Модел. и анализ информ. систем. Т.**15**, №**1** (2008) 45–50

УДК 517.9+519.86

Пространственно-неоднородные инвариантные торы в модели мультипликатор-акселератор

Коршунова Е.В., Куликов А.Н.
Ярославский государственный университет,
150 000, Ярославль, Советская, 14
получена 11 декабря 2007

Аннотация

Представлена краевая задача, в основе которой лежит известная математическая модель мультипликатора-акселератора Самуэльсона, основанная на подходе Кейнса. Предложенная краевая задача призвана учесть роль пространственных эффектов при изучении макроэкономических процессов. Для данной краевой задачи на основе метода инвариантных многообразий, метода усреднения и теории нормальных форм показано существование устойчивых пространственно-неоднородных инвариантных торов.

1. Постановка задачи

Динамику макроэкономических процессов описывает известная модель Харрода [1, 2] сбалансированного роста

$$\frac{dY}{dt} = I - sY, \qquad \frac{dI}{dt} = v\frac{dY}{dt} - I + F(Y).$$

Здесь $Y = Y(t)$ - отклонение от равновесного национального дохода, $I = I(t)$ - функция спроса на инвестиции. Положительная постоянная s - доля сбережений в национальном доходе, а v - коэффициент пропорциональности прироста инвестиций на начальном этапе экономического процесса. Нелинейная функция $F(Y)$ призвана отразить тот факт, что для инвестиций должен существовать потолок. Обычно

$$F(Y) = -\gamma\left(\frac{dY}{dt}\right)^3, \gamma > 0.$$

Учет пространственного взаимодействия включает в себя, в частности, межрегиональную торговлю и, согласно Т. Пу [1, 2], приводит к следующей системе уравнений с частными производными:

$$\begin{aligned} &\partial U/\partial t = d_2\triangle Y - U,\\ &\partial Y/\partial t = I - sY + U + d_1\triangle Y,\\ &\partial I/\partial t = v\tfrac{\partial Y}{\partial t} - I + F. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $U = U(t,x,y)$, $Y = Y(t,x,y)$, $I = I(t,x,y)$, где $(x,y) \in D \subset R^2$, а через $U(t,x,y)$ обозначено активное торговое сальдо. Нелинейное слагаемое F, в принципе, можно оставить прежним, однако понятно, что на рост инвестиций влияют и макроэкономические величины. Например, к таковым следует отнести суммарный объем прироста национального дохода, поэтому можно рассматриваемую нелинейность выбрать следующим образом:

$$F(Y) = -\gamma\frac{\partial Y}{\partial t}\left(\int\int_D \left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)^2 dxdy\right).$$

Напомним, что D - ограниченная область, $\triangle$ - оператор Лапласа по пространственным переменным x, y, а коэффициенты d_1, $d_2 > 0$ определяют меру влияния пространственных эффектов [1, 2].

Продифференцировав по t второе уравнение системы (1) и исключив U и I с помощью второго и третьего уравнений, стандартным образом выписываем одно уравнение второго порядка по t, но для Y

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - c\frac{\partial Y}{\partial t} - b^2\frac{\partial}{\partial t}(\triangle Y) - a^2\triangle Y + \omega^2 Y = F(Y),$$

где $c = v - 1 - s$, $a^2 = d_1 + d_2$, $b^2 = d_1$, $\omega^2 = s$. Преренормировка $Y = u\gamma^{-1}$ приводит это уравнение к стандартному виду

$$\ddot{u} - c\dot{u} - a^2\triangle u - b^2\triangle\dot{u} + \omega^2 u = -\dot{u}\int\int_D \dot{u}^2 dxdy.$$

Здесь точкой обозначена частная производная по t.

