

УДК 517.958

## Локальная динамика уравнения Хатчинсона с двумя запаздываниями в критическом случае резонанса 1:2

Киселева Е. О.

Ярославский государственный университет,  
150 000, Ярославль, Советская, 14  
e-mail: katerinakiseleva@mail.ru,

получена 15 мая 2007

### Аннотация

Рассматривается дифференциально-разностное уравнение, возникающее при описании динамики численности популяции. Предполагается, что параметры выбраны так, что характеристический квазиполином линейной части уравнения имеет две пары чисто мнимых корней, связанных резонансом 1:2. В близком к критическому случае построена нормальная форма уравнения и изучены фазовые перестройки нормальной формы при изменении параметров.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается обобщенное уравнение Хатчинсона (см. [1])

$$\dot{N} = r \left[ 1 - \frac{1}{K} \sum_{j=1}^n \alpha_j N(t - h_j) \right] N, \quad (1)$$

где  $N(t)$  – численность популяции,  $r > 0$  – коэффициент линейного роста,  $K$  – средняя численность популяции, определяемая емкостью среды обитания,  $\alpha_j$  – неотрицательные переменные, удовлетворяющие соотношению  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ , а величины запаздываний  $h_j$  упорядочены по возрастанию так, что  $h_1 < h_2 < \dots < h_n$ .

Уравнение (1) описывает динамику изменения численности с более тонким учетом возрастной структуры популяции по сравнению со стандартным уравнением Хатчинсона.

Предположим сначала, что  $n = 2$ , то есть рассматриваются 2 возрастные группы, дающие вклад в изменение численности популяции.

$$\dot{N} = r \left[ 1 - \frac{1}{K} (\alpha_1 N(t - h_1) + \alpha_2 N(t - h_2)) \right] N. \quad (2)$$

Нормируя  $N$  на  $K$  и делая замену времени  $th_2 \rightarrow t$ , приходим к соотношению

$$\dot{N} = r [1 - aN(t - 1) - (1 - a)N(t - h)]N, \quad (3)$$

где  $rh_2$  снова обозначено  $r$ ,  $h = h_1/h_2 < 1$ . Кроме того,  $a_2$  обозначено  $a$ , а  $a_1$  – в свою очередь  $(1 - a)$ .

Состояниями равновесия уравнения (3) являются точки  $N = 0$  и  $N = 1$ . Легко видеть, что нулевое состояние равновесия является неустойчивым. Устойчивость второго состояния определяется характеристическим квазиполином уравнения (3), линеаризованного на  $N = 1$

$$\dot{N} = -r [aN(t - 1) + (1 - a)N(t - h)]. \quad (4)$$

Искомый квазиполином имеет вид

$$P(\lambda) \equiv \lambda + r(ae^{-\lambda} + (1 - a)e^{-\lambda h}). \quad (5)$$

Наша задача – анализируя квазиполином  $P(\lambda)$ , найти значения  $r_0$ ,  $a_0$ ,  $h_0$  параметров  $r$ ,  $a$ ,  $h$ , при которых при потере устойчивости состояния равновесия  $N = 1$  на мнимую ось выходят две пары чисто мнимых корней, связанных резонансом 1:2 (см. [2]). Для анализа динамики уравнения (3) в окрестности состояния равновесия  $N = 1$  требуется построить нормальную форму при близких к критическим значениях параметров.

### 2. Исследование характеристического квазиполинома

Изучим сначала свойства характеристического квазиполинома (5). В частности, справедлива следующая лемма.

**Лемма 1.** При значениях параметров

$$a_0 = \frac{9 - \sqrt{6}}{18}, h_0 = \frac{\arccos\left(\sqrt{\frac{a_0}{2(1-a_0)}}\right)}{\omega_0}, r_0 = \frac{\omega_0}{a_0 \sin(\omega_0) + (1 - a_0) \sin(\omega_0 h_0)}, \quad (6)$$

характеристический квазиполином  $P(\lambda)$  уравнения (3) имеет 2 пары чисто мнимых собственных значений вида  $\pm i\omega_0, \pm 2i\omega_0$ , где

$$\omega_0 = 2\pi - \arccos\left(-\sqrt{\frac{1-a_0}{2a_0}}\right), \quad (7)$$

а все остальные его корни лежат в левой комплексной полуплоскости.

*Доказательство.* Лемма проверяется непосредственной подстановкой.

