 + ic)F(w), \quad (7)$$

у которого следует изучить вопрос об устойчивости нулевого состояния равновесия. Здесь

$$L_{(c,b)}w = -(1 + ic)(2w + 2\bar{w}) - ibw_{xx},$$

т.е. линейный дифференциальный оператор, а нелинейность

$$F(w) = (3w^2 + 6w\bar{w} + \bar{w}^2) + (w^3 + 6w^2\bar{w} + 3w\bar{w}^2) + 2w^3\bar{w} + 3w^2\bar{w}^2 + w^3\bar{w}^2$$

имеет в нуле порядок малости выше первого. Функция $w(t, x)$, конечно же, удовлетворяет периодическим краевым условиям (2).

Далее в этом пункте точкой будем обозначать производную по t , а штрихом – производную по x . Так как $w(t, x) \in \mathbb{C}$, то можно положить $w(t, x) = \xi_1(t, x) + i\xi_2(t, x)$ и в уравнении (7) выделить действительную и мнимую части, что позволит нам записать его как систему действительных уравнений в R^2 .

Рассмотрим теперь линеаризованную в нуле краевую задачу (7),(2), т.е.

$$\dot{w} = L_{(c,b)}w, \quad (8)$$

$$w(t, -\pi) = w(t, \pi), \quad w'(t, -\pi) = w'(t, \pi). \quad (9)$$

В R^2 она перепишется в следующем виде:

$$\dot{w} = Aw + Bw'', \quad (10)$$

где матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -4c & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix},$$

а

$$w(t, x) = \begin{pmatrix} \xi_1(t, x) \\ \xi_2(t, x) \end{pmatrix}.$$

Как обычно, вопрос об устойчивости нулевого решения периодической краевой задачи для уравнения (10) может быть сведен к исследованию спектра линейного дифференциального оператора

$$L_{(c,b)}v = Av + Bv'',$$

где вектор-функции $v(x) \in R^2$ и удовлетворяют периодическим краевым условиям

$$v(-\pi) = v(\pi), \quad v'(-\pi) = v'(\pi).$$

В силу того, что система тригонометрических многочленов $\exp(imx)$, $m \in Z$ полна в $L_2[-\pi, \pi]$, собственные функции линейного дифференциального оператора $L_{(c,b)}$ можно искать в виде

$$e_m(x) = a_m \exp(imx),$$

где $a_m \in C^2$. После чего, нетрудно понять, что собственные числа $L_{(c,b)}$ можно найти как собственные числа матриц

$$Q_m = A - m^2 B.$$

Исследование характеристических многочленов этих матриц

$$\lambda_m^2 + 4\lambda_m + bm^2(bm^2 - 4c) = 0$$

позволяет заключить следующее утверждение.

Лемма 1. При выполнении неравенства

$$b > 4c$$

нулевое решение краевой задачи (7),(2) устойчиво. Если же

$$b < 4c,$$

то оно теряет устойчивость.

Значению $b = 4c$ соответствует критический случай в задаче об устойчивости нулевого решения, все точки спектра, кроме одной, лежат в полуплоскости, определяемой неравенством

$$\operatorname{Re} \lambda \leq -\gamma < 0.$$

Нулевое собственное значение имеет кратность 3.

Для дальнейших построений удобно возвратиться к комплексной записи. Положим $b = 4c$, в этом случае линейный дифференциальный оператор

$$L_{(c,4c)} = -(1 + ic)(2v + 2\bar{v}) - 4icv''$$

имеет трехкратное нулевое собственное значение, которому отвечают собственные функции

$$e_0(x) = i, \quad e_1(x) = (-c + i)\cos x, \quad e_2(x) = (-c + i)\sin x.$$

При $b = 4c - \varepsilon$, если $\varepsilon > 0$, оператор $L_{(c,4c-\varepsilon)}$ имеет собственные значения, которые все лежат в правой комплексной полуплоскости.

Пусть теперь оператор $L_{(c,b)}$ определен на достаточно гладких функциях, удовлетворяющих однородным условиям Неймана

$$v'(0) = v'(\pi) = 0,$$

тогда оператор $L_{(c,4c)}$ имеет нулевое собственное значение кратности 2, так как ему отвечают лишь две собственные функции $e_0(x)$, $e_1(x)$. Так как оператор $L_{(c,4c)}$ имеет двумерное ядро, то неоднородное уравнение

$$L_{(c,4c)}v = h(x) \tag{11}$$

разрешимо не при любой правой части, таким образом, следует рассмотреть условия разрешимости этого неоднородного уравнения. Последний вопрос достаточно изучить лишь в частном случае, когда $h(x)$ имеет специальный вид.

Лемма 2. Пусть $h(x) = h_0 \in C$. При таком выборе правой части уравнение (11) имеет решение лишь в том случае, когда

$$\operatorname{Im} h_0 = c \operatorname{Re} h_0. \tag{12}$$

Лемма 3. Пусть $h(x) = h_0 \cos x$, где $h_0 \in C$. Для разрешимости неоднородного уравнения (11) необходимо и достаточно выполнения равенства

$$\operatorname{Im} h_0 = 0. \tag{13}$$

Доказательство лемм 2 и 3 проводится стандартным способом. Здесь и ниже используется методика, более подробно изложенная в работах [2-4], где рассматривались близкие по постановке задачи.