Для определенности выберем в этой модельной задаче область D. Будем считать, что $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2\}$. Через $\bar{D}$ обозначим ее замыкание, $\partial D = \bar{D}\backslash D$. Уравнение с частными производными следует дополнить граничными условиями. В литературе, посвященной математическому моделированию макроэкономических процессов, обычно предлагаются три следующих варианта таких условий. Первый вариант - условие равновесного состояния на границе области

$$u(t, 0, y) = u(t, l_1, y) = u(t, x, 0) = u(t, x, l_2) = 0.$$

Второй вариант - условие непроницаемости границы для финансовых потоков

$$\frac{\partial u}{\partial x}\mid_{x=0}= 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}\mid_{x=l_1}= 0,\ \frac{\partial u}{\partial y}\mid_{y=0}= 0,\ \frac{\partial u}{\partial y}\mid_{y=l_2}= 0.$$

Часто используют смешанные граничные условия, предполагающие первый вариант на одной части границы и второй - на другой. Подробное обсуждение экономического смысла краевых условий можно найти в монографиях [1, 2], хотя, справедливости ради, следует отметить, что убедительной мотивации для предпочтения тех или иных условий в этих монографиях не содержится.

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2c\frac{\partial u}{\partial t} - b^2\frac{\partial}{\partial t}(\triangle u) - a^2\triangle u + \omega^2 u = -\left(\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdy\right)\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\mid_{x=0}= 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}\mid_{x=l_1}= 0,\ \frac{\partial u}{\partial y}\mid_{y=0}= 0,\ \frac{\partial u}{\partial y}\mid_{y=l_2}= 0, \tag{3}$$

$$\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} u(t, x, y)dxdy = 0. \tag{4}$$

Здесь $u = u(t, x, y)$, $(x, y) \in D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2\}$, a^2, b^2, ω^2 - нормированные постоянные, характеризующие динамику экономического процесса, $\triangle$ - оператор Лапласа по пространственным переменным x, y, $u(t, x, y)$ - нормированное отклонение дохода от некоторого равновесного. Интегральное равенство (4) введено искусственно для лучшего объяснения эффекта пространственного взаимодействия регионов. С точки зрения экономики последнее означает, что рассматривается такая экономическая модель, где средняя величина отклонения от равновесного дохода в данном экономическом регионе равна нулю. Такое дополнительное условие обычно обеспечивается мерами по регулированию экономики, не имеющими чисто рыночного характера. Уравнение (2) приведено уже в нормированном виде.

Положим $x = l_1 l^{-1} x_1$, $y = l_2 l^{-1} y_1$, $l_1 = l + \gamma_1\varepsilon$,$l_2 = l + \gamma_2\varepsilon$, где $\gamma_1, \gamma_2 \in R$, а ε - малый параметр. Такие замены приводят исходную краевую задачу (2)-(4) к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2c\frac{\partial u}{\partial t} + b^2\frac{\partial}{\partial t}(Lu) + a^2 Lu + \omega^2 u = -q\left(\int_0^{l}\int_0^{l}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx_1 dy_1\right)\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\mid_{x_1=0}= 0,\ \frac{\partial u}{\partial x_1}\mid_{x_1=l}= 0,\ \frac{\partial u}{\partial y_1}\mid_{y_1=0}= 0,\ \frac{\partial u}{\partial y_1}\mid_{y_1=l}= 0, \tag{6}$$

$$\int_0^{l}\int_0^{l} u(t, x_1, y_1)dx_1 dy_1 = 0. \tag{7}$$

Здесь $Lu = -\left((\frac{l}{l_1})^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\frac{l}{l_2})^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$, $q = \left(1 + \gamma_1 l^{-1}\varepsilon\right)\left(1 + \gamma_2 l^{-1}\varepsilon\right)$. Так как дальнейшее построение нормальной формы будет производиться с точностью $o(\varepsilon^{3/2})$, будем считать $q \approx 1$. При записи краевой задачи (5)-(7) далее индекс '1' у новых переменных $x_1 \in [0, l], y_1 \in [0, l]$ будем опускать.

Для краевой задачи (5)-(7), а следовательно, и краевой задачи (2)-(4) изучается вопрос о структуре окрестности нулевого решения. В частности, рассматривается вопрос об устойчивости нулевого решения в норме фазового пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^2\,(D) \times W_2^1(D)$ $(D = \{(x,y) : 0 \le x \le l, 0 \le y \le l\})$ решений краевой задачи. Это пространство получено путем замыкания достаточно гладких функций, удовлетворяющих условиям (6), (7) по норме пространства $W_2^2(D)$, а через $W_2^1(D)$ обозначен класс функций, у которых существуют обобщенные первые производные, интегрируемые с квадратом. Некоторые результаты уже были получены в [3]. Ниже исследуется структура окрестности нулевого решения краевой задачи (5)-(7) в случае, когда a - достаточно большая постоянная ($a >> b$). Это условие вполне осмысленно, так как $a^2 = b^2 + d_2$.