### 3. Построение нормальной формы

Для исследования окрестности нетривиального состояния равновесия уравнения (3) выполним замену  $N = 1 + n$ , откуда

$$\dot{n} = -r[an(t-1) + (1-a)n(t-h)](1+n). \quad (8)$$

Предположим, что параметры  $r_0, a_0, h_0$  выбраны согласно формулам (6),(7). Рассмотрим возмущенную задачу (8) в близком к критическому случае  $r = r_0 + \varepsilon$ . Для построения нормальной формы задачи (8) в окрестности тривиального состояния равновесия выполним замену

$$n(t, s) = \varepsilon(z_1(s)e^{i\omega_0 t} + z_2(s)e^{2i\omega_0 t} + \text{к.с.}) + \varepsilon^2 u_2(t, s) + \varepsilon^3 u_3(t, s) + \dots, \quad (9)$$

где  $s = \varepsilon t$ , а к.с. обозначено выражение, комплексно сопряженное к выражению, находящемуся в тех же скобках. На первом шаге построения нормальной формы получаем, очевидно, верное тождество. На втором шаге приходим к уравнению

$$\begin{aligned} L(u_2) \equiv \dot{u}_2 + r_0[a_0 u_2(t-1, s) + (1-a_0)u_2(t-h_0, s)] = \\ = -z_1' \exp(i\omega_0 t) - z_2' \exp(2i\omega_0 t) + \\ + r_0[a_0(z_1' \exp(i\omega_0(t-1)) + z_2' \exp(2i\omega_0(t-1)) + \text{к.с.}) + \\ + (1-a_0)h_0(z_1' \exp(i\omega_0(t-h_0)) + z_2' \exp(2i\omega_0(t-h_0)) + \text{к.с.})] - \\ - r_0[a_0(z_1 \exp(i\omega_0(t-1)) + z_2 \exp(2i\omega_0(t-1)) + \text{к.с.}) + \\ + (1-a_0)(z_1 \exp(i\omega_0(t-h_0)) + z_2 \exp(2i\omega_0(t-h_0)) + \text{к.с.})] \\ \times (z_1 \exp(i\omega_0 t) + z_2 \exp(2i\omega_0 t) + \text{к.с.}) - \\ - [a_0(z_1 \exp(i\omega_0(t-1)) + z_2 \exp(2i\omega_0(t-1)) + \text{к.с.}) + \\ + (1-a_0)(z_1 \exp(i\omega_0(t-h_0)) + z_2 \exp(2i\omega_0(t-h_0)))]], \quad (10) \end{aligned}$$

где штрихом обозначены производные  $z_1(s), z_2(s)$  по  $s$ .

Из условий разрешимости уравнения (10) в классе  $2\pi/\omega_0$ -периодических по  $t$  функций получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} z_1' &= \Phi_1 z_1 + A_1 \bar{z}_1 z_2 \\ z_2' &= \Phi_2 z_2 + A_2 z_2^2, \end{aligned} \quad (11)$$

представляющую собой укороченную нормальную форму задачи (8). Параметры системы (11) вычисляются по формулам

$$\Phi_1 = \frac{i\omega_0}{P'(i\omega_0)}, \Phi_2 = \frac{2i\omega_0}{P'(2i\omega_0)}, A_1 = \frac{i\omega_0}{P'(i\omega_0)}, A_2 = \frac{i\omega_0}{P'(2i\omega_0)}. \quad (12)$$

Здесь используется обозначение

$$P'(\lambda) = 1 - r_0(a_0 e^{-\lambda} + (1-a_0)e^{-\lambda h_0}). \quad (13)$$

Ясно, что система (11) всегда имеет нулевое состояние равновесия, которое является неустойчивым, так как параметры  $\text{Re}\Phi_1 > 0$ ,  $\text{Re}\Phi_2 > 0$ .

Определяя решение уравнения (10) в виде суммы гармоник, на которые распадается его правая часть, получаем следующее выражение для функции  $u_2(t, s)$ :

$$u_2(t, s) = b_3 z_1 z_2 \exp(3i\omega_0 t) + b_4 z_2^2 \exp(4i\omega_0 t) + \text{к.с.}, \quad (14)$$

где

$$b_3 = \frac{3i\omega_0}{P(3i\omega_0)}, b_4 = \frac{2i\omega_0}{P(4i\omega_0)}. \quad (15)$$

Для упрощения системы (11) сделаем полярную замену переменных  $z_j = \xi_j e^{i\varphi_j}$ ,  $j = 1, 2$  и перейдем к разности фаз  $\theta = \varphi_2 - 2\varphi_1$ . При этом получаем трехмерную систему, в которой выделены амплитудные и фазовые переменные