3. Вспомогательная бифуркационная задача

Рассмотрим нелинейную краевую задачу

$$v_t = v - (1 + ic)v|v|^4 - i(4c - \varepsilon)v_{yy}, \quad (14)$$

$$v_y(t, 0) = v_y(t, \pi) = 0. \quad (15)$$

У этой задачи рассмотрим вопрос о структуре окрестности решения

$$v_0(t) = \exp(-ict).$$

Сразу отметим, что, кроме уже указанного решения $v_0(t)$, краевая задача (14),(15) имеет семейство решений $\exp(-ict + i\psi)$, где ψ – произвольная действительная постоянная. Последнее замечание показывает, что для описания окрестности периодического решения $v_0(t)$ целесообразно положить

$$v(t, y, \varepsilon) = \exp(-ict + i\psi(t))(1 + w(t, y, \varepsilon)). \quad (16)$$

Подстановка равенства (16) в краевую задачу (14),(15) показывает, что функция $w(t, y, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{w} + i\dot{\psi}(1 + w) = L_{(c, 4c - \varepsilon)}w - (1 + ic)F(w), \quad (17)$$

а также краевым условиям

$$w_y(t, 0, \varepsilon) = w_y(t, \pi, \varepsilon) = 0. \quad (18)$$

В свою очередь, положим

$$w(t, y, \varepsilon) = \eta w_1(y) + \eta^2 w_2(y) + \eta^3 w_3(y) + \varepsilon \eta w_0(y) + \dots, \quad (19)$$

где функции $w_1(y), w_2(y), w_3(y), w_0(y)$ удовлетворяют однородным условиям Неймана, точками обозначены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости по сравнению с первыми четырьмя из суммы (19). Наконец, функции $\psi(t), \eta(t)$ со значениями в R удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \beta\eta^2 + O(\eta^4), \\ \dot{\eta} &= \varepsilon\alpha\eta + \gamma\eta^3 + O(\eta^5, \eta^2\varepsilon, \eta\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь $\beta, \alpha, \gamma \in R$. Систему уравнений (20) принято называть нормальной формой. Ее решения определяют динамику решений краевой задачи (17),(18) в достаточно малой окрестности однородного цикла $u_0(t)$.

Для определения коэффициентов нормальной формы (20) следует подставить (19) с учетом системы (20) в краевую задачу (17), а затем интегрировать η как малый параметр. В итоге получим рекуррентную последовательность линейных краевых задач. Для $w_1(y)$ имеем однородную краевую задачу

$$L_{(c, 4c)}w_1(y) = 0, \quad (21)$$

$$w'(0) = w'(\pi) = 0. \quad (22)$$

Здесь и далее в этом пункте штрихом обозначена производная по y . В качестве решения краевой задачи (21), (22) следует выбрать

$$w_1(y) = (-c + i) \cos y, \quad (w_1(y) = e_1(y)).$$

Приравняв затем выражения при $\eta^2, \eta^3, \varepsilon\eta$ соответственно, получаем неоднородные краевые задачи. Так, для $w_2(y)$ имеем следующую краевую задачу:

$$L_{(c, 4c)}w_2 - (1 + ic)(3w_1^2 + 6w_1\bar{w}_1 + \bar{w}_1^2) - i\beta = 0, \quad (23)$$

$$w'_2(0) = w'_2(\pi) = 0. \quad (24)$$

Для $w_3(y)$ получаем уже такую краевую задачу:

$$L_{(c, 4c)}w_3 - (1 + ic)(3w_1w_2 + 6w_1\bar{w}_2 + 6w_2\bar{w}_1 + 2\bar{w}_1\bar{w}_2 + w_1^3 + 6w_1^2\bar{w}_1 + 3w_1w_1^2) - i\beta w_1 - \gamma w_1 = 0, \quad (25)$$

$$w'_3(0) = w'_3(\pi) = 0. \quad (26)$$

Наконец,

$$L_{(c, 4c)}w_0 + iw_1'' = \alpha w_1, \quad (27)$$

$$w'_0(0) = w'_0(\pi) = 0. \quad (28)$$

Проанализируем эти три краевые задачи последовательно. Так, из условий разрешимости краевой задачи (23),(24) и из леммы 2 вытекает, что

$$\beta = 2c(c^2 + 1).$$

Подставляя найденную постоянную β в уравнение (23), находим, что

$$w_2(y) = -\frac{7c^2 + 1}{4}(1 + ic) + \left(\frac{5c^2 - 1}{12} - \frac{1}{24c}(13c^2 + 1)i\right) \cos 2y.$$

Используя лемму 3, из условий разрешимости краевой задачи (25),(26) находим, что

$$\gamma = -\frac{64c^4 - 7c^2 + 1}{3}.$$

Элементарный анализ показывает, что при любом выборе коэффициента c справедливо неравенство $\gamma < 0$. Аналогичный анализ позволяет определить из условий разрешимости краевой задачи (27),(28) величину постоянной α . Вычисления показывают, что $\alpha = c$ и, следовательно, $\alpha > 0$.