2. Линейный анализ. Построение нормальной формы

Наряду с (5)-(7) рассмотрим линеаризованную в нуле краевую задачу. Для этого рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2c\frac{\partial u}{\partial t} + b^2\frac{\partial}{\partial t}(Lu) + a^2 Lu + \omega^2 u = 0$$

с краевыми условиями (6),(7). Исследование спектра устойчивости полученной краевой задачи сводится к нахождению собственных значений оператора L. Стандартный анализ показывает, что собственные значения этого оператора $\mu = \mu_{kn} = \pi^2 k^2 l_1^{-2} + \pi^2 n^2 l_2^{-2}$, а соответствующие собственные функции $e_{kn}(x,y) = \cos(k\pi l_1^{-1}x)\cos(n\pi l_2^{-1}y),\quad k,n = \overline{0,\infty},\quad k+n \ge 1$. Последнее неравенство вытекает из условия (7).

Итак, в нашем случае

$$Lu = L(\varepsilon)u = -\left(\frac{1}{(1+\gamma_l\varepsilon l^{-1})^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{(1+\gamma_2\varepsilon l^{-1})^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Этот линейный оператор имеет следующие собственные значения:

$$\mu_{kn} = \mu_{kn}(\varepsilon) = \pi^2 l^{-2}\left(k^2+n^2\right) - 2\pi^2 l^{-3}\varepsilon\left(\gamma_1 k^2 + \gamma_2 n^2\right) + o(\varepsilon),\ \ \mu_{kn}(0) = \pi^2 l^{-2}\left(k^2+n^2\right).$$

Рассмотрим линейный оператор $L_0 \equiv L(0)$. Его наименьшее собственное число $\pi^2 l^{-2}$ двукратно, и ему соответствуют собственные функции $\cos(\pi l^{-1}x)$, $\cos(\pi l^{-1}y)$.

Положим $c = c_N + \varepsilon$, где $c_N = (1/2)b^2\pi^2 l^{-2}$, тогда уравнение (5) перепишется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2(c_N+\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial t} + b^2\frac{\partial}{\partial t}(Lu) + a^2 Lu + \omega^2 u = -\left(\int_0^l\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdy\right)\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{8}$$

Рассмотрим более детально спектр устойчивости полученной краевой задачи (8),(6),(7). Понятно, что точки спектра следует искать как корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + \left(b^2\mu_{nk}(\varepsilon) - 2c_N - 2\varepsilon\right)\lambda + \left(\omega^2 + a^2\mu_{nk}(\varepsilon)\right) = 0.$$

Отметим, что при $\varepsilon = 0$ у счетного семейства квадратных уравнений среди совокупности их корней существует два чисто мнимых корня $\lambda = \pm i\sigma$ $\left(\sigma = \sqrt{\omega^2 + a^2\pi^2 l^{-2}}\right)$, а остальные корни лежат в комплексной полуплоскости, выделяемой неравенством $Re\lambda \le -\beta < 0$.

Далее рассмотрим задачу о структуре окрестности нулевого решения краевой задачи (8),(6),(7). Для исследования используем один из вариантов методики построения нормальных форм [4, 5].