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \gamma_1 \xi_1 + k_1 \xi_1 \xi_2 \cos(\theta + \delta_1), \\ \dot{\xi}_2 &= \gamma_2 \xi_2 + k_2 \xi_1^2 \cos(\theta + \delta_2), \\ \dot{\theta} &= c - 2k_1 \xi_2 \sin(\theta + \delta_1) - k_2 \frac{\xi_1^2}{\xi_2} \sin(\theta + \delta_2). \end{aligned} \quad (16)$$

Параметры системы (16) имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \text{Re}\Phi_1, \gamma_2 = \text{Re}\Phi_2, c = \text{Im}\Phi_2 - 2\text{Im}\Phi_1, \\ k_1 &= |A_1|, k_2 = |A_2|, \delta_1 = \arg(A_1), \delta_2 = \arg(A_2). \end{aligned} \quad (17)$$

Отметим полезное утверждение, касающееся устойчивости состояний равновесия системы (16).

**Лемма 2.** Пусть  $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$ , тогда любое состояние равновесия системы (16) является неустойчивым.

*Доказательство.* Рассмотрим след матрицы Якоби системы (16) на некотором состоянии равновесия:

$$\text{tr}A = \gamma_1 + k_1 \xi_2 \cos(\theta + \delta_1) + \gamma_2 - 2k_1 \xi_2 \cos(\theta + \delta_1) - k_2 \frac{\xi_1^2}{\xi_2} \cos(\theta + \delta_2).$$

Учитывая, что

$$k_1 \xi_2 \cos(\theta + \delta_1) = -\gamma_2, \quad k_2 \frac{\xi_1^2}{\xi_2} \cos(\theta + \delta_2) = -\gamma_2,$$

получаем

$$\text{tr}A = 2(\gamma_1 + \gamma_2).$$

Так как мы предполагаем, что  $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ , то любое состояние равновесия системы (16) является неустойчивым.

Численный анализ нормальной формы (16) показал, что для начальных условий из достаточно широкой области фазового пространства системы (16) устойчивые режимы отсутствуют.

Таким образом, все решения нормальной формы (16) уходят из любой окрестности начала координат системы. Построение дополнительного шага разложения нормальной формы в ряд по  $\varepsilon$  может привести к системе, у которой имеются устойчивые режимы порядка  $\varepsilon^{-1/2}$ . В связи с этим для уточнения нормальной формы найдем поправку порядка  $\varepsilon$  к системе (11). Введем в рассмотрение две достаточно гладкие функции  $\psi_1, \psi_2$  аргументов  $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2$  так, что

$$\begin{aligned} z_1' &= \Phi_1 z_1 + A_1 \bar{z}_1 z_2 + \varepsilon \psi_1(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2), \\ z_2' &= \Phi_2 z_2 + A_2 z_2^2 + \varepsilon \psi_2(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2). \end{aligned} \quad (18)$$

Учитывая разложение (18), на следующем шаге получим уравнение, из условий разрешимости которого в классе  $2\pi/\omega_0$ -периодических функций найдем соотношения для  $\psi_1$  и  $\psi_2$ . Таким образом, на устойчивом четырехмерном интегральном многообразии уравнения (8) получаем систему вида

$$\begin{aligned} z_1' &= (\Phi_1 + \varepsilon\Phi_{10})z_1 + (A_1 + \varepsilon A_{10})\bar{z}_1 z_2 + \varepsilon(d_{11}|z_1|^2 + d_{12}|z_2|^2)z_1, \\ z_2' &= (\Phi_2 + \varepsilon\Phi_{20})z_2 + (A_2 + \varepsilon A_{20})z_2^2 + \varepsilon(d_{21}|z_1|^2 + d_{22}|z_2|^2)z_2. \end{aligned} \quad (19)$$