Рассмотрим теперь укороченную нормальную форму, т.е. систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \beta\eta^2, \\ \dot{\eta} &= \varepsilon\alpha\eta + \gamma\eta^3, \end{aligned} \quad (29)$$

полученную из системы (20) отбрасыванием слагаемых, имеющих более высокий порядок малости. Очевидно, что второе уравнение имеет ненулевые состояния равновесия

$$\eta = \pm \sqrt{\frac{\alpha\varepsilon}{-\gamma}}.$$

Оба эти постоянных равновесия асимптотически устойчивы по Ляпунову. Аналогично, как и в работах [2-4], устанавливается справедливость следующего утверждения

Теорема 1. *Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ краевая задача (14),(15) имеет орбитально асимптотично устойчивый цикл. Для этого цикла справедлива асимптотическая формула*

$$\begin{aligned} u_0(t, y, \varepsilon) &= \exp\left(-ict - i\frac{\varepsilon\alpha}{\gamma}\beta t\right) \times \\ &\times \left[1 + \left(\frac{\varepsilon\alpha}{-\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}(-c + i)\cos y + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\varepsilon\alpha}{-\gamma}\right)\left(-\frac{7c^2+1}{4}(1 + ic) + \left(\frac{5c^2-1}{12} - \frac{1}{24c}(13c^2 + 1)i\right)\cos 2y\right)\right] + o(\varepsilon), \end{aligned} \quad (30)$$

где $\beta = 2c(c^2 + 1)$, $\gamma = -\frac{64c^4 - 7c^2 + 1}{3}$, $\alpha = c$.

4. Основной результат

Очевидно, что функция, определенная равенством (30), может быть продолжена на отрезок $[-\pi, 0]$ по четности с сохранением гладкости, а затем уже на всю числовую ось как 2π -периодическая функция. Тогда решение (30) удовлетворяет и краевой задаче (1),(2) при $b = 4c - \varepsilon$, если y заменить на x . Использование принципа самоподобия показывает, что при данном выборе в краевой задаче (1),(2) удовлетворяют и функции

$$\begin{aligned} u_n(t, x, \varepsilon) &= \exp\left(inx - ict + ibn^2t - i\frac{\varepsilon\alpha}{\gamma}\beta t\right) \times \\ &\times \left[1 + \left(\frac{\varepsilon\alpha}{-\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}(-c + i)\cos(x + 2bnt) + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\varepsilon\alpha}{-\gamma}\right)\left(-\frac{7c^2+1}{4}(1 + ic) + \left(\frac{5c^2-1}{12} - \frac{1}{24c}(13c^2 + 1)i\right)\cos 2(x + 2bnt)\right)\right] + o(\varepsilon), \end{aligned} \quad (31)$$

где $n \in \mathbb{Z}$. Наличие формул (31), как и в работах [3-5], позволяет утверждать, что справедлива теорема.

Теорема 2. *Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ краевая задача (1),(2) имеет счетное семейство инвариантных торов. Эти торы асимптотически устойчивы. При $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ решения на них задаются асимптотической формулой (31). При $n = 0$ формула (31) задает орбитально асимптотично устойчивый цикл.*

Список литературы

1. Малинецкий, Г.Г. Нелинейная динамика. Подходы, результаты, надежды / Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов, А.В. Подлазов. — М.: Комкнига, 2006. — 279 с.
2. Колесов, А.Ю. Цилиндрические бегущие волны обобщенного кубического уравнения Шредингера / А.Ю. Колесов, А.Н. Куликов, Н.Х. Розов // Доклады РАН. — 2006. — В.73, №1. — С. 125 – 129.
3. Куликов, А.Н. К вопросу о бифуркациях автоколебаний для сингулярно возмущенной нелинейной краевой задачи гиперболического типа / А.Н. Куликов // Известия РАН. Дифференциальные уравнения. — 2001. №5. — С. 74 – 75.
4. Куликов, А.Н. Бифуркация автоколебаний в двух сингулярно возмущенных периодических задачах гиперболического типа / А.Н. Куликов // Математика в Ярославском университете: Сборник обзорных статей. — Ярославль, 2001. — С. 183 – 194.
5. Куликов, Д.А. Бифуркация плоских волн обобщенного кубического уравнения Шредингера в цилиндрической области / Д.А. Куликов // Моделирование и анализ информ. систем. — 2006. — Т.13, №4. — С. 20 – 26.

Travelling waves bifurcation of the modified Ginzburg-Landau's equation

Kotikov A.E., Kulikov A.N.

The main target of this work is the modified Ginzburg-Landau's equation, addresses given in a monograph of G.G. Malinetskii as one of the equations, where blow-up regimes can be possible. Together with periodic boundary conditions this equation forms a boundary value problem. Existence, stability-instability and local bifurcations are the main purposes of this work. It has been shown that in this aspect the results are those that obtained while considering the traditional version of Ginzburg-Landau's equation.

The study of bifurcation problem is based on the method of normal forms and adapted to the assigned boundary value problem.