Будем искать решение уравнения (8) с краевыми условиями (6)-(7) в виде

$$u(t,\tau,x,y) = \varepsilon^{1/2}u_0(t,\tau,x,y) + \varepsilon^{3/2}u_1(t,\tau,x,y) + \cdots. \tag{9}$$

Здесь

$$u_0(t,\tau,x,y) = (z_1(\tau)\exp(i\sigma t) + \overline{z_1}(\tau)\exp(-i\sigma t))\cos\pi x l^{-1} + (z_2(\tau)\exp(i\sigma t) + \overline{z_2}(\tau)\exp(-i\sigma t))\cos\pi y l^{-1},$$

$\tau = \varepsilon t$, $u_1(t,\tau,x,y)$ - достаточно гладкая, периодическая по t с периодом $2\pi/\sigma$ функция переменных t,τ,x,y, а точками обозначены слагаемые более высокого порядка малости по ε. Подставляя (9) в (8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, при $\varepsilon^{3/2}$ для $u_1(t,\tau,x,y)$ получаем неоднородную краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - 2c_N\frac{\partial u_1}{\partial t} + b^2\frac{\partial}{\partial t}(Lu_1) + a^2 Lu_1 + \omega^2 u_1 = F(t,\tau,x,y),$$

где $u_1(t,\tau,x,y)$ удовлетворяет краевым условиям (6),(7),

$$
\begin{aligned}
F(t,\tau,x,y) = 2i\sigma\{\big((b_1-a_1 i)z_1 - \dot{z_1} - \tfrac{1}{4}\sigma^2 l^2\left((3|z_1|^2+2|z_2|^2)z_1 + \bar{z_1}z_2^2\right)\big)\cos\pi x l^{-1} + \\
+\big((b_2-a_2 i)z_2 - \dot{z_2} - \tfrac{1}{4}\sigma^2 l^2\left((2|z_1|^2+3|z_2|^2)z_2 + z_1^2\bar{z_2}\right)\big)\cos\pi y l^{-1}\}\exp(i\sigma t) + \text{к.с.}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Здесь $b_1 = b^2\pi^2 l^{-3}\gamma_1 + 1$, $b_2 = b^2\pi^2 l^{-3}\gamma_2 + 1$, $a_1 = a^2\pi^2 l^{-3}\sigma^{-1}\gamma_1$, $a_2 = a^2\pi^2 l^{-3}\sigma^{-1}\gamma_2$, $\sigma = \sqrt{\omega^2 + a^2\pi^2 l^{-2}}$, точкой обозначена производная по τ, а знак к.с. заменяет совокупность комплексно сопряженных функций.

Из условий разрешимости уравнения (10) в классе тригонометрических многочленов получаем главную часть нормальной формы

$$
\begin{aligned}
\dot{p_1} &= (b_1 - a_1 i)\,p_1 - p_1\left(3|p_1|^2 + 2|p_2|^2\right) - \bar{p_1}p_2^2,\\
\dot{p_2} &= (b_2 - a_2 i)\,p_2 - p_2\left(2|p_1|^2 + 3|p_2|^2\right) - p_1^2\bar{p_2},
\end{aligned}
\tag{11}
$$

где $z_j = 2(\sigma l)^{-1}p_j$, $j = 1,2$.

3. Анализ нормальной формы

Переходя в системе (11) к полярным координатам $p_1 = \rho_1\exp(i\varphi_1)$, $p_2 = \rho_2\exp(i\varphi_2)$, где $\rho_1 = \rho_1(\tau)$, $\rho_2 = \rho_2(\tau)$, $\varphi_1 = \varphi_1(\tau)$, $\varphi_2 = \varphi_2(\tau)$, приходим к системе

$$
\begin{aligned}
\dot{\rho_1} &= \rho_1\left(b_1 - (3\rho_1^2 + 2\rho_2^2) - \rho_2^2\cos\psi\right),\\
\dot{\rho_2} &= \rho_2\left(b_2 - (2\rho_1^2 + 3\rho_2^2) - \rho_1^2\cos\psi\right),\\
\dot{\psi} &= 2\left(a_1 - a_2 + (\rho_1^2 + \rho_2^2)\sin\psi\right),
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где $\psi = 2(\varphi_2 - \varphi_1)$. Для системы (12) справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *Система обыкновенных дифференциальных уравнений (12) диссипативна.*

Для доказательства леммы следует показать, что существует такая положительная постоянная R, что все решения с течением времени попадают во множество, выделяемое неравенством

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 \le R^2.$$

В свою очередь, для этого достаточно показать, что производная в силу системы функции Ляпунова $V(\rho_1,\rho_2) = \rho_1^2 + \rho_2^2$ отрицательна, если $\rho_1^2 + \rho_2^2 > R^2$. Последнее вытекает из того, что $D_t V \le -3(\rho_1^2 + \rho_2^2)^2 + b(\rho_1^2 + \rho_2^2)$, где $b = \max(|b_1|,|b_2|)$. Понятно, что при выводе последнего неравенства используется обстоятельство, что $|\cos\psi| \le 1$. Особенно стоит отметить, что величина R не зависит от выбора a_1, a_2.