Коэффициенты нормальной формы (19) имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{10} &= \frac{\Phi_1 P_0(i\omega_0)}{P'(i\omega_0)}, & \Phi_{20} &= \frac{\Phi_2 P_0(2i\omega_0)}{P'(2i\omega_0)}, \\
 A_{10} &= \frac{r_0 \Phi_2 P_0(2i\omega_0) + r_0 \bar{\Phi}_1 P_0(-i\omega_0) + A_1 P_0(i\omega_0) + 3i\omega_0/r_0}{P'(i\omega_0)}, \\
 A_{20} &= \frac{r_0 \Phi_1 P_0(i\omega_0) + A_2 P_0(2i\omega_0) + i\omega_0/r_0}{P'(2i\omega_0)}, \\
 d_{11} &= \frac{r_0 A_2 P_0(2i\omega_0)}{P'(i\omega_0)}, & d_{22} &= \frac{-b_4(r_0 P_0(4i\omega_0) + 2i\omega_0)}{P'(2i\omega_0)}, \\
 d_{12} &= \frac{-b_3(r_0(a_0 e^{-3i\omega_0} + (1-a_0)e^{-3i\omega_0 h_0}) + 2i\omega_0) + r_0 \bar{A}_1 P_0(-i\omega_0)}{P'(i\omega_0)}, \\
 d_{21} &= \frac{-b_3(r_0(a_0 e^{-4i\omega_0} + (1-a_0)e^{-4i\omega_0 h_0}) + i\omega_0) + r_0 A_1 P_0(i\omega_0)}{P'(2i\omega_0)}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Здесь использовано обозначение

$$P_0(\lambda) = a_0 e^{-\lambda} + (1-a_0)h_0 e^{-\lambda h_0}. \tag{21}$$

Переходя к амплитудам и фазам, получим для нормальной формы (19) трехмерную действительную систему

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_1 &= (\gamma_1 + \varepsilon\gamma_{10})\xi_1 + (k_1 + \varepsilon k_{10})\xi_1 \xi_2 \cos(\theta + \delta_1 + \delta_{10}) + \\
 &\quad + \varepsilon[m_{11}\xi_1^2 + m_{12}\xi_2^2]\xi_1, \\
 \dot{\xi}_2 &= (\gamma_2 + \varepsilon\gamma_{20})\xi_2 + (k_2 + \varepsilon k_{20})\xi_1^2 \cos(\theta + \delta_2 + \delta_{20}) + \\
 &\quad + \varepsilon[m_{21}\xi_1^2 + m_{22}\xi_2^2]\xi_2, \\
 \dot{\theta} &= (c + \varepsilon c_0) - 2(k_1 + \varepsilon k_{10})\xi_2 \sin(\theta + \delta_1 + \delta_{10}) - \\
 &\quad - (k_2 + \varepsilon k_{20})\frac{\xi_1^2}{\xi_2} \sin(\theta + \delta_2 + \delta_{20}) + \varepsilon[c_1 \xi_1^2 + c_2 \xi_2^2].
 \end{aligned} \tag{22}$$

Параметры данной системы определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{10} &= \operatorname{Re}\Phi_{10}, \gamma_{20} = \operatorname{Re}\Phi_{20}, c_0 = \operatorname{Im}\Phi_{20} - 2\operatorname{Im}\Phi_{10}, \\
 k_{10} &= |A_{10}|, k_{20} = |A_{20}|, \delta_{10} = \arg(A_{10}), \delta_{20} = \arg(A_{20}), \\
 m_{ij} &= \operatorname{Re}d_{ij}, c_i = \operatorname{Im}d_{2i} - 2\operatorname{Im}d_{1i}, i, j = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Учитывая, что параметры  $r_0$ ,  $a_0$ ,  $h_0$  определяются формулами (6) и (7), легко вычислить параметры системы (22):  $\gamma_1 = 0.00923258$ ,  $\gamma_2 = 0.2256757$ ,  $k_1 = 1.1344222$ ,  $k_2 = 0.98608$ ,  $c = -0.3066652$ ,  $\delta_1 = 1.5008747$ ,  $\delta_2 = -0.1883337$ ,  $\gamma_{10} = -0.002511$ ,  $\gamma_{20} = -0.0244615$ ,  $k_{10} = 0.6770409$ ,  $k_{20} = 0.15161078$ ,  $c_0 = -0.0840522$ ,  $c_1 = -1.763865$ ,  $c_2 = -4.843258$ ,  $m_{11} = 0.743634$ ,  $m_{12} = -26.033715$ ,  $m_{21} = -2.30392$ ,  $m_{22} = 17.349767$ ,  $\delta_{10} = 0.3462336$ ,  $\delta_{20} = -0.599$ .