Далее будем считать, что постоянная $a_0 = |a_1 - a_2|$ достаточно велика. Без нарушения общности можно считать, что $a_1 - a_2 > 0$.

Из последних замечаний вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 2. *Существует такое* $M_0 > 0$, что при $a_0 > M_0$ справедливо неравенство

$$2\left(a_0 + (\rho_1^2 + \rho_2^2)\sin\psi\right) > 0.$$

Далее будем рассматривать $\rho_1 = \rho_1(\psi(\tau))$, $\rho_2 = \rho_2(\psi(\tau))$, $a_1 - a_2 = a_0 > const > 0$, что справедливо в силу лемм 1-2, тогда система (12) перепишется следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\rho_1' &= \frac{\rho_1\left(b_1 - (3\rho_1^2 + 2\rho_2^2) - \rho_2^2\cos\psi\right)}{a_0 + (\rho_1^2 + \rho_2^2)\sin\psi},\\
\rho_2' &= \frac{\rho_2\left(b_2 - (2\rho_1^2 + 3\rho_2^2) - \rho_1^2\cos\psi\right)}{a_0 + (\rho_1^2 + \rho_2^2)\sin\psi}.
\end{aligned}
$$

Здесь штрихом обозначена производная по ψ. Положим $1/a_0 = \delta$ и сведем тем самым систему к виду

$$
\begin{aligned}
\rho_1' &= \delta\rho_1\left(b_1 - (3\rho_1^2 + 2\rho_2^2) - \rho_2^2\cos\psi\right) + o(\delta),\\
\rho_2' &= \delta\rho_2\left(b_2 - (2\rho_1^2 + 3\rho_2^2) - \rho_1^2\cos\psi\right) + o(\delta),
\end{aligned}
\tag{13}
$$

считая δ малым параметром (a_0 - велико). К системе (13) можно применить метод усреднения (см., например, гл. 4 из монографии [6]). В первом приближении получим систему

$$\begin{aligned} y_1' &= \delta y_1 \left(b_1 - (3y_1^2 + 2y_2^2)\right), \\ y_2' &= \delta y_2 \left(b_2 - (2y_1^2 + 3y_2^2)\right), \end{aligned} \tag{14}$$

где $\rho_1 = y_1 - \delta y_1 y_2^2 \sin\psi$, $\rho_2 = y_2 - \delta y_2 y_1^2 \sin\psi$.

Система (14) имеет три ненулевых состояния равновесия

$$R_1 : y_1 = \sqrt{\tfrac{b_1}{3}}, y_2 = 0, \quad R_2 : y_1 = 0, y_2 = \sqrt{\tfrac{b_2}{3}}, \quad R_3 : y_1 = \sqrt{\tfrac{3b_1 - 2b_2}{5}}, y_2 = \sqrt{\tfrac{3b_2 - 2b_1}{5}}.$$

Лемма 3. *Состояние равновесия R_1 существует, если $b_1 > 0$ и асимптотически устойчиво, если выполнено неравенство*

$$b_2 < \frac{2}{3} b_1.$$

Лемма 4. *Состояние равновесия R_2 существует, если $b_2 > 0$ и асимптотически устойчиво, если выполнено неравенство*

$$b_1 < \frac{2}{3} b_2.$$

Лемма 5. *Состояние равновесия R_3 существует и является асимптотически устойчивым, если выполнено неравенство*

$$\frac{2}{3} b_2 \le b_1 \le \frac{3}{2} b_2.$$

Теорема 1. *Пусть $\delta \in [0, \delta_0]$, где δ_0 - достаточно маленькая положительная постоянная, а $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta)$. Тогда состояниям равновесия R_1,R_2,R_3 соответствуют двумерные инвариантные торы T_1,T_2,T_3, которые наследуют устойчивость соответствующих состояний равновесия. Для решений на инвариантном торе T_1 справедлива асимптотическая формула*

$$u(t, \tau, x, y) = \frac{4}{l\sigma} \sqrt{\frac{b_1 \varepsilon}{3}} \cos(\varphi_1(\tau) + \sigma t) \cos\frac{\pi x}{l} + o(\varepsilon^{\frac{1}{2}}).$$