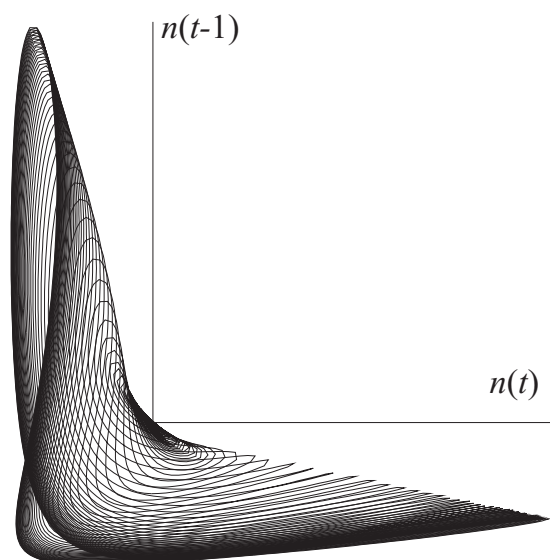
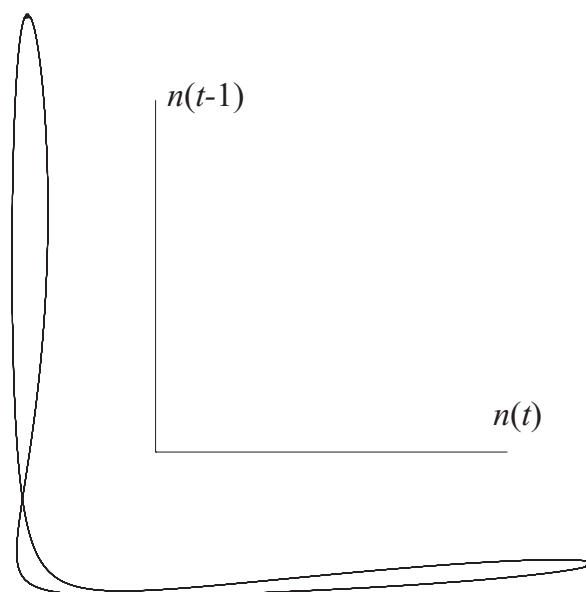
Численный анализ, произведенный при найденных значениях параметров, показал, что динамика нормальной формы (22), так же, как и нормальной формы (16), оказывается нелокальной. В частности, при  $\varepsilon = 0,01$  и различных начальных условиях все решения, для которых выполнялись расчеты, давали переполнение вещественных чисел по одной из компонент  $\xi_1$  или  $\xi_2$ . Это означает, что в исходной задаче (8) происходит жесткая потеря устойчивости нулевого состояния равновесия.

Отметим, что при  $\varepsilon < 0$  состояние равновесия системы (16) локально устойчиво.

#### 4. Численный анализ динамики исходного уравнения

Численное исследование уравнения (8) при значениях параметров, задаваемых формулами (6) и (7), и изменении  $r$  в окрестности точки  $r_0$  (согласно лемме 1  $r_0 \approx 8.584386919$ ) дает следующую последовательность фазовых перестроек:

1. При  $r = r_1 \approx 7.2824$  из воздуха рождаются устойчивый и неустойчивый предельные циклы.
2. Затем неустойчивый цикл стягивается в состояние равновесия  $N = 0$  и отбирает у него при  $r = r_0$  устойчивость.
3. При  $r < r_1$  единственным устойчивым режимом уравнения (8) является нулевое состояние равновесия (см. рис. 1, на котором изображен переходный процесс из окрестности исчезнувшего при  $r = r_1$  цикла к нулевому состоянию равновесия).

Рис. 1.  $r = 7.3$ Рис. 2.  $r = 7.28$ 

4. При  $r_0 < r < r_1$  устойчивое состояние равновесия сосуществует с устойчивым предельным циклом (см. рис. 2).

5. При  $r > r_0$  устойчивым остается лишь предельный цикл.

Полученные результаты вычислений подтверждают приведенные выше выводы локального анализа.

## Список литературы

1. Колесов, Ю. С. Проблема адекватности экологических уравнений / Ю. С. Колесов. — Ярославль, 1985. Деп. в ВИНТИ 1985, №1901-85.
2. Глызин, С. Д. Локальные методы анализа динамических систем: учебное пособие / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов; Яросл. гос. ун-т. — Ярославль: ЯрГУ, 2006. — 92 с.

### Local Dynamics of the Hutchinson Equation with Two Delays in a Critical Case of a Resonance 1:2

Kiseleva E.O.

A differential-difference equation arising at the description of dynamics of a population is considered. It is supposed that the parameters are chosen so that characteristic quasipolynomial has two pairs of imaginary roots which are in resonance 1:2. The normal form of the equation, when the parameters are close to the critical values, is constructed. Phase reorganizations of a normal form under changes of parameters are studied.