Для решений на инвариантном торе T_2 справедлива асимптотическая формула

$$u(t, \tau, x, y) = \frac{4}{l\sigma} \sqrt{\frac{b_2 \varepsilon}{3}} \cos(\varphi_2(\tau) + \sigma t) \cos\frac{\pi y}{l} + o(\varepsilon^{\frac{1}{2}}).$$

Для решений на инвариантном торе T_3 справедлива асимптотическая формула

$$u(t, \tau, x, y) = \frac{4}{l\sigma} \left(\sqrt{\frac{(3b_1 - 2b_2)\varepsilon}{5}} \cos(\varphi_1(\tau) + \sigma t) \cos\frac{\pi x}{l} + \sqrt{\frac{(3b_2 - 2b_1)\varepsilon}{5}} \cos(\varphi_2(\tau) + \sigma t) \cos\frac{\pi y}{l} \right) + o(\varepsilon^{\frac{1}{2}}),$$

где $b_1 = b^2\pi^2 l^{-3}\gamma_1 + 1$, $b_2 = b^2\pi^2 l^{-3}\gamma_2 + 1$, $a_1 = a^2\pi^2 l^{-3}\sigma^{-1}\gamma_1$, $a_2 = a^2\pi^2 l^{-3}\sigma^{-1}\gamma_2$, $\sigma = \sqrt{\omega^2 + a^2\pi^2 l^{-2}}$, а $\psi(\tau)$, $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$ определяются из уравнений

$$\dot\psi = 2\left(a_1 - a_2 + (\rho_1^2 + \rho_2^2)\sin\psi\right), \quad \dot\varphi_1 = -a_1 - \rho_1^2 \sin\psi, \quad \dot\varphi_2 = -a_2 + \rho_2^2 \sin\psi.$$

Асимптотически устойчивым состояниям равновесия системы дифференциальных уравнений (14) соответствуют асимптотически устойчивые инвариантные торы краевой задачи (8),(6),(7). Седловым состояниям равновесия соответствуют седловые двумерные инвариантные торы.

Доказательство теоремы вытекает из результатов, изложенных в монографии [5] (см. основную бифуркационную теорему).

Список литературы

1. Пу, Т. Нелинейная экономическая динамика / Т. Пу. - Ижевск: Удмуртский университет, 2000.- 199 с.

2. Занг, В.-Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории / В.-Б. Занг. - М.: Мир, 1999. - 400 с.

3. Коршунова, Е.В. Пространственно-неоднородные циклы деловой активности в модели мультипликатор-акселератор / Е.В. Коршунова // Современные проблемы математики и информатики. - 2006. - Вып. 8. - С. 92—97.

4. Мищенко, Е.Ф. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией / Е.Ф. Мищенко, В.А. Садовничий, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов. - М.: Физматлит, 2005. - 430 с.

5. Колесов, А.Ю. Инвариантные торы нелинейных эволюционных уравнений: Учеб. пособие /А.Ю. Колесов, А.Н. Куликов. - Ярославль, 2003. - 108 с.

6. Гукенхеймер, Дж. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей / Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс. - Москва;Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. - 560 с.

Spatial Non-homogeneous Invariant Tori in the Multiplier-Accelerator Model

Korshunova E.V., Kulikov A.N.

In this paper we introduce a boundary value problem based on the well known Multiplier-Accelerator model proposed by Paul Samuelson which is an extension of the works of John Keynes. The suggested boundary value problem is to consider spatial effects when studying processes of macroeconomics. For the boundary value problem given, using the Invariant Manifolds method, the method of Averaging and the Theory of Normal Forms we show the existence of stable spatial non-homogeneous invariant tori.